



**COURS**  
**DE**  
**MÉCANIQUE APPLIQUÉE.**

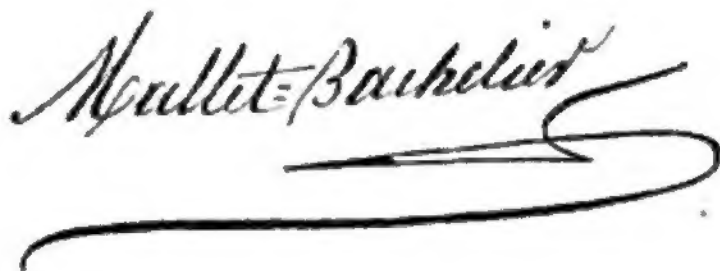


**L'Auteur et l'Éditeur** de cet Ouvrage se réservent le droit de le traduire ou de le faire traduire en toutes langues. Ils poursuivront, en vertu des Lois, Décrets et Traités internationaux, toute contrefaçon, soit du texte, soit des gravures, ou toute traduction faite au mépris de leurs droits.

Le dépôt légal de cet Ouvrage a été fait à Paris dans le cours du mois de Juin 1859, et toutes les formalités prescrites par les Traités sont remplies dans les divers États avec lesquels la France a conclu des conventions littéraires.

---

Tout exemplaire du présent Ouvrage qui ne porterait pas, comme ci-dessous, la signature du Libraire-Éditeur, sera réputé contrefait. Les mesures nécessaires seront prises pour atteindre, conformément à la loi, les fabricants et les débitants de ces exemplaires.

A handwritten signature in dark ink, reading "Mallet-Bachelier". The signature is written in a cursive style with a long, sweeping underline that extends to the right.

---

Paris — Imprimerie de MALLET-BACHELIER, rue du Jardinnet, 12.

# COURS

DE

# MÉCANIQUE APPLIQUÉE,

PROFESSÉ

A L'ÉCOLE IMPÉRIALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.

PAR M. BRESSE,

Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur de Mécanique à l'École des Ponts et Chaussées,  
Répétiteur à l'École Polytechnique, Membre de la Société Philomathique de Paris.

---

## PREMIÈRE PARTIE.

RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX ET STABILITÉ DES CONSTRUCTIONS.



PARIS,

MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE  
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,  
Quai des Augustins, 55.

—  
1859

(L'Auteur et l'Éditeur de cet Ouvrage se réservent le droit de traduction.)





---

## AVANT-PROPOS.

---

Il est assez difficile de définir la Mécanique appliquée et d'indiquer d'une manière précise où l'on sort de la théorie pure pour entrer dans les questions pratiques; cependant on peut dire que, sauf un petit nombre d'exceptions, les problèmes de Mécanique dont la solution intéresse les Ingénieurs se rangent dans les trois catégories suivantes :

Étude des machines au point de vue du mouvement à produire, des résistances secondaires développées, et enfin de la puissance employée pour obtenir un certain effet ;

Résistance des matériaux, c'est-à-dire recherche des dimensions minimum que doivent présenter les corps mis en œuvre, soit dans les machines, soit dans les constructions en charpente, maçonnerie ou métal, pour qu'ils se conservent indéfiniment et ne se désagrègent pas, malgré les tensions intérieures qui naissent en eux, par suite des forces appliquées à leurs différents points ;

Hydraulique, ou étude théorique et expérimentale des lois qui régissent l'équilibre et le mouvement des fluides, en y comprenant accessoirement les machines hydrauliques, qui pourraient aussi se classer dans la première catégorie.

Toutes ces applications figurent à un degré plus ou moins

marqué dans le Cours de Mécanique et Machines de l'École Polytechnique; il a même été jugé que les indications données aux élèves sur le premier ordre de questions sont suffisantes pour les Ingénieurs des Ponts et Chaussées, qui ont en général assez peu à s'occuper de l'établissement ou de la direction de machines (\*). Il restait donc à développer les notions relatives à la Résistance des Matériaux et à l'Hydraulique : c'est l'objet d'un Cours en deux Parties, ou, si l'on veut, de deux Cours, que nous professons à l'École des Ponts et Chaussées, en consacrant alternativement à chacun d'eux la durée d'une session scolaire, c'est-à-dire trente-six ou quarante leçons.

Disons maintenant en peu de mots quels sont les principes généraux sur lesquels nous nous appuyons dans la première Partie (la Résistance des Matériaux), et les questions principales qui s'y trouvent traitées.

Toutes les formules pratiques de la Résistance des Matériaux, depuis longtemps reconnues et sanctionnées par l'usage, ont été déduites de données expérimentales sur les relations qui lient, dans quelques cas particuliers, une force avec les déformations correspondantes, et d'un principe hypothétique susceptible de s'énoncer comme il suit : si un corps prismatique ou composé de portions assimilables à des prismes éprouve, sous l'action de forces quelconques, une déformation en même temps qu'un changement de son état d'équilibre intérieur, les sections primitivement planes et normales à l'axe

---

(\*) Une exception a toutefois été faite pour les machines à vapeur : l'École des Ponts et Chaussées leur a consacré un cours spécial, actuellement confié à M. Clapeyron, ingénieur en chef des Mines, membre de l'Académie des Sciences. En outre, chaque professeur de construction décrit les machines ou engins qui se rapportent plus spécialement au cours dont il est chargé.

du corps restent encore planes et normales dans l'état définitif. Cette hypothèse présente un accord suffisant avec les faits, sauf dans des cas extrêmes et pour ainsi dire exceptionnels, qui ont en définitive peu d'importance pour les constructeurs; elle a été admise par Navier, par MM. Belanger, Poncelet, Morin et beaucoup d'autres savants ou Ingénieurs; Poisson lui-même s'en est servi dans sa *Mécanique rationnelle*. Après toutes ces autorités, nous avons cru pouvoir l'adopter à notre tour. Sans doute la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides se présente comme une science dont les principes ont une vérité plus générale et plus certaine; à ce point de vue on peut regretter qu'elle ne forme point la base de notre enseignement. Mais nous avons dû nous arrêter devant ce que nous considérons comme une impossibilité absolue. Malgré les travaux des illustres géomètres et notabilités scientifiques qui se sont donné pour tâche de la perfectionner, la théorie dont nous parlons doit rester pour quelque temps encore dans le domaine spéculatif : telle qu'elle existe actuellement, elle ne saurait conduire à la solution d'une foule de problèmes qu'il est permis à la science pure de négliger quand ils dépassent les ressources de l'analyse mathématique, mais qui sont indispensables ou tout au moins extrêmement utiles à la pratique des ingénieurs.

Cependant, quoique dans tous les calculs d'application nous nous soyons strictement conformé au principe ci-dessus posé et aux conséquences qui en découlent, nous avons pensé qu'il était convenable de l'élargir un peu, en exposant dans les deux premiers Chapitres la partie théorique de la Résistance des Matériaux. Nous admettons bien toujours que les déformations des corps prismatiques sont dues exclusivement à des mouvements relatifs des sections planes primitivement normales à



l'axe de la pièce, mais sans imposer cette condition restrictive que les mêmes sections seront encore normales à l'axe déformé. Le mouvement relatif infiniment petit de deux sections infiniment voisines peut être alors absolument quelconque ; pour en étudier les effets, nous distinguons d'abord quatre cas simples désignés par les noms d'extension (ou compression), glissement transversal, flexion, torsion : puis, dans chacun d'eux nous établissons, en nous fondant sur des faits empruntés à la Physique expérimentale, ou sur des analogies, les rapports qui existent entre la grandeur du déplacement, la force ou le couple dont il est l'effet, et les actions moléculaires correspondantes. Cela posé, quelles que soient les forces extérieures exercées sur un prisme, à partir d'une section donnée, on reconnaît sans peine qu'il est possible de les équilibrer en faisant prendre à cette section, relativement à une autre qu'on imaginerait très-près de la première, quatre mouvements simples convenablement choisis, dont on saurait déterminer l'étendue. Et si l'on admet, comme nous l'avons dit, que les sections normales ne doivent pas se déformer, le mouvement relatif existant réellement entre les deux sections considérées se composera en effet des quatre mouvements qu'on vient de trouver, de sorte qu'on sera déjà en mesure de calculer l'intensité des forces moléculaires mises en jeu. En outre, connaissant ainsi le mouvement relatif de deux sections consécutives en fonction des forces extérieures, si l'on donnait de plus le déplacement absolu d'une section quelconque, on pourrait en conclure celui de toute autre section : par conséquent on pourrait déterminer la situation nouvelle de la pièce, au moyen d'une composition de mouvements, comme nous le montrons dans le Chapitre II. On a donc résolu deux des grands problèmes qui font l'objet de la Résistance des Ma-

tériaux, puisque, les forces extérieures étant données, on sait calculer les tensions moléculaires et les déformations qu'elles produisent : la solution ne semble d'abord directement applicable qu'à des prismes; mais nous faisons voir qu'elle s'étend à une classe de corps dans laquelle rentrent à peu près toutes les pièces droites ou courbes employées par les constructeurs.

Il existe encore un troisième problème général, qui consiste à déterminer partiellement les forces extérieures appliquées à un corps, quand celles-ci ne sont point toutes des données immédiates de la question. Nous en avons traité un certain nombre d'exemples particuliers qui font suffisamment connaître les méthodes à employer en pareil cas.

De même que l'extension simple conduit à considérer un coefficient d'élasticité ordinairement désigné par  $E$ , de même le glissement simple qui consiste en une translation relative de deux sections voisines, parallèlement à leur plan, fait introduire dans les calculs un second coefficient  $G$  qui joue un rôle analogue. Nous distinguons les genres d'élasticité qu'ils définissent par les épithètes de *longitudinale* ou *transversale*. L'élasticité longitudinale, ayant pour coefficient  $E$ , fonctionne non-seulement quand il y a extension ou compression simples; mais encore quand il y a flexion simple, c'est-à-dire changement d'inclinaison relative de deux sections voisines, sans variation de longueur dans l'élément intermédiaire de l'axe du corps. Pareillement l'élasticité transversale, caractérisée par le nombre  $G$ , est mise en évidence dans les phénomènes de torsion, plus faciles à observer directement que ceux de glissement simple. Supposer que les sections primitivement normales restent encore normales après la déformation, cela équivaut à négliger le glissement transversal, et par consé-

quent à laisser de côté (au moins en partie) les effets de la seconde élasticité. Une longue pratique a sanctionné cette manière d'opérer, et nous avons profité, dans la résolution des problèmes particuliers, de la simplification qui en résulte; mais pour établir la théorie générale, nous avons cru qu'il était préférable de ne rien négliger, et de tenir compte, par conséquent, de l'élasticité transversale. Les formules ainsi obtenues deviendront peut-être susceptibles, dans quelques occasions, de mieux s'accorder avec certains faits qui s'expliqueraient mal avec les anciennes hypothèses.

Ordinairement on suppose homogène la matière des corps que l'on considère, et en conséquence on leur attribue des coefficients d'élasticité invariables d'un point à un autre. Cela est sans doute très-plausible dans beaucoup de cas, et nous devons même convenir que dans les applications usuelles on sera toujours forcé de procéder ainsi, faute de données numériques suffisantes. Cependant il y a des matières pour lesquelles le défaut d'homogénéité ne saurait être nié : par exemple, quand on coule une pièce de fonte, les molécules extérieures qui sont en contact avec le moule se refroidissent plus vite que celles du centre, et prennent ainsi des qualités physiques toutes différentes. C'est pourquoi nous avons cru devoir introduire une autre généralisation dans les formules théoriques, en admettant que l'élasticité n'est pas la même en tous les points d'une pièce donnée. Il ne résulte de là, pour ainsi dire, aucune complication; seulement le centre de gravité et le moment d'inertie d'une section transversale doivent recevoir une définition un peu plus différente de celle qu'on donne en général.

Quant aux applications que nous avons faites de la théorie, nous nous bornerons à mentionner ici les problèmes sur les



poutres droites à deux ou plusieurs appuis ; les recherches sur la poussée, la déformation et la résistance des arcs circulaires à section constante, reposant sur deux appuis ; les problèmes sur les vibrations des poutres ; enfin les théories des systèmes articulés et de la poussée des terres. La Table des Matières suppléera suffisamment à ce que cet énoncé a d'incomplet. Dans tous les cas, nous nous sommes toujours attaché à simplifier autant que possible les formules principales, et, pour en faciliter les applications, nous avons construit diverses Tables numériques données à la fin du Cours.

Un Chapitre spécial a été consacré à l'exposé des résultats d'expériences sur l'élasticité et sur la résistance des principaux corps employés dans les constructions. On sait que beaucoup de personnes trouvent dans ces expériences une série de démentis formels donnés à la théorie ; d'où il résulterait naturellement que celle-ci ne devrait plus inspirer aucune espèce de confiance. A notre avis, c'est aller beaucoup trop loin. Les formules de la Résistance des Matériaux supposent essentiellement, entre autres choses, qu'il y a proportionnalité entre les forces et leurs effets : par exemple, on admet que si un certain poids suspendu à l'extrémité inférieure d'un prisme élastique vertical produit un allongement  $l$ , un poids double produirait dans les mêmes circonstances l'allongement double  $2l$ . Or cela est à très-peu près exact quand les tensions sont suffisamment faibles et ne dépassent pas les limites compatibles avec la stabilité. Mais quand la charge se rapproche de celle qui entraînerait la rupture, il n'en est plus de même : la proportionnalité dont nous parlons cesse complètement, et, par conséquent, il faut s'attendre à ce que les formules donnent des résultats contraires à ceux de l'expérience. Or ce sont précisément des faits de cet ordre que citent les détracteurs de la

théorie. La seule conclusion qu'on en puisse tirer, suivant nous, c'est qu'il faut se méfier des formules théoriques dans le cas où les corps supportent des charges trop considérables, et en particulier lorsqu'ils sont sur le point de se rompre. Mais lorsqu'au contraire les tensions ne dépassent point les limites ordinairement admises dans les constructions, les formules s'accordent assez bien avec les faits réels, comme le montrent diverses applications numériques citées dans notre Cours et les observations faites par plusieurs expérimentateurs habiles. Sous cette réserve, les Ingénieurs peuvent donc continuer à s'en servir.

En terminant, qu'il nous soit permis d'adresser nos remerciements à notre savant prédécesseur M. Belanger, qui a bien voulu nous fournir sur la poussée des terres un travail tout fait, résumant les parties principales d'un Mémoire plus étendu de M. le général Poncelet. Nous avons d'ailleurs un autre motif pour être reconnaissant envers lui : son cours de l'École des Ponts et Chaussées, que nous avons suivi comme élève, a été le point de départ de nos recherches personnelles, et si nous avons réussi parfois à étendre le domaine de la théorie, nous le devons sans doute en grande partie à la lucidité de son enseignement, qui nous a épargné au début toute hésitation et toute incertitude.

---

# TABLE DES MATIÈRES.

	Pages.
AVANT-PROPOS. ....	V

## PREMIÈRE PARTIE.

### RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX ET STABILITÉ DES CONSTRUCTIONS.

#### INTRODUCTION.

<i>Objet de la Résistance des Matériaux ; problèmes qu'elle doit résoudre.</i>	1
--	---

## CHAPITRE PREMIER.

### GÉNÉRALITÉS ; PRINCIPES FONDAMENTAUX. — RECHERCHE DES TENSIONS DANS LES DIVERSES PARTIES D'UN CORPS PRISMATIQUE.

§ 1. — <i>Digression sur la théorie des centres de gravité, moments d'inertie et centres de percussion des surfaces planes.</i> . . . . .	4
1. Définition du centre de gravité d'une surface plane, de son moment d'inertie et de son rayon de gyration relativement à un axe.	4
2. Loi de la variation des moments d'inertie d'une surface plane relativement à des axes parallèles ou concourants situés dans son plan. . . . .	5
3. Ellipse d'inertie ; ellipse centrale d'inertie ; axes principaux. . . . .	6
4. Équation de l'ellipse d'inertie ramenée à sa forme la plus simple.	8
5. Recherche des moments d'inertie par le calcul intégral. . . . .	9
6. Expressions toutes calculées des moments d'inertie de surfaces homogènes. . . . .	10
1°. Rectangle plein et homogène. . . . .	10
2°. Rectangle évidé homogène. . . . .	11
3°. Cercle plein ou couronne circulaire homogène. . . . .	12
4°. Ellipse pleine ou couronne elliptique homogène. . . . .	12



	Pages.
7. Centre de percussion d'une surface plane.....	13
8. Propriétés diverses du centre de percussion d'une surface plane.	14
9. Exemples de la recherche des centres de percussion.....	16
1°. Rectangle homogène tournant autour d'un de ses côtés.....	16
2°. Triangle homogène tournant autour d'un de ses côtés.....	16
3°. Trapèze tournant autour d'un des deux côtés non parallèles..	17
4°. Segment de cercle homogène tournant autour de sa corde...	17
5°. Segment elliptique homogène tournant autour de sa corde..	20
10. Recherche générale des centres de percussion par le calcul in- tégral.....	21
§ II. — <i>Des forces capables de produire sur un prisme une défor-     mation donnée ; tensions correspondantes dans les divers points.</i>	21
11. Définitions.....	21
12. Extension ou compression simples d'un prisme homogène....	22
13. Généralisation des notions précédentes pour un prisme hétéro- gène.....	23
14. Cas du glissement simple par translation de deux sections voi- sines. ....	24
15. Centre d'élasticité d'une section transversale.....	26
16. Cas de la flexion simple.....	26
17. Cas de la torsion simple.....	30
§ III. — <i>Problème inverse : Étant données les forces qui doivent     être équilibrées par les actions moléculaires dans une section     d'un prisme, trouver la tension par unité de surface en chaque     point</i> .....	32
18. Solution générale.....	32
19. Cas particulier des pièces droites chargées transversalement. ...	34
20. Solides d'égale résistance.....	35
§ IV. — <i>Développement de la solution générale du problème posé au     § III, pour le cas où les actions moléculaires se réduisent à une     force unique normale au plan de la section</i> .....	37
21. Expressions analytiques de la tension en chaque point.....	37
22. Remarques sur les signes à donner aux quantités algébriques entrant dans les formules précédentes.....	40
23. Lignes de niveau.....	41
24. Centre des tensions : axe neutre .....	41

25. L'allongement d'une fibre élémentaire est proportionnel à sa distance à l'axe neutre.....	42
26. Analogie du centre des tensions avec le centre de percussion..	42
27. Recherche générale du centre de pression d'une surface plane plongée dans un liquide pesant et homogène.....	44
28. Positions diverses de l'axe neutre quand le centre des tensions varie. Noyau central d'une section.....	44
EXEMPLES : 1°. Rectangle homogène.....	46
2°. Couronne circulaire ou cercle plein homogène.....	47
3°. Couronne elliptique comprise entre deux ellipses semblables ou ellipse pleine homogène.....	47
§ V. — Répartition d'une charge totale sur la base d'un prisme n'ayant pas d'adhérence avec son appui.....	48
29. Généralités. Deux cas à distinguer. Solution du premier cas...	48
30. Solution générale du deuxième cas.....	49
31. Tracé de la tangente à la courbe des centres de percussion relatifs à une série d'axes parallèles.....	51
32. Exemples simples de l'application de la théorie précédente....	53
1°. Rectangle homogène pressé par une force qui agit sur l'un des deux axes de symétrie.....	53
2°. Cercle homogène.....	55
Comparaison des résultats obtenus pour le rectangle et pour le cercle.....	57
3°. Ellipse pleine homogène.....	58
4°. Rectangle homogène pressé par une force agissant en dehors des axes de symétrie.....	58
§ VI. — Extension des théories précédentes à des corps non rigoureusement prismatiques.....	66
33. Forme d'une pièce droite ou courbe dans son état primitif. Fibre moyenne. Fibre élémentaire.....	66
34. Conséquence de la définition d'une pièce.....	67
35. Détermination de la tension en un point quelconque de la pièce quand toutes les forces extérieures sont connues.....	68
36. Observation sur l'étendue de la déformation.....	68
37. Usage de la courbe des pressions pour avoir la tension d'un élément quelconque de fibre.....	70
38. Restrictions que doit éprouver la théorie générale dans certains cas exceptionnels.....	72
39. Exemple numérique de la détermination des tensions.....	73

## CHAPITRE II.

FORMULES GÉNÉRALES POUR DÉTERMINER LA DÉFORMATION D'UNE PIÈCE DROITE OU COURBE  
SOUS L'ACTION DE FORCES DONNÉES. — RECHERCHE DES FORCES INCONNUES. — THEO-  
RÈMES SUR LA COMPOSITION DES EFFETS DUS À DIVERSES CAUSES. — MOUVEMENTS  
VIBRATOIRES DES PIÈCES ÉLASTIQUES.

	Pages.
§ I. — <i>Calcul de la déformation d'une pièce sous l'action de forces connues.</i> . . . . .	80
40. Lemme relatif aux déplacements des différents points d'un sys- tème invariable. . . . .	80
41. Réduction du problème qui fait l'objet de ce paragraphe à une composition de mouvements. . . . .	81
42. Formules générales pour calculer les variations des coordonnées d'un point quelconque de la fibre moyenne. . . . .	83
43. Déplacements produits par la température et le calage. . . . .	86
44. Formules spéciales pour le cas où la fibre moyenne est primiti- vement dans un plan contenant les forces extérieures. . . . .	88
45. Conditions à remplir pour que la déformation d'une pièce à fibre moyenne plane s'opère dans le plan de cette même fibre. . . . .	89
46. Déviation des sections normales de la pièce. . . . .	90
47. Formules de la déformation, spéciales pour les poutres droites. . . . .	92
48. Du sens positif à attribuer aux couples $V$ , $X$ dans les formules précédentes. . . . .	94
49. Détermination des constantes qui représentent le mouvement de la section prise pour point de départ. . . . .	94
50. Remarque sur la position définitive des sections normales. . . . .	98
51. Construction géométrique approximative de la fibre moyenne déformée. . . . .	98
52. Observation au sujet de l'effort tranchant dans une section quel- conque. . . . .	99
§ II. — <i>Recherche des forces inconnues.</i> . . . . .	99
53. Indications succinctes sur la nature des questions à résoudre. . . . .	99
54. PREMIER CAS. Pièce non symétrique reposant sur deux appuis fixes. . . . .	101
55. DEUXIÈME CAS. Pièce symétrique et symétriquement chargée. . . . .	103
56. TROISIÈME CAS. Pièce soutenue par un plan sans obstacle direct à l'allongement de la corde. . . . .	104
57. QUATRIÈME CAS. Pièce encastree à ses deux extrémités. . . . .	105
58. CINQUIÈME CAS. Pièce munie d'un tirant parallèle à la corde et reposant simplement sur deux appuis. . . . .	107
59. Analyse sommaire d'un cas général. . . . .	109

§ III. — <i>Remarques et théorèmes concernant la manière dont les forces extérieures entrent dans les formules qui font connaître la déformation d'une pièce. Conséquences.....</i>	111
60. Expression des quantités $N$ , $P$ , $V$ , $X$ en fonction des forces....	111
61. Expression en fonction des forces et du coefficient $\tau$ , des six constantes $\Delta x_0$ , $\Delta y_0$ , $\Delta z_0$ , $m_0$ , $n_0$ , $p_0$ , qui déterminent le mouvement de la section initiale.....	113
62. Expression en fonction des forces et du coefficient $\tau$ , des six quantités $\Delta x_1$ , $\Delta y_1$ , $\Delta z_1$ , $m_1$ , $n_1$ , $p_1$ , qui déterminent le mouvement d'une section quelconque.....	113
63. Expression des forces inconnues en fonction des forces données. Conséquence relative aux éléments de la déformation.....	114
64. Autre énoncé des propriétés établies au n° 63.....	116
65. Forces équivalentes.....	117
66. Propriété des arcs symétriques, mais non symétriquement chargés.....	118
67. Application du théorème général démontré au n° 66.....	120
§ IV. — <i>Des mouvements vibratoires dans les pièces élastiques.....</i>	122
68. Principes généraux servant à la mise en équation des mouvements vibratoires.....	122

## CHAPITRE III.

## PROBLÈMES DIVERS CONCERNANT LES POUTRES DROITES.

§ I. — <i>Poutres droites, à section constante, reposant sur deux appuis et chargées transversalement.....</i>	129
69. Conditions générales à remplir par les poutres considérées dans ce paragraphe.....	129
70. Poutre reposant sur deux appuis simples.....	129
71. Poutre droite encastree à ses deux extrémités.....	133
72. Poutre droite encastree à une extrémité et appuyée à l'autre. Recherche de la réaction des appuis.....	136
73. Suite du problème de la poutre encastree à une de ses extrémités et appuyée à l'autre. Figure de la fibre moyenne déformée. Loi suivant laquelle varient le moment fléchissant et l'effort tranchant.....	138
§ II. — <i>Poutres droites reposant sur plus de deux appuis et chargées perpendiculairement à la fibre moyenne.....</i>	143
74. Généralités; position de la question.....	143
I. <span style="float: right;">b</span>	

	Pages.
75. Calcul direct des moments fléchissants pour les sections faites au-dessus des points d'appui.....	145
76. Détermination du moment fléchissant et de l'effort tranchant, pour une section quelconque; réactions des appuis.....	148
77. Application de la théorie précédente.....	149
78. Effet de la charge d'une travée sur une travée éloignée.....	151
79. Limites du moment fléchissant dans une poutre à trois travées égales.....	156
Effet spécial de la charge permanente.....	157
Effet spécial de la surcharge.....	159
Effet de la charge permanente et de la surcharge agissant simultanément.....	165
80. Limite de l'effort tranchant dans chaque section d'une poutre à trois travées égales.....	170
81. Formules pour le calcul des limites $X'$ et $P'$ dans une poutre à trois travées symétriques, mais non égales.....	175
82. Formules pour le calcul des limites $X'$ et $P'$ dans une poutre à deux ou à quatre travées égales. ....	177
83. Du rapport le plus convenable entre l'ouverture des travées de rive et celle de la travée centrale dans une poutre reposant sur quatre appuis.....	180
84. Même question pour une poutre à un nombre quelconque de travées.....	189
§ III. — <i>Observations sur la vérification de la stabilité et sur le calcul des dimensions d'une poutre chargée transversalement.....</i>	191
85. Vérification de la stabilité.....	191
PREMIER CAS. Section constante et symétrique relativement à l'axe de flexion.....	192
DEUXIÈME CAS. Section constante, mais non symétrique relativement à l'axe de flexion.....	193
TROISIÈME CAS. Section variable.....	194
86. Calcul des dimensions nécessaires pour résister à des charges données. ....	195
87. Influence de la forme attribuée à la section transversale d'une poutre.....	198
88. Du glissement longitudinal des fibres les unes sur les autres...	201
§ IV. — <i>Des pièces droites chargées debout.....</i>	205
89. Prisme vertical chargé d'un poids agissant suivant son axe....	205



90. Prisme vertical chargé suivant son axe et encastré à ses deux extrémités.....	215
91. Prisme vertical encastré à une extrémité et sollicité à l'autre par une force oblique et un couple.....	217

## CHAPITRE IV.

CALCUL DE LA POUSSÉE EXERCÉE PAR UN ARC REPOSANT SUR DEUX APPUIS FIXES, LORSQUE LA SECTION EST CONSTANTE ET QUE LA FIBRE MOYENNE, PRIMITIVEMENT CIRCULAIRE, SE DÉFORME EN RESTANT DANS UN MÊME PLAN VERTICAL.

§ I. — *Poussée due à une force isolée, horizontale ou verticale, à un couple et à une dilatation linéaire indépendante des charges.* 220

92. Des questions qui doivent être traitées dans ce chapitre..... 220

93. Notations principales de ce chapitre..... 220

94. Poussée produite par un poids isolé..... 221

95. Poussée produite par une force horizontale..... 223

96. Poussée due à l'action d'un couple..... 225

97. Poussée due à la dilatation résultant de causes indépendantes des charges..... 227

§ II. — *Recherche de la poussée produite par des forces quelconques et par la dilatation.*..... 228

98. Cas d'un arc soumis à des forces discontinues quelconques et à une dilatation produite par d'autres causes..... 228

99. Cas où il existe des forces réparties d'une manière continue... 228

100. PREMIER EXEMPLE. Poussée produite par le poids de l'arc ou par un poids uniformément réparti sur une certaine portion de sa longueur..... 230

101. DEUXIÈME EXEMPLE. — Poussée produite par une charge uniformément répartie suivant l'horizontale..... 232

§ III. — *Détails sur la détermination de la poussée produite par des poids et par une dilatation indépendante des charges.*..... 233

102. Remarques préliminaires au sujet de la formule (1) du n° 94.. 233

103. Tables faisant connaître la partie principale de la poussée due à un poids isolé..... 235

104. Du coefficient de correction  $1 - \lambda \frac{r^2}{a^2}$ ..... 237

105. Du coefficient de correction  $\frac{1}{1 + \lambda' \frac{r^2}{a^2}}$ ..... 240

	Pages
106. Table donnant en bloc la valeur du coefficient de correction	
$\frac{1 - \lambda \frac{r^2}{a^2}}{1 + \lambda' \frac{r^2}{a^2}}$	243
107. Table pour le calcul de la formule qui donne la poussée due à une dilatation indépendante des charges; simplification de cette formule, . . . . .	243
108. Table pour le calcul des formules qui donnent les poussées dues à des poids uniformément répartis sur la longueur entière de la fibre moyenne ou de sa corde; simplification de ces formules. . . . .	249
109. Comparaison de la poussée produite par un poids uniformément réparti sur la longueur entière de la fibre moyenne avec celle que produirait le même poids total uniformément réparti suivant la corde. . . . .	251
110. Comparaison de la poussée avec la tension horizontale d'un câble de pont suspendu. . . . .	252
111. Exemples de la détermination d'une poussée au moyen des tables. . . . .	252

## CHAPITRE V.

### SOLUTION DE DIVERSES QUESTIONS CONCERNANT LES PIÈCES A FIBRE MOYENNE CIRCULAIRE ET A SECTION CONSTANTE.

§ I. — <i>Calcul de la variation de flèche dans certaines circonstances.</i>	259
112. Observations préliminaires. . . . .	259
113. Variation de flèche produite par un poids uniformément réparti suivant la longueur entière de l'arc. . . . .	259
114. Variation de flèche produite par un poids uniformément réparti suivant la longueur entière de la corde. . . . .	264
115. Application numérique des formules (1) et (2). . . . .	268
116. Accroissement de flèche produit par une dilatation linéaire indépendante des charges. . . . .	269
117. Applications numériques de la formule (4). . . . .	274
§ II. — <i>Pression maximum produite par un poids uniformément réparti suivant la corde entière et par les dilatations linéaires indépendantes des charges.</i> . . . .	275
118. Préliminaires. . . . .	275



119. Maximum de la pression longitudinale par unité de surface donnée.....	277
120. Signes que prend le moment $X$ .....	278
121. Pression maximum dans toute l'étendue de la pièce quand le rapport $n$ est plus grand que $\frac{1}{2} \cotang \varphi$ .....	281
122. Pression maximum quand $n$ est inférieur à $\frac{1}{2} \cotang \varphi$ .....	286
123. Remarque sur le cas d'une section transversale homogène...	286
124. Pression maximum produite par la seule existence d'une dilatation indépendante des charges.....	287
Exemple numérique.....	288
§ III. — <i>Construction, disposition et usage de la table V, destinée à faciliter l'emploi des formules du paragraphe précédent</i> .....	288
125. But de la table; arguments pour $y$ entrer.....	288
126. Disposition et emploi de la table.....	290
127. Limites de la table.....	293
128. Exemple du calcul de la résistance d'un arc de pont sous la charge d'épreuve.....	295
§ IV. — <i>Des circonstances qui peuvent influencer sur la résistance d'un arc à section constante, chargé uniformément suivant l'horizontale. — Vérification de la stabilité sous la charge d'épreuve.</i>	297
129. Généralités.....	297
130. Influence du demi-angle au centre de la fibre moyenne, ou du rapport entre la flèche et l'ouverture.....	298
131. Influences spéciales de la hauteur de la section transversale et de son rayon de gyration.....	300
132. Influence des variations de forme de la section transversale, en général.....	300
133. Réflexions sur les exemples qui précèdent.....	303
134. Vérification de la stabilité sous la charge d'épreuve.....	306
§ V. — <i>Résistance des vases cylindriques soumis à la pression uniforme d'un gaz; épaisseur qu'il convient de donner aux parois d'une chaudière à vapeur</i> .....	306
135. Résistance d'une chaudière à profil exactement circulaire....	306
136. Résistance d'une chaudière à profil légèrement elliptique....	309
Calcul de la déformation du profil elliptique.....	314
Application numérique.....	317
Conclusion.....	318

## CHAPITRE VI.

## PROBLÈMES PARTICULIERS SUR LES POUTRES VIBRANTES.

	Pages.
137. Observations préliminaires. ....	319
138. Équation du mouvement vibratoire d'un prisme vertical homogène supportant un poids à son extrémité. ....	319
139. Oscillations d'un prisme vertical et homogène sous la seule action de son poids. ....	324
140. Oscillation d'un corps pesant suspendu à l'extrémité d'un prisme vertical, homogène et de très-faible masse. ....	330
141. Cas particulier du problème précédent. ....	333
142. Mouvement vibratoire d'un corps pesant suspendu à l'extrémité d'un prisme vertical et homogène quand la masse de ce prisme n'est pas négligeable. ....	334
143. Vibrations transversales d'une poutre homogène uniformément chargée et reposant sur deux appuis simples. ....	340
144. Cas particulier de la question traitée au n° 143. ....	348
145. Effet produit sur une poutre par une charge roulante. ....	353

## CHAPITRE VII.

## RESULTATS D'EXPÉRIENCES SUR L'ÉLASTICITÉ DES MATÉRIAUX.

§ I. — <i>Extension</i> . ....	365
146. Précautions à prendre dans les expériences. ....	365
147. Expériences sur l'extension du fer. ....	366
148. Remarques sur les résultats précédents. Limites dans lesquelles on peut appliquer la Résistance des Matériaux. ....	369
149. Expériences sur l'extension de la fonte. ....	371
150. Expériences sur l'extension des bois. ....	372
151. Résistance de diverses matières à l'extension ; limites pratiques de la tension longitudinale par unité de surface. ....	373
§ II. — <i>Compression</i> . ....	375
152. Élasticité longitudinale du fer et de la fonte comprimés. ....	375
153. Généralités sur la rupture par compression ; deux cas à distinguer. PREMIER CAS. ....	375
154. DEUXIÈME CAS : Rupture par compression des prismes qui peuvent fléchir. ....	377
155. Limites pratiques des efforts de compression permanente. ....	381



§ III. — <i>Glissement transversal ; glissement longitudinal des fibres dans les pièces de bois</i> .....	381
156. Difficulté de procéder à une mesure directe de l'élasticité transversale ; comment on peut l'évaluer indirectement.....	381
157. Résistance transversale.....	383
158. Limites pratiques des tensions transversales.....	385
159. Résistance au glissement longitudinal des fibres.....	387
§ IV. — <i>Expériences sur la flexion et sur les effets d'une charge en mouvement</i> .....	387
160. Vérification expérimentale de diverses notions théoriques relatives à la flexion des pièces droites chargées transversalement.	387
161. Résistance à la rupture par flexion.....	390
162. Effet d'une charge en mouvement et des vibrations en général.	391

## CHAPITRE VIII.

## ÉQUILIBRE DES SYSTÈMES ARTICULÉS SANS FROTTEMENT.

§ I. — <i>Systèmes articulés simples</i> .....	396
163. Définitions. Propriétés caractéristiques des articulations sans frottement.....	396
164. Équilibre d'un corps solide articulé en deux points fixes.....	398
165. Équilibre d'un système polygonal articulé.....	400
166. Équilibre d'un système dont les articulations sont infiniment rapprochées.....	404
167. Forme d'équilibre d'un système articulé.....	405
168. Exemples particuliers du problème précédent.....	406
169. Forme d'équilibre dans le cas d'articulations infiniment rapprochées.....	407
170. Exemple particulier d'un système dont les articulations sont infiniment rapprochées ; système supportant une charge d'eau.	410
171. Application des formes d'équilibre de systèmes articulés à la construction de pièces rigides.....	413
§ II. — <i>Systèmes articulés complexes</i> .....	414
172. Des systèmes articulés complexes.....	414
173. Charpente composée de deux arbalétriers simples, deux contre-fiches, tirant et poinçon.....	415
174. Ferme de charpente en fer à grande portée.....	418
175. Autre système de charpente en fer.....	422
176. Poutres en treillis.....	425



## CHAPITRE IX.

## DE LA POUSSEE DES TERRES ET DE LA STABILITE DES MATERIAUX.

	Pages.
§ I. — <i>De la poussée des terres</i> .....	430
177. Hypothèse sur le frottement et la cohésion des terres.....	430
178. PREMIER PROBLÈME.....	431
179. DEUXIÈME PROBLÈME.....	434
180. Détermination de la poussée totale d'un massif de terre dans un cas particulier.....	435
181. Détermination du plan de rupture et de la poussée totale en négligeant la cohésion.....	437
182. Plan de rupture et poussée totale quand on néglige la cohésion et le frottement entre les terres et le mur qui les soutient....	443
183. Répartition de la poussée totale sur le mur dans l'hypothèse d'un terrain à profil rectiligne ; indications succinctes sur le cas général.....	444
184. De la butée des terres.....	445
§ II. — <i>De la stabilité des maçonneries</i> .....	448
185. Généralités.....	448
186. Stabilité d'un mur de soutènement.....	450

---

RECUEIL DE TABLES NUMÉRIQUES pour faciliter divers calculs sur la Résistance des Matériaux.....	451
--	-----

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

# COURS

DE

## MÉCANIQUE APPLIQUÉE,

PROFESSÉ

A L'ÉCOLE IMPÉRIALE DES PONTS ET CHAUSSEES.

---

### PREMIÈRE PARTIE.

RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX ET STABILITÉ DES CONSTRUCTIONS.

---

#### INTRODUCTION.

---

*Objet de la Résistance des Matériaux ; problèmes qu'elle doit résoudre.* — La Résistance des Matériaux est une science qui touche en même temps à la Physique et à la Mécanique : à la première elle emprunte diverses notions sur la constitution intime des corps, à la seconde les lois et propriétés de l'équilibre ou du mouvement. Son objet est assez bien indiqué par son nom même : tout le monde sait que les corps naturels, même ceux dont la ténacité paraît considérable, sont susceptibles d'être brisés ou divisés en plusieurs parties, lorsqu'on leur applique des forces suffisamment grandes. Une pièce de bois ou de métal, un massif de maçonnerie, par exemple, sont susceptibles de se rompre par extension ou par écrasement, ou de toute autre manière, quand les charges qu'ils ont à supporter dépassent une certaine limite. La Résistance des Matériaux a pour but de vérifier à priori, par le calcul, si un tel accident doit se produire, immédiatement ou après un temps plus ou moins long, dans des circonstances données.

I.

Mais ce problème est complexe : supposons d'abord qu'on en ait trouvé la solution pour le cas où l'on connaît toutes les forces extérieures qui sollicitent l'un des corps dont on veut vérifier la résistance. Il y aura des cas où cette solution sera insuffisante. Pour en donner un exemple très-simple, considérons une pièce de bois horizontale qui repose sur deux appuis fixes et qui est chargée de poids dans l'intervalle. Cet exemple ne rentrera pas immédiatement dans le cas général qu'on vient de définir, car toutes les forces extérieures ne sont pas données, les réactions des appuis fixes devant être déterminées par le calcul. A la vérité le calcul est ici extrêmement facile, et les notions élémentaires de la statique des corps solides suffisent pour l'effectuer ; mais il n'en est pas toujours de même : c'est ce qui arrive, par exemple, quand au lieu de deux appuis il en existe trois en ligne droite. La statique des corps solides ne peut alors fournir que deux équations entre les trois réactions inconnues, et le problème envisagé de cette manière est indéterminé.

On conçoit bien à priori qu'il doit y avoir une infinité de systèmes de trois réactions exercées par les appuis qui peuvent faire équilibre aux charges données. En effet, imaginons d'abord qu'on supprime l'appui intermédiaire : alors les réactions des deux autres sont connues par la statique élémentaire, et celle du milieu est nulle. Les mêmes valeurs se conserveront si l'on met l'appui supprimé en contact avec la pièce, mais sans les presser l'un contre l'autre. Cela fait, on pourra augmenter progressivement le serrage de cet appui contre la pièce, et par suite sa réaction, sans que l'équilibre soit troublé : c'est là une proposition dont la vérité résulte clairement pour nous de l'expérience acquise. Or cette pression exercée au milieu de la pièce est arbitraire dans certaines limites, et d'un autre côté elle ne peut varier sans entraîner une variation correspondante dans les réactions des appuis extrêmes : on aura donc tant de systèmes de valeurs qu'on voudra pour les réactions inconnues, en satisfaisant toujours aux conditions d'équilibre de la statique élémentaire, de sorte qu'on ne peut savoir ainsi quel est celui qui existe réellement.

Cependant ces systèmes peuvent se distinguer les uns des

autres par une circonstance particulière, celle de la flèche plus ou moins grande qui se produit dans la pièce vers l'appui du milieu, laquelle flèche diminue à mesure que la réaction augmente. Si l'on indique parmi les données du problème, que les trois appuis sont au même niveau, la valeur de la réaction intermédiaire sera celle d'une force qui, appliquée au même point, annulerait la flèche produite par la suppression de l'appui correspondant. Il est donc possible de faire cesser l'indétermination reconnue tout à l'heure : mais pour cela il faut tenir compte des déformations que les charges produisent dans la pièce. D'ailleurs le calcul de ces déformations peut avoir souvent de l'intérêt par lui-même, indépendamment de l'application qui vient d'être signalée.

Les explications précédentes suffisent pour faire comprendre qu'il se présente généralement dans l'étude de la résistance des matériaux trois problèmes principaux, intimement liés les uns aux autres, et qu'on peut énoncer ainsi :

PROBLÈME I. — *Connaissant toutes les forces extérieures qui sollicitent un corps, trouver l'intensité des forces moléculaires qui se développent en chaque point, et desquelles dépend soit la conservation, soit la rupture de ce corps.*

PROBLÈME II. — *Les forces extérieures étant encore données, calculer le changement qu'elles apportent dans la forme et les dimensions du corps qu'elles sollicitent.*

PROBLÈME III. — *Parmi les forces extérieures déterminer celles qui ne sont point données à priori et qui proviennent des liaisons du corps considéré avec d'autres corps.*

Avant d'aborder l'étude de ces trois problèmes généraux dans les limites que nous impose l'état actuel de la science, nous commencerons par exposer, à titre de digression, une série de notions purement géométriques qui seront utiles par la suite, et qui se rapportent aux centres de gravité, moments d'inertie et centres de percussion des surfaces planes.

---

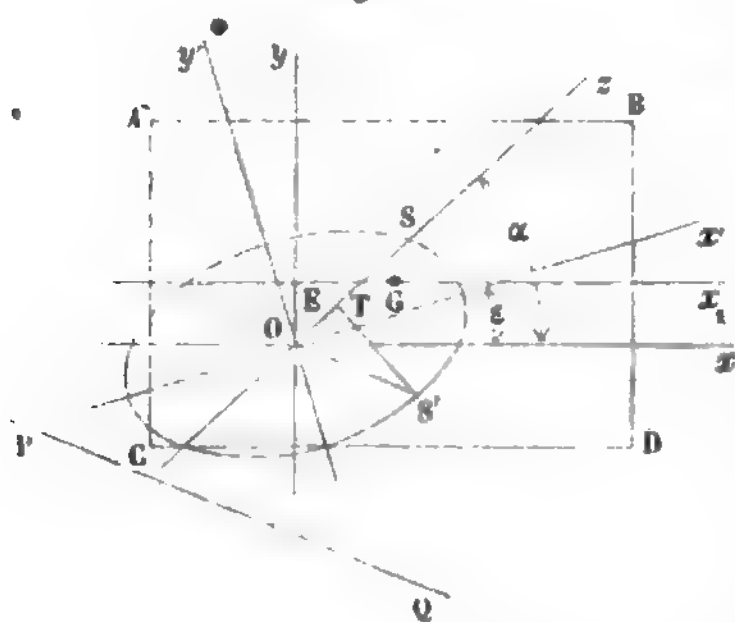
## CHAPITRE PREMIER.

GÉNÉRALITÉS; PRINCIPES FONDAMENTAUX. — RECHERCHE DES TENSIONS  
DANS LES DIVERSES PARTIES D'UN CORPS PRISMATIQUE.

§ I<sup>er</sup>. — Digression sur la théorie des centres de gravité, moments d'inertie et centres de percussion des surfaces planes.

1. *Définition du centre de gravité d'une surface plane, de son moment d'inertie et de son rayon de gyration relativement à un axe.* — Supposons une surface plane ABCD (fig. 1), et

Fig. 1.



imaginons qu'elle soit décomposée en éléments superficiels  $\omega$ . Appelons :

$x, y$  les ordonnées d'un point renfermé dans l'aire infiniment petite  $\omega$ , par rapport à deux axes coordonnés  $Ox, Oy$ ;

$u$  la distance de ce même point à une ligne quelconque,  $PQ$  par exemple;

$E$  un nombre déterminé en fonction de  $x$  et de  $y$ , lequel peut être constant et variable;

$\Sigma$  une somme étendue à tous les éléments  $\omega$ .

Conformément aux définitions données dans la Mécanique rationnelle, nous appellerons centre de gravité de la surface le point  $G$  dont les coordonnées  $x_1, y_1$  satisferaient aux relations

$$x_1 \Sigma E \omega = \Sigma E x \omega,$$

$$y_1 \Sigma E \omega = \Sigma E y \omega.$$

Le point  $G$  est indépendant du choix des axes. Pour justifier le nom qu'on lui a donné, il faut concevoir que la surface soit



matérialisée, qu'elle ait pris une épaisseur extrêmement petite, et que le nombre  $E$  soit en quelque sorte la masse de l'élément  $\omega$  rapportée à l'unité superficielle, ou plus simplement, si l'on veut, sa densité. Le centre de gravité de la surface ne sera donc autre chose que celui d'un corps dont la masse totale aurait pour valeur  $\Sigma E\omega$ .

Une extension analogue a lieu pour les moments d'inertie. Le moment d'inertie de la surface ABCD relativement à l'axe PQ sera, par définition, celui du corps matériel que nous substituons à la surface: il aura pour expression analytique,

$$\Sigma Eu^2\omega.$$

Enfin, le rayon de gyration  $r$  relatif au même axe devra satisfaire à l'équation

$$r^2 \Sigma E\omega = \Sigma Eu^2\omega.$$

Les définitions que nous venons de donner, d'après les traités de Mécanique rationnelle, diffèrent un peu de celles qu'on admet dans les traités de Résistance des Matériaux. Pour les rendre identiques, il suffirait de supposer  $E$  constant et égal à 1. La généralisation que l'on fait ici est nécessaire pour mettre les formules d'accord avec certains faits observés dont il sera question plus loin; elle est d'ailleurs tellement simple, qu'il n'y aurait pas d'utilité à adopter des dénominations nouvelles.

Les propriétés des moments d'inertie qui vont être rappelées sont une conséquence immédiate, ou, si l'on veut, un cas particulier de celles qui appartiennent en général aux moments d'inertie des corps matériels; c'est pourquoi elles seront énoncées sans démonstration.

**2. Loi de la variation des moments d'inertie d'une surface plane, relativement à des axes parallèles ou concourants situés dans son plan.** — Le moment d'inertie d'une surface plane, relativement à un axe quelconque, est égal au moment d'inertie de la même surface relativement à l'axe parallèle passant au centre de gravité, augmenté du produit de la masse totale de la surface par le carré de la distance des deux axes.

Soient, par exemple, la surface ABCD (*fig. 1*);

G le centre de gravité;

Ox et Gx<sub>1</sub> deux lignes parallèles dont l'une contient le point G, et qui sont séparées par la distance  $k$ ;

$y, y_1$  les distances respectives d'un élément superficiel à ces deux axes;

$r, r_1$  les rayons de gyration de ABCD relativement à Ox et Gx<sub>1</sub>.

En conservant les autres notations du n° 1, on aura

$$\Sigma E\omega y^2 = \Sigma E\omega y_1^2 + k^2 \Sigma E\omega,$$

ou bien, par suite de la définition du rayon de gyration,

$$r^2 \Sigma E\omega = r_1^2 \Sigma E\omega + k^2 \Sigma E\omega,$$

c'est-à-dire

$$r^2 = r_1^2 + k^2,$$

équation dont l'énoncé en langage ordinaire remplace quelquefois celui que nous avons donné ci-dessus.

Supposons maintenant qu'on cherche les moments d'inertie de la même surface ABCD relativement à divers axes situés dans son plan et passant par un même point O, tels que Oz; puis que sur chacun d'eux on porte une longueur  $\overline{OS}$  qui soit en raison inverse du rayon de gyration correspondant; le lieu des points S ainsi obtenus sera une ellipse ayant le point O pour centre: propriété remarquable qui donne une idée de la manière dont varient les moments d'inertie de la surface autour des axes qui concourent en O. Nous allons donner quelques développements sur cette loi de variation, pour la faire connaître plus complètement.

**3. Ellipse d'inertie; ellipse centrale d'inertie; axes principaux.** — L'ellipse dont nous venons de parler est ce que nous appellerons l'*ellipse d'inertie* de la surface pour le point O; si le point O se confond avec le centre de gravité G de la surface, nous emploierons la désignation d'*ellipse centrale d'inertie*. Les axes principaux de l'ellipse correspondant à un point sont dits *axes principaux d'inertie* de la surface en ce point.

La détermination des axes principaux pour le point O peut

être effectuée ainsi qu'il suit. Ayant tracé par ce point et dans le plan ABCD trois axes  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ , dont les deux premiers se coupent à angle droit, tandis que le troisième fait l'angle  $\alpha$  avec  $Ox$ , nous appellerons :

$\omega$  l'un quelconque des éléments superficiels, répondant aux coordonnées  $x$  et  $y$ , et ayant une densité  $E$ ;

$A = \sum E y^2 \omega$ ,  $B = \sum E x^2 \omega$ ,  $C = \sum E xy \omega$ , trois sommes dont les deux premières sont les moments d'inertie de la surface relativement aux axes des  $x$  et des  $y$ ;

$\mu$  le moment d'inertie de cette même surface par rapport à  $Oz$ .

Nous aurons alors

$$\mu = A \cos^2 \alpha + B \sin^2 \alpha - 2 C \sin \alpha \cos \alpha;$$

et si nous prenons  $\overline{OS} = \frac{D}{\sqrt{\mu}}$ ,  $D$  étant une constante dont nous

fixerons la valeur ultérieurement, le lieu des points  $S$ , c'est-à-dire l'ellipse d'inertie, aura pour équation

$$A x^2 + B y^2 - 2 C xy = D^2.$$

Pour en avoir les axes principaux, il suffira, conformément à ce que l'on enseigne dans la Géométrie analytique, de prendre des axes  $Ox'$ ,  $Oy'$  obtenus en faisant tourner le système  $yOx$ , dans le sens de  $x$  vers  $y$ , d'un angle  $\varepsilon$  déterminé par la condition

$$\tan 2\varepsilon = \frac{2C}{B-A}.$$

Si l'on rapporte l'équation de l'ellipse aux axes des coordonnées  $Ox'$  et  $Oy'$  le double rectangle disparaît et l'équation se réduit à

$$(1) \quad A' x'^2 + B' y'^2 = D^2,$$

$A'$  et  $B'$  étant déterminés par les relations

$$A' + B' = A + B, \quad B' - A' = \frac{B - A}{\cos 2\varepsilon}.$$

Dans certains cas, les axes principaux en un point sont connus à priori et sans aucun calcul. Ainsi l'on démontre que toute

ligne de symétrie est un axe principal dans tout son cours, en admettant, bien entendu, que la symétrie existe non-seulement quant à la figure, mais aussi dans la distribution des masses; toute perpendiculaire à une ligne de symétrie est axe principal en son point de rencontre avec cette ligne; enfin, toute ligne qui est axe principal et qui passe par le centre de gravité, est axe principal dans tous les points de son cours.

Lorsque les axes principaux coïncident avec les axes coordonnés, le double rectangle  $2Cxy$  disparaît de l'équation de l'ellipse d'inertie, comme nous l'avons déjà remarqué. On doit donc avoir

$$\Sigma Exy\omega = 0,$$

relation qui peut servir à caractériser les axes principaux; car, si elle est satisfaite, on voit que, réciproquement, le terme en  $xy$  manquera dans l'équation de l'ellipse, ce qui ne peut avoir lieu, les axes coordonnés étant rectangulaires, que lorsqu'ils sont en même temps diamètres principaux.

4. *Équation de l'ellipse d'inertie ramenée à sa forme la plus simple.* — Les lettres  $A'$  et  $B'$ , définies au n° 3, ont pour les nouveaux axes  $Ox'$ ,  $Oy'$  le même sens que  $A$  et  $B$  pour  $Ox$ ,  $Oy$ ; elles représentent donc respectivement les moments d'inertie de la surface par rapport aux axes des  $x'$  et des  $y'$ , soit  $\Sigma Ey'^2\omega$  et  $\Sigma Ex'^2\omega$ . Appelons  $a$  et  $b$  les rayons de gyration correspondants, lesquels sont déterminés par les relations

$$\begin{aligned} a^2 \Sigma E\omega &= \Sigma Ey'^2\omega = A', \\ b^2 \Sigma E\omega &= \Sigma Ex'^2\omega = B', \end{aligned}$$

et posons en outre, pour fixer la valeur de la constante  $D$ ,

$$D^2 = a^2 b^2 \Sigma E\omega;$$

alors l'équation (1) du n° 3 se réduit à

$$\frac{x'^2}{b^2} + \frac{y'^2}{a^2} = 1.$$

Le moment d'inertie  $\mu$ , par rapport à  $Oz$ , étant exprimé par  $\frac{D^2}{OS}$ , puisque  $OS = \frac{D}{\sqrt{\mu}}$  (n° 3), on aura aussi  $\mu = \frac{a^2 b^2}{OS^2} \Sigma E\omega$ ,

c'est-à-dire que le rayon de gyration correspondant sera  $\frac{ab}{OS}$ .

Ou bien encore, en désignant par  $p$  le demi-diamètre  $OS$ ,  $p'$  le demi-diamètre conjugué  $OS'$ ,  $\theta$  l'angle  $SOS'$ , en vertu de la relation connue  $ab = pp' \sin \theta$ , on aura le rayon de gyration

$$r = \sqrt{\frac{\mu}{\Sigma E_{\omega}}} = \frac{ab}{p} = p' \sin \theta;$$

$r$  ne sera autre chose que la perpendiculaire  $\overline{S'T}$  abaissée du point  $S'$  sur  $OS$ ; ou bien, en d'autres termes, la surface pourrait être condensée, sans altérer son moment d'inertie relativement à l'axe  $OU$ , à l'extrémité  $S'$  du diamètre  $OS'$  conjugué de  $OU$  dans l'ellipse d'inertie (\*).

### §. Recherche des moments d'inertie par le calcul intégral.

— Un axe quelconque étant tracé dans une surface plane, prenons-le pour axe des  $x$ , et traçons une perpendiculaire qui sera l'axe des  $y$ . Si l'on décompose la surface en portions infiniment petites par des parallèles aux deux axes, et qu'on appelle, comme ci-dessus,  $E$  la masse rapportée à l'unité superficielle pour un élément quelconque, le moment d'inertie de la surface relativement à l'axe des  $x$  sera exprimé analytiquement par  $\iint Ey^2 dx dy$ , l'intégrale devant être étendue à tous les points de la surface. Le rayon de gyration correspondant  $r$  sera déduit de la relation

$$r^2 \iint E dx dy = \iint Ey^2 dx dy.$$

Pour que le problème soit défini,  $E$  doit être connu en fonction de  $x$  et de  $y$ , et l'on doit connaître aussi la forme du périmètre; dès lors la recherche dont il s'agit se réduit à une diffi-

---

(\*) Cette propriété entraîne une conséquence assez curieuse. Si l'on fait varier le point  $O$  sur une même droite  $OU$ , le lieu des points  $S'$ , extrémités des diamètres conjugués de  $OU$  dans les diverses ellipses d'inertie qu'on obtiendra ainsi, sera une ligne droite. Cela est évident, puisque la distance  $\overline{S'T}$  est un rayon de gyration indépendant de la position occupée par le point  $O$ .



culté d'analyse, qui peut toujours être surmontée, au besoin, par les procédés d'approximation connus.

S'il s'agit d'un axe perpendiculaire au plan de la surface, en le prenant pour l'axe des  $z$  et laissant les  $x$  et les  $y$  comme ci-dessus, le moment d'inertie sera exprimé par l'intégrale double

$$\iint E (x^2 + y^2) dx dy \text{ ou par } \iint E y^2 dx dy + \iint E x^2 dx dy,$$

ce qui ramène très-simplement ce cas au précédent. On voit, en effet, qu'il suffit de faire la somme des deux moments d'inertie de la surface relativement à deux axes rectangulaires quelconques situés dans son plan et se coupant au point où elle est rencontrée par l'axe donné. Le carré du rayon de gyration correspondant serait la somme des carrés de deux demi-diamètres rectangulaires de l'ellipse d'inertie ayant pour centre le susdit point de concours : on pourrait choisir, par exemple, les deux demi-diamètres principaux.

Quand l'intégration rigoureuse sera impossible ou trop difficile, on fera usage des méthodes d'approximation. Par exemple, on pourra partager la surface en éléments finis, mais assez petits, que l'on considérera comme autant de points matériels ; puis on calculera le moment d'inertie de chacune de ces masses et on en fera la somme. Si la surface est homogène, et que l'axe donné soit dans son plan, on la divisera en tranches parallèles à cet axe, et l'intégrale double sera alors remplacée par l'intégrale simple des moments d'inertie de ces tranches ; la méthode de Simpson deviendra donc applicable.

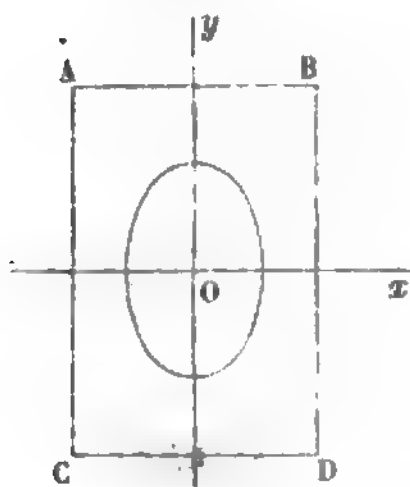
Il serait aisé de poser d'autres formules symboliques en employant les coordonnées obliques ou les coordonnées polaires ; on ne s'y arrêtera pas ici.

6. *Expressions toutes calculées de moments d'inertie de surfaces homogènes.* — Nous allons maintenant donner les valeurs toutes calculées des moments d'inertie et des rayons de gyration de quelques surfaces planes par rapport à des axes déterminés. Nous supposerons la densité constante et égale à l'unité, valeur particulière qui, une fois l'homogénéité admise, n'altère pas la position du centre de gravité, ni les rayons de gyration, ni l'ellipse d'inertie relative à un point.

1°. *Rectangle plein et homogène.* — Soient  $l$  la largeur  $\overline{AB}$  (fig. 2),  $h$  la hauteur  $\overline{BD}$ ,  $O$  le centre du rectangle,  $Ox$ ,  $Oy$  les deux parallèles aux côtés.

Le moment d'inertie, relativement à  $Ox$  ou  $\Sigma \omega y^2$ , est égal à  $\frac{1}{12} lh^3$ , et

Fig. 2.



le rayon de gyration correspondant a pour carré  $\frac{\frac{1}{12} lh^3}{lh}$ , soit  $\frac{1}{12} h^2$ .

Le moment d'inertie, par rapport à  $Oy$ , s'exprime de même par  $\frac{1}{12} l^3$ , et le carré du rayon de gyration par  $\frac{1}{12} l^2$ .

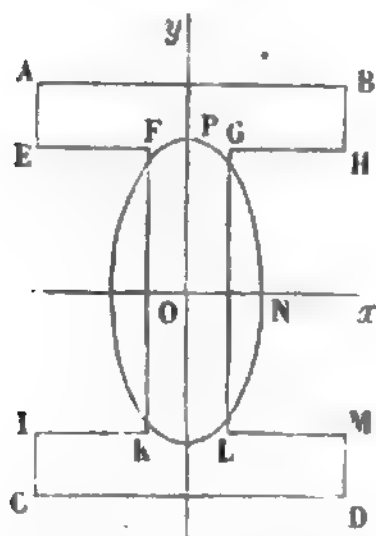
D'après une remarque du n° 3,  $Ox$  et  $Oy$  sont les axes principaux pour le centre de gravité. En conséquence, l'ellipse centrale d'inertie sera représentée par l'équation (n° 4)

$$\frac{12x^2}{l^2} + \frac{12y^2}{h^2} = 1;$$

elle sera semblable à l'ellipse inscrite dans le rectangle, et aura pour demi-axes les longueurs  $\frac{1}{2} l \sqrt{\frac{1}{3}}$ ,  $\frac{1}{2} h \sqrt{\frac{1}{3}}$ , soit  $0,577 \frac{l}{2}$  et  $0,577 \frac{h}{2}$ .

2°. *Rectangle évidé homogène.* — Nous supposerons d'abord que la surface soit symétrique par rapport à deux axes rectangulaires  $Ox$ ,  $Oy$  (fig. 3), dont le point de rencontre sera le centre de gravité. Soient  $\overline{AB} = l$ ,  $\overline{BD} = h$ ,  $\overline{EF} + \overline{GH} = l'$ ,  $\overline{HM} = h'$ . On aura :

Fig. 3.



Pour le moment d'inertie relativement à  $Ox$ ,

$$\Sigma \omega y^2 = \frac{1}{12} (lh^3 - l'h'^3);$$

Pour le moment d'inertie relativement à  $Oy$ ,

$$\Sigma \omega x^2 = \frac{1}{12} [(h-h')l^3 + h'(l-l')^3];$$

Pour l'aire de la surface,

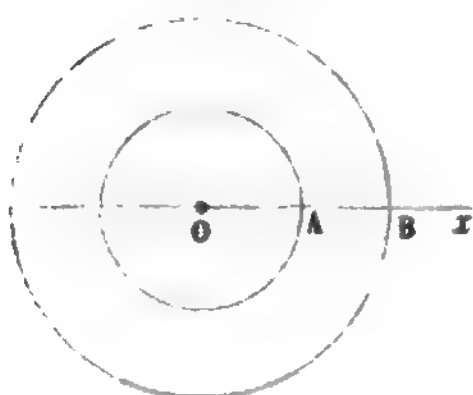
$$\Sigma \omega = lh - l'h'.$$

On en déduira aisément les rayons de gyration autour de  $Ox$  et  $Oy$ , et l'on pourra construire l'ellipse centrale représentée sur la figure.

Dans le cas où la symétrie n'existerait pas, la recherche de l'ellipse centrale d'inertie serait un peu plus complexe, parce que le centre de gravité ne serait pas connu d'avance. Néanmoins les calculs, quoique plus longs, ne présenteront aucune difficulté, et nous ne croyons pas utile d'en donner un exemple. Le problème se résoudra toujours au moyen des indications rappelées ci-dessus.

3°. *Cercle plein ou couronne circulaire homogène.* — Le moment

Fig. 4.



d'inertie d'un cercle de rayon  $R$  par rapport à un axe quelconque  $Ox$  (fig. 4), passant par son centre, a pour valeur

$\frac{1}{4} \pi R^4$ . Le rayon de gyration s'exprime par

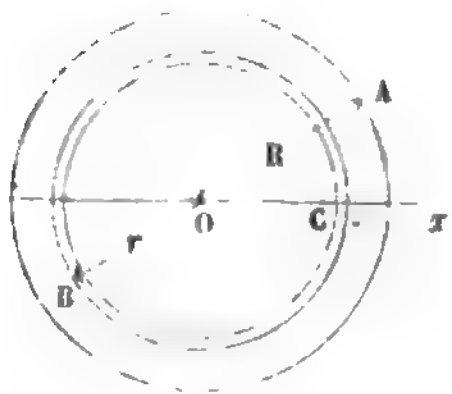
$\sqrt{\frac{\frac{1}{4} \pi R^4}{\pi R^2}}$  ou par  $\frac{1}{2} R$ . L'ellipse centrale

d'inertie sera donc un cercle  $OA$  ayant un

rayon moitié de celui du cercle proposé  $OB$ .

S'il s'agit d'une couronne circulaire, en appelant  $R$  le rayon  $OA$  du

Fig. 5.



cercle extérieur (fig. 5),  $r$  le rayon  $OB$  du cercle intérieur, le moment d'inertie relativement à un diamètre  $Ox$  s'exprime

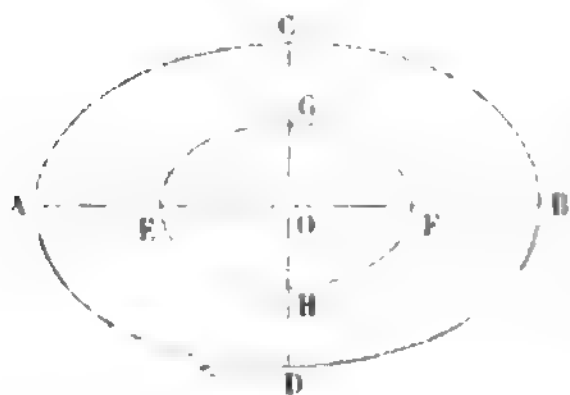
par  $\frac{1}{4} \pi (R^4 - r^4)$ , le rayon de gyration correspondant par

$$\sqrt{\frac{\frac{1}{4} \pi (R^4 - r^4)}{\pi (R^2 - r^2)}} = \frac{1}{2} \sqrt{R^2 + r^2}.$$

C'est le rayon du cercle  $OC$ , qui remplace l'ellipse centrale d'inertie.

4°. *Ellipse pleine ou couronne elliptique homogène.* — Soit l'ellipse  $ACBD$  (fig. 6), dont nous désignerons le grand axe  $AB$  par  $l$ , et le petit axe  $CD$  par  $h$ . Les moments d'inertie de la surface, relativement aux lignes

Fig. 6.



$AB$  et  $CD$ , ont respectivement pour valeur

$\frac{1}{64} \pi l h^3$  et  $\frac{1}{64} \pi h l^3$ . L'aire de l'ellipse

étant d'ailleurs égale à  $\frac{1}{4} \pi l h$ , les deux

rayons de gyration correspondants seront

$\sqrt{\frac{1}{16} h^2}$  et  $\sqrt{\frac{1}{16} l^2}$ , c'est-à-dire  $\frac{1}{4} h$  et

$\frac{1}{4} l$ ; d'où il suit que l'ellipse centrale d'inertie (dont les axes principaux,

d'après une remarque du n° 3, sont dirigés suivant  $AB$  et  $CD$ ) sera l'ellipse donnée dont les dimensions auraient été réduites de moitié.

Lorsque l'ellipse présentera un vide intérieur de forme elliptique, il y aura toujours possibilité de trouver sa surface et son moment d'inertie par rapport à un axe quelconque, en calculant la différence des surfaces et des moments d'inertie de deux ellipses pleines. Dans le cas particulier où le contour du vide serait concentrique et semblable au contour extérieur, et semblablement placé, on reconnaît aisément, au moyen de cette

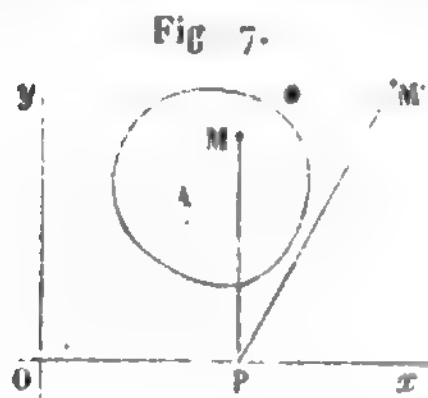
méthode, qu'en appelant  $m$  le rapport des dimensions de l'ellipse intérieure avec celles de la grande ellipse, l'ellipse centrale d'inertie est encore semblable aux deux premières, qu'elle est semblablement placée, et qu'elle a pour axes

$$\frac{1}{2} l \sqrt{1+m^2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} h \sqrt{1+m^2}.$$

Nous nous bornerons à ces exemples. Le lecteur pourra trouver d'autres expressions toutes calculées de moments d'inertie des surfaces homogènes, dans les ouvrages sur la Résistance des Matériaux et les Aide-Mémoire de Mécanique pratique. Quant aux moments d'inertie de surfaces non homogènes, il sera bien rare qu'on puisse en faire usage dans les applications, car les données numériques manqueraient pour cela. Si toutefois le cas se présentait, on se reporterait aux considérations générales que nous avons placées au commencement du n° 5.

**7. Centre de percussion d'une surface plane.** — Après avoir matérialisé une surface plane, comme nous l'avons fait au n° 1, en attribuant à l'un quelconque de ses éléments  $\omega$  une densité constante ou variable  $E$ , on peut assujettir ce corps, en forme de disque extrêmement mince, à tourner autour d'un axe contenu dans son plan. Il y aura alors à considérer un centre de percussion, c'est-à-dire un point tel, qu'en y appliquant une impulsion perpendiculaire à la surface, l'axe n'éprouverait aucune pression. Telle est la définition mécanique : nous allons voir qu'on peut lui en substituer une qui soit purement géométrique.

Soient, en effet,  $A$  la surface donnée (fig. 7),  $Ox$ ,  $Oy$  deux axes des coordonnées, rectangulaires entre eux, dont l'un,  $Ox$ , est celui autour duquel la surface est assujettie à tourner. Appelons  $x_1$  et  $y_1$  les coordonnées du centre de percussion. On sait d'abord que la distance de ce point à l'axe  $Ox$  est



égale à la longueur du pendule simple équivalent au disque matériel représenté par  $A$ , ce qui conduit à la relation

$$y_1 = \frac{\sum E y^2 \omega}{\sum E y \omega}.$$

En second lieu,  $Ox$  doit être axe principal d'inertie au point où

il est coupé par un plan qui lui serait perpendiculaire, et qui contiendrait le centre de percussion. Donc, si l'on transportait l'axe des  $y$  parallèlement à lui-même en ce point, on aurait  $\Sigma E x' y' \omega = 0$  (n° 3),  $x'$  et  $y'$  étant les coordonnées nouvelles; ou bien, comme on a  $y' = y$ ,  $x' = x - x_1$ , on posera

$$\Sigma E y (x - x_1) \omega = 0,$$

relation qui donne la valeur de  $x_1$  :

$$x_1 = \frac{\Sigma E x y \omega}{\Sigma E y \omega}.$$

On voit, en conséquence, que, d'après la définition ci-dessus donnée, nous avons trouvé les coordonnées  $x_1, y_1$  du centre de percussion. Réciproquement, on pourrait se servir des valeurs  $x_1$  et  $y_1$  pour définir le centre de percussion, et alors la propriété mécanique dont jouit ce point ne serait plus en évidence : on aurait une définition purement géométrique.

**8. Propriétés diverses du centre de percussion d'une surface plane.** — Le centre de percussion de la surface plane A (fig. 7) peut encore être considéré à un autre point de vue qui sera souvent utile. Supposons un prisme droit qui aurait A pour base, et attribuons à chaque élément de volume de ce prisme la même densité qu'à l'élément superficiel  $\omega$  sur lequel il se projette dans le plan de la base; admettons enfin que ce prisme soit terminé à un second plan passant par Ox : le centre de gravité du volume hétérogène ainsi formé se projettera sur le plan de A, en un point qui sera précisément le centre de percussion de cette surface. En effet, soit  $z$  la hauteur de l'élément prismatique qui a  $\omega$  pour base; soient  $x_2, y_2$  les coordonnées du centre de gravité en projection; le théorème des moments donne

$$y_2 \Sigma E z \omega = \Sigma E z y \omega,$$

$$x_2 \Sigma E z \omega = \Sigma E x z \omega.$$

Or  $\frac{z}{y}$  est égal à une constante; donc

$$y_2 = \frac{\Sigma E y^2 \omega}{\Sigma E y \omega} = y_1, \quad x_2 = \frac{\Sigma E x y \omega}{\Sigma E y \omega} = x_1;$$

ce qu'il fallait démontrer.



Cette nouvelle manière d'envisager le centre de percussion d'une surface plane conduit à des conséquences qu'il suffit d'énoncer pour en apercevoir la démonstration, et qui bien souvent donneront une détermination immédiate de ce point. Voici ces conséquences :

1°. S'il existe dans la surface plane A un diamètre dont les cordes conjuguées soient parallèles à l'axe de rotation; si, en outre, sur chacune de ces cordes les masses sont symétriquement distribuées de part et d'autre du point de rencontre avec le diamètre, le centre de percussion de A sera sur le diamètre dont il s'agit.

2°. Quand on voudra trouver le centre de percussion de l'ensemble de deux surfaces dans un même plan, on pourra chercher celui de chacune des deux surfaces isolées, par rapport à l'axe de rotation donné; joindre ces deux points; puis prendre sur la ligne de jonction un point qui la divise en deux segments inversement proportionnels aux moments des deux surfaces ( $\Sigma E y \omega$ ) relativement à l'axe de rotation. Il est clair que cette propriété peut facilement s'étendre à la différence de deux surfaces, ou à la somme d'un nombre quelconque de surfaces, toujours dans un même plan.

Voici encore une propriété bonne à connaître. Si l'on transforme la surface plane A, en menant par un point quelconque M une ligne MP de direction constante, et par le point P où elle coupe l'axe de rotation une autre ligne PM', de direction également déterminée, dont la longueur serait celle de MP amplifiée ou diminuée dans un rapport constant, le centre de percussion de la surface transformée s'obtiendra en exécutant sur le centre de percussion de A l'opération géométrique qui vient d'être définie.

Désignons, en effet, par des lettres avec un accent tout ce qui se rapporte à la surface transformée : on aura, pour les coordonnées de son centre de percussion,

$$y'_1 = \frac{\Sigma E y'^2 \omega'}{\Sigma E y' \omega'}, \quad x'_1 = \frac{\Sigma E x' y' \omega'}{\Sigma E y' \omega'}.$$

Or il y a d'abord un rapport invariable entre l'aire  $\omega$  et sa transformée  $\omega'$ , car la transformation n'altère pas les dimensions

parallèles aux  $x$  et multiplie par un nombre déterminé celles qui sont parallèles aux  $y$ ; de plus, on voit immédiatement que

$$y' = my \quad \text{et} \quad x' = x + ny,$$

$m$  et  $n$  étant des constantes. Par suite, on peut écrire

$$y'_1 = m \frac{\sum E y^2 \omega}{\sum E y \omega} = m y_1, \quad x'_1 = \frac{\sum E x y \omega}{\sum E y \omega} + n \frac{\sum E y^2 \omega}{\sum E y \omega} = x_1 + n y_1;$$

donc enfin le point  $(x'_1, y'_1)$  est bien identique avec le point déduit du centre de percussion de  $A$ , par la transformation géométrique.

9. *Exemples de la recherche des centres de percussion.* — Nous allons indiquer ici les centres de percussion de quelques surfaces homogènes tournant autour d'axes déterminés.

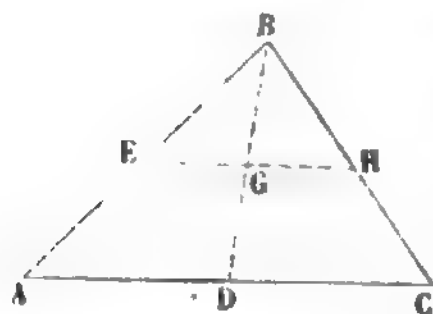
1°. *Rectangle homogène tournant autour d'un de ses côtés.* — Les considérations présentées au n° 8 prouvent immédiatement que le centre de percussion se trouve sur la perpendiculaire à l'axe de rotation passant par le centre du rectangle, et aux deux tiers de la hauteur du rectangle, à partir dudit axe. On arrive à la même conséquence par l'emploi des valeurs de  $x_1$  et  $y_1$  données au n° 7. En appelant  $l$  la longueur du côté autour duquel tourne le rectangle,  $h$  l'autre dimension, puisque  $E$  ne varie pas d'un point à un autre, on aura

$$y_1 = \frac{\int_0^h l y^2 dy}{\int_0^h l y dy} = \frac{\frac{1}{3} l h^3}{\frac{1}{2} l h^2} = \frac{2}{3} h.$$

Il est visible d'ailleurs que le centre de percussion doit se trouver sur la ligne perpendiculaire au milieu de la longueur  $l$ ; car, si l'on prend cette ligne pour axe des  $y$ , pour un élément quelconque  $\omega$ , il y en a un autre symétrique ayant même ordonnée  $y$ , et une abscisse égale et de signe contraire : donc  $\sum E x y \omega = 0$ ; et, par suite,  $x_1 = 0$ .

2°. *Triangle homogène tournant autour d'un de ses côtés.* — Soit le

Fig. 8.



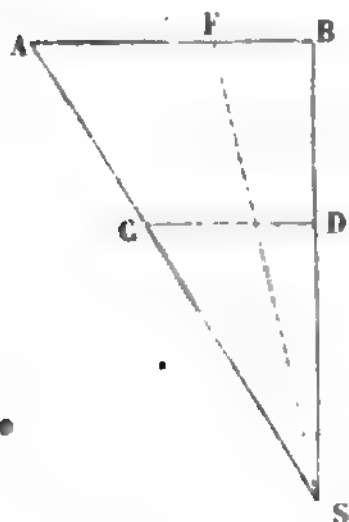
triangle  $ABC$  tournant autour de  $AC$  (fig. 8) : pour avoir le centre de percussion, il faut avoir, en projection sur le plan  $ABC$ , le centre de gravité d'un tétraèdre dont  $A$ ,  $B$ ,  $C$  seraient trois sommets, et dont le quatrième, que nous appellerons  $B'$ , se projetterait en  $B$ . Or, rien n'est plus facile. On sait que le centre de gravité d'un tétraèdre se trouve au point de rencontre des lignes qui joignent les milieux des

côtés opposés. Prenons donc le milieu D de AC, et joignons-le au milieu de BB'; nous aurons, en projection, la ligne BD. D'un autre côté, les milieux de AB' et CB' se projetant respectivement sur les milieux de AB et CB, en E et H, la ligne EH passera aussi par la projection du centre de gravité. Donc ce point ne sera autre que G, milieu de BD.

Ainsi, pour obtenir le centre de percussion du triangle homogène ABC, tournant autour de AC, on joindra le milieu de AC au sommet opposé, et l'on prendra le milieu G de la ligne de jonction : G sera le centre de percussion cherché.

3°. *Trapeze tournant autour d'un des deux côtés non parallèles.* — Soient ABCD le trapèze donné (fig. 9), AC l'axe de rotation qui rencontre en S le

Fig. 9.



côté opposé BD. Posons  $\overline{BD} = h$ ,  $\overline{BS} = mh$ . En considérant le point cherché comme la projection du centre de gravité d'une pyramide tronquée projetée elle-même sur ABCD (n° 8), on voit d'abord qu'il doit se trouver sur la ligne SF, menée par le point S, de manière que  $\overline{FB} = \frac{1}{3} \overline{AB}$ . Pour achever

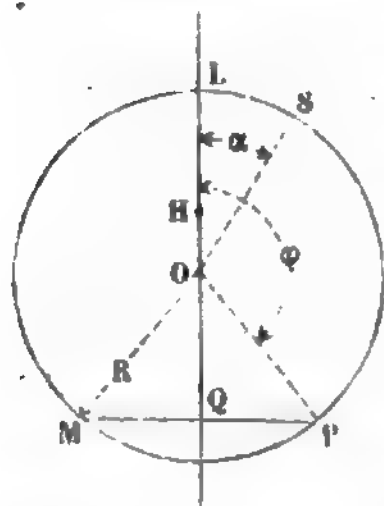
de le déterminer, il suffira d'avoir sa distance  $x$  à AB. Or la pyramide tronquée ABCD est la différence de deux pyramides triangulaires SAB, SCD respectivement proportionnelles à  $\overline{SB}^3$  et  $\overline{SD}^3$ ; de plus, les centres de gravité de ces pyramides sont à des distances du plan égales à  $\frac{1}{4} \overline{SB}$  et  $\frac{1}{4} \overline{SD} + \overline{BD}$ , ou à la projection de ces lignes sur la perpendiculaire à AB. Le théorème des moments donne donc

$$x = \frac{\frac{1}{4} m^4 h^4 - (m-1)^3 (m+3) h^4}{m^3 h^3 - (m-1)^3 h^3} = \frac{1}{4} h \frac{6m^2 - 8m + 3}{3m^2 - 3m + 1},$$

ce qui résout la question.

4°. *Segment de cercle homogène tournant autour de sa corde.* — Con-

Fig. 10.



sidérons le segment MLP (fig. 10), pris dans un cercle homogène de rayon R, et devant tourner autour de sa corde MP. Le centre de percussion se trouvera en H, sur la ligne diamétrale OQ, perpendiculaire au milieu de MP (n° 8) : il sera complètement déterminé, si l'on peut trouver sa distance au centre du cercle O, ou simplement le

rapport  $\frac{\overline{OH}}{R} = n$ . C'est à quoi nous parviendrons

en nous servant de la formule du n° 7, qui nous donne la valeur de  $\gamma_1$  ou de  $\overline{QH}$ . Pour l'appliquer, partageons la surface

en éléments  $dx dy$  par des parallèles aux lignes QP et QL, prises pour axes des  $x$  et des  $y$ ; nous aurons, en appelant  $\varphi$  l'angle POL,

$$\overline{QH} = R(n - \cos \varphi) = \frac{\iint y^2 dx dy}{\iint y dx dy};$$

E disparaît encore, comme facteur constant commun aux deux termes de la fraction. Une première intégration, faite pour l'une des rangées d'éléments disposés suivant une parallèle aux  $x$ , donnera l'équation

$$(n - \cos \varphi) R \int_0^{R(1 - \cos \varphi)} xy dy = \int_0^{R(1 - \cos \varphi)} y^2 x dy,$$

dans laquelle  $x$  et  $y$  ne désignent plus que les coordonnées d'un point S quelconque de l'arc LP. Or, si l'on désigne par  $\alpha$  l'angle LOS que fait avec OL le rayon passant par ce point, on a

$$x = R \sin \alpha;$$

$$y = R(\cos \alpha - \cos \varphi),$$

$$dy = -R \sin \alpha d\alpha;$$

valeurs qui, substituées dans la dernière équation, donnent

$$(n - \cos \varphi) \int_0^\varphi \sin^2 \alpha (\cos \alpha - \cos \varphi) d\alpha = \int_0^\varphi \sin^2 \alpha (\cos \alpha - \cos \varphi)^2 d\alpha.$$

Pour effectuer les intégrations, on se rappellera que

$$\int \sin^2 \alpha \cos \alpha d\alpha = \frac{1}{3} \sin^3 \alpha,$$

$$\int \sin^2 \alpha d\alpha = \frac{1}{2} \alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$\int \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha d\alpha = \frac{1}{4} \sin^3 \alpha \cos \alpha + \frac{1}{8} \alpha - \frac{1}{8} \sin \alpha \cos \alpha.$$

On obtiendra donc sans difficulté la valeur de  $n$ ,

$$n = \frac{\frac{1}{4} \varphi - \frac{1}{8} \sin^3 \varphi \cos \varphi - \frac{1}{4} \sin \varphi \cos \varphi}{\frac{2}{3} \sin^3 \varphi - \varphi \cos \varphi + \sin \varphi \cos^2 \varphi},$$

ce qu'on peut encore écrire de la manière suivante :

$$n = \frac{\frac{1}{4} \varphi - \sin \varphi \cos \varphi - \frac{2}{3} \sin^3 \varphi \cos \varphi}{\frac{1}{4} \sin \varphi - \varphi \cos \varphi - \frac{1}{3} \sin^3 \varphi}.$$

Voici les résultats de quelques substitutions :

Pour  $\varphi = \pi$  on trouve  $n = 0,250$ ,

$$\frac{5\pi}{6} \quad 0,295,$$

$$\frac{3\pi}{4} \quad 0,335,$$

$$\frac{2\pi}{3} \quad 0,410,$$

$$\frac{\pi}{2} \quad 0,589,$$

$$\frac{\pi}{3} \quad 0,790,$$

$$\frac{\pi}{4} \quad 0,876,$$

$$\frac{\pi}{6} \quad 0,943,$$

$$0 \quad 1,000.$$

Une interpolation facile à concevoir donnerait approximativement les valeurs de  $n$  correspondant à des valeurs  $\varphi$  non compris dans le tableau précédent : par exemple quand  $\varphi$  sera égal à  $\frac{3\pi}{5}$ , on posera la proportion

$$0,589 - n : 0,589 - 0,410 :: \frac{3}{5} - \frac{1}{2} : \frac{2}{3} - \frac{1}{2},$$

d'où

$$n = 0,482.$$

Le calcul direct donne pour résultat

$$n = 0,476.$$

Si le segment circulaire, au lieu d'être plein, se réduisait à la circonférence, ou, si l'on veut, à une couronne très-mince, en conservant les notations précédentes, on aurait

$$n - \cos \varphi = \frac{\int_0^\varphi (\cos \alpha - \cos \varphi)^2 d\alpha}{\int_0^\varphi (\cos \alpha - \cos \varphi) d\alpha},$$

d'où l'on tire

$$n = \frac{1}{2} \frac{\varphi - \sin \varphi \cos \varphi}{\sin \varphi - \varphi \cos \varphi}.$$

Voici encore les valeurs numériques de  $n$  correspondant à quelques valeurs de  $\varphi$  :



Pour  $\varphi = \pi$  on trouve  $n = 0,500$ ,

$$\frac{5\pi}{6} \quad 0,551,$$

$$\frac{3\pi}{4} \quad 0,602,$$

$$\frac{2\pi}{3} \quad 0,661,$$

$$\frac{\pi}{2} \quad 0,785,$$

$$\frac{\pi}{3} \quad 0,897,$$

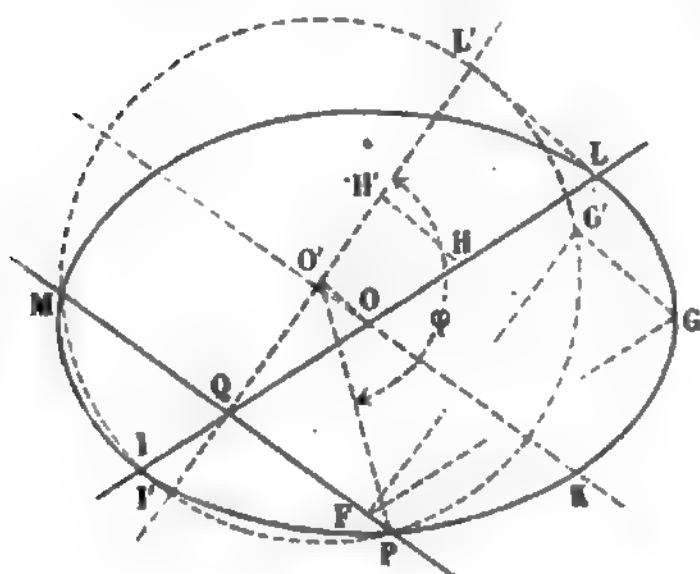
$$\frac{\pi}{4} \quad 0,940,$$

$$\frac{\pi}{6} \quad 0,973,$$

$$0 \quad 1,000.$$

5°. *Segment elliptique homogène tournant autour de sa corde.* — Ce

Fig. 11.



problème se ramène au précédent.

Soit, en effet, MLP (fig. 11) le segment elliptique donné, ayant son centre en O; soient LI et OK deux diamètres conjugués, dont l'un OK est parallèle à MP. Par un point quelconque G, pris sur l'ellipse, menons GF parallèle à LI; puis par le point F et perpendiculairement à MP, la ligne FG', que nous terminerons à son point de rencontre avec la ligne GG', de direc-

tion indéterminée, mais constante pour tous les points. On aura

$$\text{angle } GFG' = \text{const} = \theta,$$

$$\frac{\overline{FG}}{\overline{FG'}} = \text{const} = m.$$

On démontre, sans difficulté, que le lieu des points G' est une ellipse ayant pour axes, d'une part, la projection oblique de  $\overline{LI}$  sur la perpendiculaire  $L'I'$  élevée au milieu de MP, la projection étant faite par des parallèles à GG'; d'autre part, le double de  $\overline{OK}$ . La courbe transformée, lieu des points G', sera un cercle, en choisissant convenablement la direction

indéterminée  $GG'$  ; il suffira de faire en sorte que la projection oblique de  $\overline{OL}$ , c'est-à-dire  $\overline{O'L'}$ , soit égale à  $\overline{OK}$  : ce qui est un problème très-simple de Géométrie élémentaire. Le centre de ce cercle sera  $O'$ , projection oblique du centre  $O$  de l'ellipse.

Ayant construit le segment circulaire  $ML'P$ , on déterminera son centre de percussion  $H'$ , relatif à l'axe  $MP$ , comme nous l'avons fait plus haut. On obtiendra le rapport  $\frac{\overline{O'H'}}{\overline{O'L'}} = n$ , en substituant dans son expression l'an-

gle  $\varphi$  dont le cosinus est  $-\frac{\overline{O'Q}}{\overline{O'L'}}$  ou  $-\frac{\overline{OQ}}{\overline{OL}}$ . Connaissant  $H'$ , on mènera

$H'H$  parallèle à  $G'G$ , et son intersection  $H$  avec  $LI$  sera précisément le centre de percussion du segment elliptique. En effet, nous avons appliqué ici purement et simplement la dernière propriété démontrée au n° 8.

Pratiquement il ne serait pas nécessaire de passer par la détermination du point auxiliaire  $H'$ . En effet  $\frac{\overline{O'H'}}{\overline{O'L'}} = \frac{\overline{OH}}{\overline{OL}} = n$  ; donc, après avoir cher-

ché le rapport  $n$  qui répond à l'angle  $\varphi$  dont le cosinus est  $-\frac{\overline{OQ}}{\overline{OL}}$ , il suffira de porter sur  $OL$  la distance  $\overline{OH}$  égale à  $n \cdot \overline{OL}$  : le point  $H$  serait le centre cherché.

**10. Recherche générale des centres de percussion par le calcul intégral.** — Les valeurs des ordonnées  $x_i, y_i$  du centre de percussion d'une surface plane tournant autour d'un axe situé dans son plan, sont exprimées au moyen de trois sommes étendues à tous les éléments superficiels. Il est clair que chacune de ces sommes peut être calculée au moyen d'une intégrale double, comme on l'a vu à propos des moments d'inertie (n° 5). Ces sommes peuvent également se trouver à l'aide des procédés approximatifs connus, tels que la méthode de Simpson.

## § II. — Des forces capables de produire sur un prisme une déformation donnée ; tensions correspondantes dans les divers points.

**11. Définitions.** — Si l'on prend un portion de prisme comprise entre deux sections normales à la longueur, très-voisines l'une de l'autre ; que l'on décompose ce volume en éléments prismatiques très-petits en tous sens, ayant leurs arêtes parallèles à celles du prisme donné, l'un quelconque de ces éléments recevra le nom de *fibre élémentaire* ou quelquefois

*d'élément de fibre.* Une file d'éléments disposée parallèlement aux arêtes est ce que nous nommerons une *fibre du prisme*.

Un prisme est susceptible de se déformer d'une infinité de manières; mais nous n'étudierons qu'une classe restreinte de déformations. Nous excluons toutes celles qui comporteraient un changement quelconque dans la figure des sections transversales, de sorte que le prisme se déformera uniquement par les changements de position des sections relativement les unes aux autres. Maintenant, on peut supposer à deux sections voisines quatre mouvements relatifs simples dont nous allons successivement analyser les effets.

**12. Extension ou compression simples d'un prisme homogène.** — Quand un prisme élastique homogène, de faibles dimensions transversales, est tiré par une force appliquée suivant son axe, on sait qu'il s'allonge proportionnellement à sa longueur primitive, à l'inverse de sa section droite et à cette force. Si l'effort exercé devient assez grand, il est vrai que la proportionnalité cesse ou du moins que le rapport entre l'allongement et la force ne conserve pas sa valeur primitive. Toutefois, comme la valeur limite de la force, qui donne lieu à ce changement, est encore inférieure à celle qui serait fixée par les constructeurs pour avoir des garanties suffisantes de stabilité, nous admettrons toujours la proportionnalité dont il s'agit, c'est-à-dire que nous supposerons toujours la force au-dessous de la limite nécessaire à la conservation du prisme.

Si la force change de sens et produit une compression (toute courbure dans l'axe étant d'ailleurs empêchée par des moyens quelconques), on pourra répéter identiquement la même chose, à part que le prisme sera raccourci au lieu d'être allongé. Ainsi donc, en appelant

$L$  la longueur primitive;

$l$  l'allongement regardé comme positif dans le cas de l'extension, et négatif dans le cas de la compression;

$\Omega$  la section transversale;

$E$  un nombre constant pour une même matière;

$T$  la tension longitudinale, positive ou négative en même temps que  $l$ ;

on aura la relation fournie par l'expérience

$$l = \frac{TL}{E\Omega},$$

d'où l'on tire la valeur de la tension correspondant à un allongement donné,

$$T = \frac{E\Omega l}{L}.$$

Le nombre  $E$  est ce que nous appellerons *coefficient d'élasticité longitudinale* pour la matière qui compose le prisme; c'est, comme on le voit, le rapport entre la tension par unité de surface  $\frac{T}{\Omega}$  et l'allongement proportionnel correspondant  $\frac{l}{L}$  (\*).

**13. Généralisation des notions précédentes pour un prisme hétérogène.** — Lorsqu'un prisme n'est pas homogène, mais que ses qualités physiques varient seulement d'un point à l'autre d'une section transversale, toutes les sections étant d'ailleurs identiques entre elles, on peut imaginer qu'il est formé d'une infinité de prismes homogènes juxtaposés. Alors si l'on appelle  $\omega$  la section de l'un des éléments,  $t$  sa tension pour une augmentation  $l$  de sa longueur primitive  $L$ ,  $E$  son coefficient d'élasticité, on pourra toujours poser

$$(1) \quad t = \frac{E\omega l}{L}.$$

On peut admettre avec assez de vraisemblance que  $E$  reste constant pour un même élément ou fibre quand  $t$  varie; ce qui revient à supposer qu'une fibre se comporte comme une tige isolée et qu'elle n'est pas influencée par les fibres voisines. Le nombre  $E$ , variable seulement d'une fibre à une autre, sera ce que nous appellerons *coefficient d'élasticité longitudinale* du prisme donné, dans les points qui se trouvent sur la fibre considérée.

---

(\*) Quelques expérimentateurs ont attribué au coefficient d'élasticité de la fonte ou à celui du fer des valeurs différentes suivant qu'il s'agit de l'extension ou de la compression. Mais, outre que la différence n'est pas bien positivement établie, elle est assez faible pour pouvoir être négligée en vue de simplifier la théorie.

La même notion s'étend immédiatement à un prisme de nature quelconque, pourvu qu'on y suppose  $L$  infiniment petit, car il est clair qu'on rentrerait ainsi dans le cas que nous venons d'examiner. Ainsi nous appelons *coefficient d'élasticité longitudinale* en un point quelconque d'un prisme, le rapport supposé constant entre la tension longitudinale de l'élément de fibre qui contient ce point, par unité de surface, et l'allongement proportionnel qui répond à cette tension.

Cela posé, il est facile d'avoir la résultante des tensions dans une section transversale quelconque, pour une extension ou compression uniforme de toutes les fibres, c'est-à-dire quand une section n'éprouve relativement à celle qui la précède ou la suit immédiatement qu'une translation perpendiculaire à leur plan. Il suffira de faire pour toute la section la somme ou intégrale des valeurs de  $\frac{E\omega l}{L}$ , ce qui donne pour l'intensité de la résultante

$$(2) \quad T = \frac{l}{L} \Sigma E\omega,$$

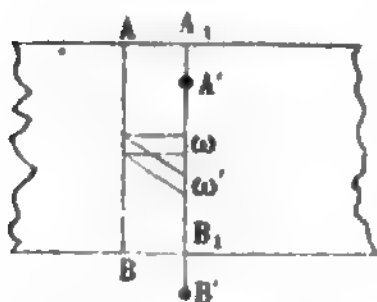
équation qui peut aussi faire connaître l'allongement  $l$  quand les autres quantités sont données. La quantité  $\Sigma E\omega$  qui, multipliée par l'allongement proportionnel, donne la tension totale, est ce que nous nommerons *ressort longitudinal du prisme*; plus elle est grande, moins le prisme s'allonge pour une tension totale déterminée; ce qui justifie le nom que nous lui donnons. Quant au point d'application de la force résultante  $T$ , il est clair que puisque ses diverses composantes sont en chaque point proportionnelles au produit  $E\omega$ , il coïncidera avec le centre de gravité de la section, déterminé en attribuant à chaque élément superficiel une densité égale à son coefficient d'élasticité longitudinale.

14. *Cas du glissement simple par translation de deux sections voisines.* — Au lieu de supposer, comme tout à l'heure, qu'une section se déplace relativement à celle qui est infiniment voisine, par une translation suivant une perpendiculaire à son plan, prenons le cas où cette translation s'effectuerait parallèlement audit plan. Il n'est plus possible alors de con-



stater directement par l'expérience la relation entre cet effet et la force qui serait capable de le produire, parce que le phénomène est toujours compliqué par des circonstances étrangères à celles que l'on veut étudier; pour l'établir, nous nous fonderons sur une analogie avec le cas traité ci-dessus. Soient AB, A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>,

Fig. 12.



deux sections transversales infiniment voisines, dont la distance primitive  $\overline{AA_1}$  sera désignée par  $L$ . Admettons que A<sub>1</sub>B<sub>1</sub> glisse dans son plan, par rapport à AB supposé fixe, d'une quantité représentée par  $\overline{A_1A'} = \gamma$ , qui est la même pour tous les

points. L'élément superficiel  $\omega$ , venu en  $\omega'$ , tendra en vertu de l'élasticité à reprendre sa position primitive; la force exercée sur lui dans ce but sera d'une part proportionnelle à  $\omega$ , et d'autre part fonction du glissement relatif  $\frac{\gamma}{L}$ . Il est assez naturel d'admettre qu'elle lui sera proportionnelle dans une certaine limite et de poser, en appelant  $\theta$  cette force,

$$(3) \quad \theta = G \frac{\gamma \omega}{L},$$

relation dans laquelle  $G$  est un coefficient constant pour une même fibre élémentaire, mais variable de l'une à l'autre; il représente d'ailleurs [comme  $E$  dans l'équation (1)] le rapport constant entre la force  $\frac{\theta}{\omega}$  par unité de surface et le glissement relatif  $\frac{\gamma}{L}$ ; nous l'appellerons *coefficient d'élasticité transversale*.

La force  $\theta$  est opposée au glissement; la résultante  $\Theta$  de toutes les forces parallèles appliquées aux divers éléments superficiels  $\omega$  sera

$$(4) \quad \Theta = \frac{\gamma}{L} \Sigma G \omega.$$

Cette équation, tout à fait pareille à l'équation (2) du n° 13, donne le rapport entre une force  $\Theta$  et le glissement  $\gamma$  qu'elle produit. La quantité  $\Sigma G \omega$  pourra donc par analogie être appelée *ressort transversal du prisme*. On remarquera en outre

que la force  $\Theta$  est située dans le plan de la section et qu'elle passe par son centre de gravité, déterminé comme si chaque élément avait une densité égale au nombre  $G$  correspondant.

15. *Centre d'élasticité d'une section transversale.* — Pour un même élément  $\omega$  pris dans une section, il existe deux coefficients d'élasticité  $E$  et  $G$ , dont la définition vient d'être donnée. Ces nombres dépendant de la constitution de la matière peuvent être variables d'un élément à l'autre; mais ordinairement, dans les applications numériques de la Résistance des Matériaux, faute de données suffisantes à ce sujet, on est obligé de les supposer l'un et l'autre constants pour un même corps. Nous ferons donc une hypothèse encore plus générale en admettant que les corps dont nous nous occupons sont tels qu'il y a un rapport constant entre les coefficients  $E$  et  $G$  aux différents points. C'est au reste ce qui paraît approximativement résulter des expériences qui ont fixé les valeurs  $E$  et  $G$  pour les corps ordinairement employés dans les constructions; car le rapport  $\frac{E}{G}$  s'écarte ordinairement assez peu de 3.

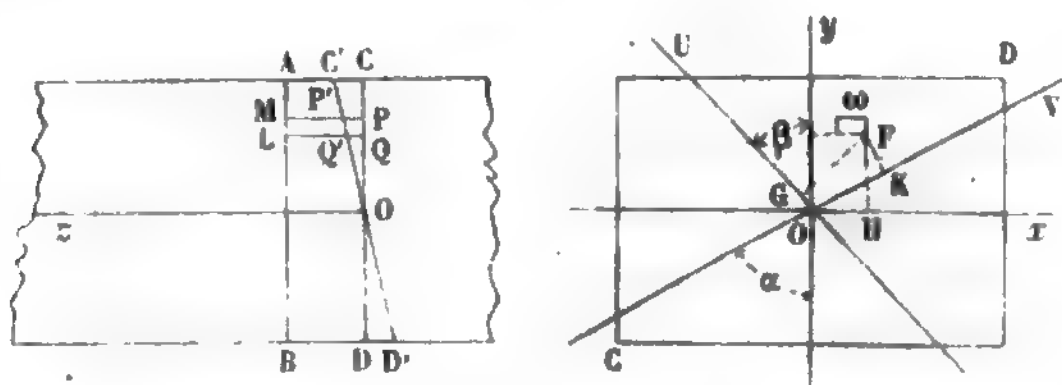
Une conséquence immédiate de l'hypothèse que nous venons de faire, c'est que les deux résultantes  $T$  et  $\Theta$  des actions moléculaires produites dans une section, soit par une extension ou compression simples, soit par un glissement simple, passent en un même point. Elles se rencontrent en effet au centre de gravité de la section déterminé en considérant chaque portion de la surface comme ayant une densité égale à  $E$  ou à  $G$ . A cause du rôle que joue l'élasticité dans la détermination de ce point, il paraît convenable de l'appeler *centre d'élasticité*. La fibre qui contient les centres d'élasticité de toutes les sections se nommera *fibre moyenne*.

Nous avertissons en outre ici que quand nous parlerons soit de l'ellipse d'inertie d'une surface, soit de son rayon de gyration, ces quantités devront être déterminées en adoptant pour densité en chaque point la valeur  $E$  ou  $G$ .

16. *Cas de la flexion simple.* — Nous disons qu'un prisme éprouve une flexion simple quand une section quelconque n'a, relativement à celle qui est infiniment voisine, qu'un mouve-

ment de rotation autour d'un axe contenu dans son plan et passant par le centre d'élasticité.

Fig. 13.



Soient

**AB** et **CD** (*fig. 13*) les sections considérées :

**C' D'** la position occupée par cette dernière après la déformation, relativement à **AB** supposé fixe ;

**O** le centre d'élasticité de **CD** ;

**OU** l'axe de flexion ;

**Ox**, **Oy** les axes principaux d'inertie de la surface **CD** pour le point **O**, lesquels seront pris pour axes de coordonnées ;

**a** et **b** les rayons de gyration de la surface **CD** relativement aux axes **Ox**, **Oy** ;

$\psi$  l'angle infiniment petit des plans **CD**, **C' D'** ;

$\beta$  l'angle de **OU** avec **Oy** ;

**L** la longueur  $\overline{AC}$  ;

**u** la longueur de la perpendiculaire abaissée d'un point quelconque **F** de la section **CD** sur l'axe **OU** ;

**E** le coefficient d'élasticité longitudinale en **F** ;

$\omega$  un élément superficiel contenant ce point.

La fibre élémentaire ayant  $\omega$  pour base éprouvera un allongement simple, toujours exprimé algébriquement par  $\psi u$ , pourvu que  $u$  soit pris négatif du côté de **OU** où il y a raccourcissement ; la tension correspondante, positive ou négative, sera  $E\omega \frac{\psi u}{L}$  (n° 13) ; la tension par unité de surface variera donc d'un point à l'autre proportionnellement au produit **E****u**.

Cherchons maintenant à composer entre elles toutes les tensions telles que  $E\omega \frac{\psi u}{L}$ , pour les réduire à une force ou à un couple unique. On remarquera d'abord que leur somme algé-

brique est  $\frac{\psi}{L} \sum E \omega u$ , quantité nulle puisque OU passe au centre d'élasticité de CD; comme d'ailleurs toutes ces forces sont parallèles à l'axe du prisme, il est clair qu'elles se réduisent à un couple situé dans un plan également parallèle à cet axe, couple qui sera complètement déterminé si l'on connaît une parallèle à la trace de son plan sur celui de la section CD et la grandeur de son moment. Soient OV une ligne menée par le centre d'élasticité O, parallèlement à la trace dont il s'agit,  $\alpha$  l'angle de OV avec Oy,  $u'$  la distance de l'élément  $\omega$  à l'axe OV; le moment total relativement à OV, des deux forces du couple résultant étant nul, il en est de même de la somme des moments des actions moléculaires, et l'on posera, en conséquence, l'équation

$$\frac{\psi}{L} \sum E \omega u u' = 0.$$

Or les lignes FG et FK, ou  $u$  et  $u'$ , peuvent être respectivement considérées comme les projections de la ligne brisée OHF sur les perpendiculaires à OU et à OV, ce qui donne facilement

$$u = x \cos \beta + y \sin \beta,$$

$$u' = -x \cos \alpha + y \sin \alpha;$$

donc l'équation précédente devient, en laissant de côté le facteur  $\frac{\psi}{L}$  qui ne peut être nul,

$$\sum E \omega (x \cos \beta + y \sin \beta) (-x \cos \alpha + y \sin \alpha) = 0,$$

ou en développant et remarquant que le choix particulier des axes entraîne la condition  $\sum E \omega xy = 0$  (n° 3),

$$-\cos \alpha \cos \beta \sum E \omega x^2 + \sin \alpha \sin \beta \sum E \omega y^2 = 0.$$

Les deux moments d'inertie  $\sum E \omega x^2$  et  $\sum E \omega y^2$  sont respectivement proportionnels à  $b^2$  et à  $a^2$ ; on a donc encore

$$-b^2 \cos \alpha \cos \beta + a^2 \sin \alpha \sin \beta = 0,$$

ou bien, après avoir divisé par  $\cos \alpha \cos \beta$ ,

$$\tan \alpha \tan \beta = \frac{b^2}{a^2}.$$

Cette équation suffit pour définir la ligne OV : si l'on se rappelle que l'ellipse centrale d'inertie de la section CD a pour équation (n° 4)

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1,$$

on constatera sans peine, d'après des propriétés géométriques bien connues, que OU et OV sont deux diamètres conjugués de cette ellipse. En effet, nommons  $x'$  et  $y'$  les coordonnées du point d'intersection de OU avec l'ellipse ; on aura

$$\text{tang } \beta = -\frac{x'}{y'},$$

et, par suite,

$$\text{tang } \alpha = \frac{b^2}{a^2 \text{ tang } \beta} = -\frac{b^2 y'}{a^2 x'}.$$

Or la tangente au point  $(x', y')$  est représentée par l'équation

$$\frac{xx'}{b^2} + \frac{yy'}{a^2} = 1;$$

elle fait donc avec l'axe des  $y$  un angle ayant pour tangente  $-\frac{b^2 x'}{a^2 y'}$ , et, par suite, elle est parallèle à OV, ce qui démontre le fait énoncé.

Quant à l'intensité X du couple résultant, voici comment on l'obtiendra. Si  $\delta$  désigne l'angle des deux diamètres conjugués OU et OV,  $\frac{\pi}{2} - \delta$  sera l'angle de l'axe représentatif de ce couple avec OU ; donc la somme des moments des actions moléculaires par rapport à l'axe de flexion aura pour valeur  $X \sin \delta$ , comme on le sait par la théorie générale des moments. Or la même sommée est encore exprimée par  $\frac{\psi}{L} \sum E \omega u^2$ , attendu que la force  $\frac{\psi}{L} E \omega u$  exercée sur l'élément  $\omega$  a pour bras de levier la distance  $u$  ; donc

$$X \sin \delta = \frac{\psi}{L} \sum E \omega u^2,$$

ou bien, en nommant  $r$  le rayon de gyration de la section CD



par rapport à OU,

$$(5) \quad X = \frac{\psi}{L \sin \delta} r^2 \Sigma E \omega.$$

Telle est la relation entre la rotation  $\psi$  et le moment résultant des actions moléculaires qu'elle produit. Il est bien entendu d'ailleurs que le moment  $X$ , ou plutôt  $X \sin \delta$ , est de sens opposé à la rotation  $\psi$ .

En résumé, on voit qu'une flexion simple donne lieu à des forces moléculaires se réduisant à un couple; que la trace de ce couple sur le plan de la section fléchie est le diamètre de l'ellipse centrale d'inertie de la section, conjugué avec l'axe autour duquel la flexion s'opère; enfin que le moment du même couple est proportionnel à l'angle de flexion rapporté à l'unité de longueur  $\left(\frac{\psi}{L}\right)$ , à l'inverse du sinus de l'angle  $\delta$ , et à la quantité  $r^2 \Sigma E \omega$  qui est le moment d'inertie de la section fléchie pris relativement à l'axe de flexion. Cette dernière quantité, indépendante de la flexion, mais dépendant seulement de la surface CD et de ses qualités physiques, peut être considérée comme donnant la mesure de l'effort à employer pour produire une flexion donnée, autour d'un axe déterminé, entre les sections très-voisines CD, AB; par cette raison, nous pensons qu'on pourrait la nommer *moment de flexibilité de la section CD, relativement à l'axe OU*, afin de rappeler le rôle qu'elle joue dans la théorie qu'on vient d'exposer.

**17. Cas de la torsion simple.** — Un prisme éprouve une torsion simple; quand une section tourne, relativement à une section infiniment voisine, autour d'un axe perpendiculaire à leurs plans et passant par leurs centres d'élasticité. Reportons-nous à la *fig. 13*, conservons les notations du n° 16 et appelons en outre

$G$  le coefficient d'élasticité transversale pour l'élément  $\omega$ ;

$\nu$  sa distance à l'axe de torsion  $Oz$ ;

$\chi$  l'angle dont a tourné la section CD relativement à AB supposé fixe.

La tension exercée sur l'élément  $\omega$  sera (n° 14)  $\frac{G \omega \chi \nu}{L}$ ,

de sorte que la tension par unité de surface varie d'un point à l'autre de CD proportionnellement au produit  $Gv$ .

Pour composer entre elles toutes ces tensions, on les projettera d'abord sur trois axes  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ . La somme des projections sur  $Oz$  sera nulle d'elle-même, car toutes les tensions sont contenues dans le plan CD; quant à la projection totale sur  $Ox$ , elle est  $\frac{\chi}{L} \sum G \omega y$ , c'est-à-dire nulle, puisque  $O$  est le centre d'élasticité, et il en est de même des projections sur  $Oy$ . Donc les tensions se composent en un couple contenu dans le plan CD. Le moment  $V$  de ce couple ne sera autre que la somme des moments des tensions relativement à un point quelconque du plan,  $O$  par exemple : donc on aura

$$(6) \quad V = \frac{\chi}{L} \sum G \omega v^2.$$

Le moment d'inertie  $\sum G \omega v^2$  peut s'exprimer autrement. On a vu en effet (n° 5) que le carré du rayon de gyration correspondant, ou  $\frac{\sum G \omega v^2}{\sum G \omega}$ , est égal à la somme des carrés des deux demi-diamètres principaux  $a$  et  $b$  de l'ellipse d'inertie, construite pour le point  $O$  de la surface : donc

$$\sum G \omega v^2 = (a^2 + b^2) \sum G \omega.$$

A la vérité  $a$  et  $b$  devraient être déterminés en attribuant à chaque élément une densité  $G$ ; mais si l'on admet l'hypothèse d'un rapport invariable entre les deux coefficients d'élasticité, le résultat serait le même en attribuant la densité  $E$ , et les lettres  $a$  et  $b$  désigneraient les mêmes quantités qu'au numéro précédent.

Comme on le voit aisément, le moment d'inertie  $\sum G \omega v^2$  ou  $(a^2 + b^2) \sum G \omega$  joue ici un rôle tout à fait analogue à celui du moment  $\sum E \omega u^2$  ou  $r^2 \sum E \omega$  dans la flexion simple : il serait donc naturel de l'appeler *moment de torsibilité* (\*) de la section CD.

---

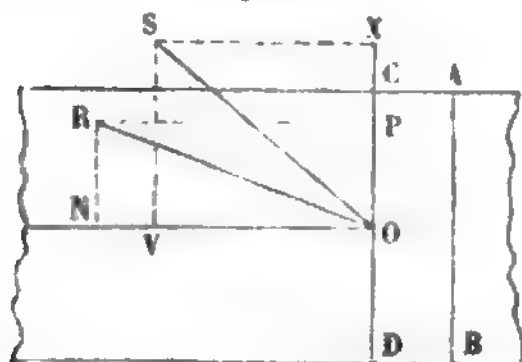
(\*) Il n'existe pas en français de mot pour exprimer la faculté d'être tordu : nous avons été obligé de hasarder un mot nouveau.

§ III. — **Problème inverse :** Étant données les forces qui doivent être équilibrées par les actions moléculaires dans une section d'un prisme, trouver la tension par unité de surface en chaque point.

18. *Solution générale.* — Quand on connaît toutes les forces extérieures sous l'action desquelles un prisme se maintient en équilibre, il est clair qu'on connaît par cela même la résultante ou plus généralement les deux résultantes des actions moléculaires dans une section quelconque : car ces actions doivent faire équilibre à toutes les forces extérieures qui agissent entre la section considérée et l'une des extrémités du prisme. Le problème posé dans ce paragraphe est donc l'un des trois problèmes généraux énoncés dans l'introduction du Cours. Sa solution se déduit immédiatement d'une double hypothèse qu'on peut énoncer ainsi. 1° les seules déformations qui se produisent sous l'action des forces données sont les déformations simples mentionnées ci-dessus, au § II, ou bien elles résultent de la composition des mouvements relatifs de sections auxquels sont dues lesdites déformations simples; 2° les tensions produites par un mouvement relatif de deux sections voisines, composé de deux ou plusieurs mouvements simples, sont les résultantes des tensions qui se produiraient si les mouvements composants existaient chacun à l'exclusion des autres.

Soient en effet CD (fig. 14) la section transversale dans laquelle on veut déterminer les tensions; O son centre d'élasticité.

Fig. 14.



Toutes les forces qui agissent depuis CD jusqu'à l'extrémité de la pièce pourront toujours être ramenées par la composition à une résultante de translation R appliquée en O et à un couple dont l'axe représentatif sera OS par exemple.

Puis la force R sera décomposée en une force N, dirigée normalement à CD, et en une force P située dans le plan CD; de même le couple S sera décomposé en deux autres X et V, le premier normal à la section, l'autre contenu dans cette sec-

tion. Cela posé, pour produire des actions moléculaires susceptibles d'équilibrer le système  $N, P, X, V$ , il suffira d'imaginer que  $CD$  a pris relativement à la section infiniment voisine  $AB$  les quatre mouvements simples suivants :

1°. Une translation parallèle à  $ON$ , exprimée par  $\frac{NL}{\Sigma E_{\omega}}$ , laquelle donnera lieu à la tension résultante  $N$  (n° 13);

2°. Un glissement dans son plan, dirigé suivant  $OP$ , exprimé par  $\frac{PL}{\Sigma G_{\omega}}$ , lequel produira une force égale et contraire à  $P$  (n° 14);

3°. Une flexion simple ou rotation autour d'un axe conjugué, dans l'ellipse centrale d'inertie, avec la perpendiculaire à  $OX$  (n° 16); en appelant  $\delta$  l'angle de la perpendiculaire à  $OX$  avec son diamètre conjugué,  $r$  le rayon de gyration de  $CD$  autour de ce diamètre, et adoptant pour grandeur de cette rotation  $\frac{XL \sin \delta}{r^2 \Sigma E_{\omega}}$ , on produira des actions moléculaires dont l'ensemble sera équivalent au couple  $X$ ;

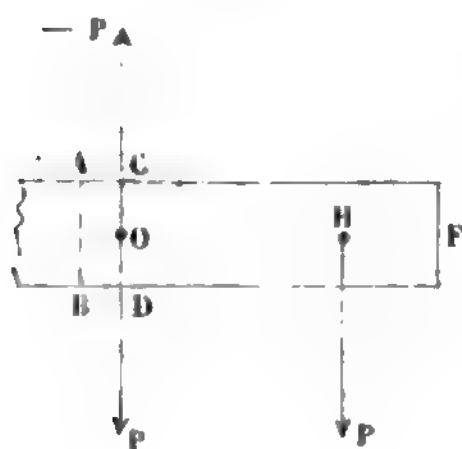
4°. Enfin une torsion simple ou rotation autour de l'axe normal à  $CD$  et passant au point  $O$ , dont la grandeur serait  $\frac{VL}{(a^2 + b^2) \Sigma G_{\omega}}$ ,  $a$  et  $b$  étant les rayons de gyration principaux de la surface  $CD$  en  $O$ . Les actions moléculaires produites par ce dernier mouvement feront équilibre au couple  $V$  (n° 17).

Ainsi donc on pourra, moyennant les hypothèses fondamentales sur lesquelles nous nous appuyons, trouver dans le cas le plus général, quant à la distribution des forces et à la nature du prisme, les quatre mouvements relatifs simples de deux sections infiniment voisines, dont l'ensemble produirait des tensions capables de faire équilibre aux forces données. Connaissant ces mouvements, on en déduira la tension due isolément à chacun d'eux dans les divers éléments de fibre qui traversent la section considérée; puis ajoutant algébriquement pour chaque élément de fibre, d'une part les actions dues à l'extension et à la flexion, d'autre part celles qui produisent le glissement transversal simple et la torsion, on aurait pour ce même élément de fibre les deux forces résultantes qui le sollicitent longitudinalement et transversalement.

Sur les quatre quantités  $N$ ,  $P$ ,  $V$ ,  $X$  qui dépendent des forces extérieures appliquées à la pièce, il y en a une  $P$  que l'on désigne souvent sous le nom d'*effort tranchant*. En raison du rôle que joue  $V$  dans la déformation, nous l'appellerons *couple* ou *moment de torsion*; par un motif analogue,  $X$  sera le *couple* ou *moment de flexion*, ou encore le *moment fléchissant*. Quant à la force  $N$ , il ne semble pas très-utile de lui donner un nom spécial : celui de *tension totale* se comprend de lui-même.

19. *Cas particulier des pièces droites chargées transversalement.* — Soit, par exemple, un prisme soumis uniquement à des forces perpendiculaires à sa longueur et situées dans un même plan, qui sera supposé contenir aussi la fibre moyenne. Il s'agit d'étudier la distribution des forces moléculaires dans une section donnée quelconque  $CD$  (fig. 15). Soit  $P$  la résultante de ces forces pour la portion de prisme comprise entre la section  $CD$  et l'extrémité  $F$ ;  $H$  le point d'application de  $P$ . La force  $P$  pourra être remplacée par une force égale parallèle et de même sens, passant au centre d'élasticité  $O$  de  $CD$ , et par le couple  $(P, -P)$ , dont nous désignerons le moment par  $Ph$ .

Fig. 15.



On voit alors qu'il n'y aura dans  $CD$  qu'un glissement transversal et une flexion simples, relativement à la section très-voisine  $AB$ . Le premier de ces mouvements ayant pour étendue

$\frac{PL}{\sum G \omega}$  donnera lieu, sur chaque élément à la tension transver-

sale par unité de surface  $P \frac{G}{\sum G \omega}$  (n° 14). Le second s'effectuera

autour d'un axe conjugué, dans l'ellipse centrale d'inertie, avec l'intersection mutuelle des plans  $(P, -P)$  et  $CD$ ; sa grandeur sera, en conservant les notations du n° 16, exprimée par

$\frac{PhL \sin \delta}{r^2 \sum E \omega}$ ; enfin la tension longitudinale qu'elle produit dans

chaque fibre, par unité de surface, sera  $E \alpha \frac{Ph \sin \delta}{r^2 \sum E \omega}$ . Elle changerait de signe avec  $\alpha$ , c'est-à-dire (n° 16) qu'il y aurait exten-



sion d'un côté de l'axe de flexion et compression de l'autre; le sens du couple  $(P, -P)$  indique d'ailleurs facilement le sens de la rotation prise par CD, et par suite celles des fibres qui sont allongées, ainsi que celles qui sont raccourcies.

Ordinairement on néglige l'action de glissement  $P \frac{G}{\Sigma G \omega}$ . Il est rare que cela ait de graves inconvénients en pratique; cependant il ne faut pas perdre de vue l'existence de cette action: parfois elle subsiste seule, et alors c'est à elle qu'il faut songer quand on fixe les dimensions de la section CD. Par exemple, si P est une force unique appliquée au prisme, il est clair que, pour une section faite en H,  $P/h$  serait nul et l'effort de glissement subsisterait seul.

On admet aussi le plus souvent l'hypothèse restreinte d'une pièce homogène, symétrique par rapport au plan qui passe par la fibre moyenne et contient les forces extérieures. En continuant à négliger le glissement transversal et appelant I le moment d'inertie de la section CD, calculé avec la valeur constante  $E=1$ , relativement à un axe mené en O perpendiculairement au plan de symétrie OPH, la tension positive ou négative par unité de surface produite par la flexion serait, pour un point quelconque,  $\frac{Phu}{I}$ .

Nous aurons occasion plus tard, dans un chapitre spécial, de revenir sur ces considérations que nous nous bornons ici à indiquer sommairement, et d'y ajouter alors des détails qui en feront mieux saisir la portée.

**20. Solides d'égale résistance.** — Supposons encore qu'au lieu d'une pièce rectiligne à section constante, nous ayons une pièce dont l'axe pourrait être soit droit, soit légèrement courbe, et dont la section pourrait varier progressivement et d'une manière lente. Alors on pourra considérer à part, chaque portion comprise entre deux sections très-voisines comme un prisme, et en déterminant ses tensions sous l'action de charges transversales, on arriverait aux formules du n° 19, dans lesquelles  $P/h$  désignerait toujours la somme des moments des forces comprises entre la section considérée et l'extrémité de

la pièce. Ainsi, dans le cas d'une pièce homogène et symétrique par rapport au plan des forces, la tension longitudinale serait exprimée généralement par  $\frac{Phu}{I}$ . D'un point à l'autre d'une même section, cette quantité varie et devient maximum en même temps que  $u$ ; d'une section à l'autre ce maximum peut en général varier avec  $Ph$ ,  $I$  et le maximum de  $u$ . Quand il est constant dans toutes les sections, on dit que la pièce ou le solide est d'égale résistance.

Montrons par quelques exemples comment cette condition concourt à déterminer la forme de la pièce. Soit une pièce à section rectangulaire de dimensions  $b$  et  $c$ , encastrée à une extrémité et supportant un poids unique  $P$  à l'autre.  $I$  sera ici égal à  $\frac{1}{12}bc^3$  (n° 6), la valeur maximum de  $u$  sera  $\frac{1}{2}c$ , et l'expression  $\frac{Phu}{I}$  aura pour maximum dans chaque section  $\frac{6Ph}{bc^2}$ . Ainsi l'on devra satisfaire à la condition

$$\frac{6Ph}{bc^2} = \text{constante.}$$

Cette équation entre trois variables  $h$ ,  $b$ ,  $c$  ne suffit pas pour fixer tout à fait la forme de la pièce, car on pourrait se donner  $b$  ou  $c$  en fonction de  $h$  et en conclure l'autre également en fonction de  $h$ . Si, par exemple, le solide a toujours la même épaisseur mesurée perpendiculairement au plan passant par  $P$  et la fibre moyenne,  $b$  étant constant,  $\frac{h}{c^2}$  le sera aussi, et par conséquent dans ce plan le profil de la pièce serait une parabole, c'est-à-dire que les hauteurs  $c$  des sections successives croîtraient comme les ordonnées d'une parabole dont le sommet serait sur la force  $P$ . Ce résultat est d'ailleurs subordonné à ce que l'on néglige les actions dues au glissement, ce qui permet de réduire à zéro la valeur de  $c$  près du point d'application de la force  $P$ : en pratique cette réduction ne pourrait pas avoir lieu, et il faudrait renforcer le solide aux environs du point dont il s'agit.

Si la charge, au lieu d'être unique, était uniformément répar-

tie suivant la longueur,  $p$  étant sa valeur par mètre courant, le moment  $P h$  serait  $\frac{1}{2} p h^2$ . Il faudrait donc poser

$$\frac{3 p h^2}{b c^2} = \text{constante},$$

et dans le cas de  $b$  constant,  $\frac{h}{c}$  serait une constante, c'est-à-dire que la parabole serait remplacée par une ligne droite.

En revenant au cas de la charge unique, si, au lieu de supposer  $b$  constant, on prenait  $\frac{b}{c}$  constant et égal à un nombre donné  $K$ , on aurait

$$\frac{6 K p h}{c^3} = \text{constante};$$

on voit que la parabole du second degré serait remplacée par une parabole du troisième degré.

Les exemples pourraient être multipliés à l'infini : nous nous en tiendrons à ceux qui précèdent.

Nous allons maintenant traiter avec quelques détails un cas particulier du problème de la résistance des prismes, qui nous fournira des résultats intéressants.

**§ IV. -- Développement de la solution générale du problème posé au § III, pour le cas où les actions moléculaires se réduisent à une force unique normale au plan de la section.**

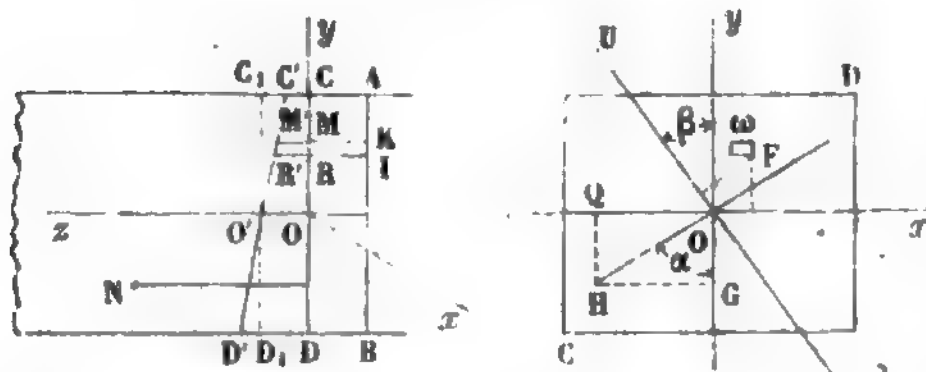
**21. Expressions analytiques de la tension en chaque point.**

— Lorsque toutes les forces qui sollicitent un prisme entre la section où l'on veut connaître les actions moléculaires et une extrémité, se réduisent à une seule, parallèle aux arêtes, il faut dans la solution générale donnée au n° 18 supposer  $P = 0$ ,  $V = 0$ . Alors les quatre mouvements relatifs de la section  $CD$  par rapport à la section très-voisine  $AB$  (fig. 14) se réduisent à deux : 1° une translation  $\frac{NL}{\Sigma E \omega}$  parallèle à  $ON$  ; 2° une rotation  $\frac{NL \sin \delta}{r^2 \Sigma E \omega}$  autour d'un axe situé dans le plan  $CD$ . Ces deux mouvements tendent tout simplement à allonger ou raccourcir les

éléments de fibre ; par suite l'élasticité transversale n'est pas mise en jeu, et il n'y a dans toute l'étendue de CD que des tensions longitudinales, positives ou négatives. Il s'agit maintenant d'exprimer analytiquement la valeur de la tension pour un point quelconque de CD, ce qui se réduit à trouver l'allongement total de chaque fibre en fonction des coordonnées  $x$  et  $y$  qui déterminent sa position relativement à deux axes rectangulaires tracés dans le plan de la section.

Soit  $N$  la force donnée appliquée en H dans le plan CD (fig. 16).

Fig. 16.



Désignons par  $X, x, y, \alpha, \beta, \gamma, \delta, a, b, r, L, E, \omega, u$ , les quantités déjà désignées ainsi au n° 16. La force  $N$  appliquée en H pouvant être remplacée par une

autre égale et parallèle dirigée suivant  $Oz$  et par un couple  $(N, -N)$  situé dans le plan  $OzH$ , le mouvement de la section CD par rapport à AB se composera (comme on l'a déjà re-

marqué) de la translation  $\overline{OO'} = \frac{NL}{\Sigma E \omega}$  qui amènerait CD en  $C_1 D_1$ ,

et d'une rotation  $\frac{XL \sin \delta}{r^2 \Sigma E \omega}$  autour de l'axe OU conjugué de OH

dans l'ellipse centrale d'inertie de CD, qui ferait passer cette section à sa position finale  $C' D'$ . En vertu de la translation,

toutes les fibres s'allongeront de  $\frac{NL}{\Sigma E \omega}$ ; il suffit d'ajouter à cet

effet celui qui est produit par la rotation, ce qui donnera au total, en posant  $\overline{OH} = n$ , remplaçant  $X$  par  $Nn$ , et désignant par  $l$  l'allongement cherché,

$$l = \frac{NL}{\Sigma E \omega} \left( 1 + \frac{n \sin \delta}{r^2} u \right);$$

or  $n \sin \delta$  n'est autre chose que la valeur particulière de la variable  $u$  pour le point H; nous la désignerons par  $u_1$  et nous pourrons écrire

$$l = \frac{NL}{\Sigma E \omega} \left( 1 + \frac{u u_1}{r^2} \right);$$

la tension correspondante  $t$  par unité de surface sera  $\frac{E l}{L}$  ou bien

$$(7) \quad t = \frac{NE}{\Sigma E \omega} \left( 1 + \frac{uu_1}{r^2} \right).$$

Voici encore deux expressions de cette quantité, utiles à connaître. Si l'on appelle  $p$  le demi-diamètre de l'ellipse centrale d'inertie dirigé suivant OH, et  $v$  la distance d'un point quelconque du plan, à l'axe OU, comptée parallèlement à OH, on aura

$$u = v \sin \delta,$$

et l'on sait (n° 4) que  $r = p \sin \delta$  : on en déduit sans peine

$$\frac{uu_1}{r^2} = \frac{vv_1}{p^2},$$

et, par suite,

$$(8) \quad t = \frac{NE}{\Sigma E \omega} \left( 1 + \frac{vv_1}{p^2} \right).$$

Soient maintenant  $\xi, \eta$  les coordonnées du point où la ligne OH est rencontrée par une parallèle à OU passant au point F;  $x_1, y_1$  les coordonnées du point H où agit la force N. Les diamètres OH et OU étant conjugués dans l'ellipse centrale d'inertie, les angles  $\alpha$  et  $\beta$ , qu'ils font avec l'axe des  $y$ , satisfont (n° 16) à la relation

$$\tan \beta \tan \alpha = \frac{b^2}{a^2},$$

et comme  $\tan \alpha = \frac{x_1}{y_1}$ , on a

$$\tan \beta = \frac{b^2 y_1}{a^2 x_1}.$$

L'équation de la droite menée au point F parallèlement à OU sera donc de la forme

$$x = -\frac{b^2 y_1}{a^2 x_1} y + \text{constante},$$

c'est-à-dire la quantité  $a^2 x_1 x + b^2 y_1 y$  et, par suite,  $\frac{xx_1}{b^2} + \frac{yy_1}{a^2}$  seront des constantes pour tous les points de cette parallèle.



Ceci posé, remarquons que OH coupant l'ellipse en un point défini par les coordonnées  $x = p \sin \alpha$  et  $y = p \cos \alpha$ , la substitution de ces valeurs dans l'équation de l'ellipse donne

$$\frac{\sin^2 \alpha}{b^2} + \frac{\cos^2 \alpha}{a^2} = \frac{1}{p^2},$$

ou bien

$$\frac{vv_1 \sin^2 \alpha}{b^2} + \frac{vv_1 \cos^2 \alpha}{a^2} = \frac{vv_1}{p^2}.$$

Or, on a

$$v \sin \alpha = \xi, \quad v_1 \sin \alpha = x_1, \quad v \cos \alpha = \eta, \quad v_1 \cos \alpha = y_1;$$

donc

$$\frac{vv_1}{p^2} = \frac{\xi x_1}{b^2} + \frac{\eta y_1}{a^2} = \frac{xx_1}{b^2} + \frac{yy_1}{a^2}.$$

La formule (8) peut donc encore s'écrire

$$(9) \quad t = \frac{NE}{\Sigma E \omega} \left( 1 + \frac{xx_1}{b^2} + \frac{yy_1}{a^2} \right).$$

**22. Remarques sur les signes à donner aux quantités algébriques entrant dans les formules précédentes.** — Dans les trois formules (7), (8) et (9) la tension de la fibre moyenne est toujours exprimée par  $\frac{NE'}{\Sigma E \omega}$ , en nommant  $E'$  la valeur particulière de  $E$  pour le point  $O$ ; comme  $E'$  et  $\Sigma E \omega$  sont des quantités essentiellement positives, pour que la formule puisse donner un résultat négatif quand il s'agit d'une pression, on voit que  $N$  devra recevoir le signe  $+$  ou le signe  $-$  suivant que cette force, transportée parallèlement à elle-même au point  $O$ , tendrait à écarter ou à rapprocher les deux sections infiniment voisines  $CD$ ,  $AB$ . Les lignes  $u$  et  $v$  doivent être positives d'un côté de  $OU$  et négatives de l'autre, puisqu'elles sont proportionnelles aux allongements positifs et négatifs dus à la flexion; peu importe d'ailleurs le sens adopté comme positif, car si on le changeait,  $u$  et  $u_1$ , ou bien  $v$  et  $v_1$ , changeraient à la fois de signe, et les produits  $uu_1$  et  $vv_1$  conserveraient le leur. Quant aux quantités  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $x$ ,  $y$ , elles suivent les conventions admises dans la Géométrie analytique, moyennant quoi les transforma-

tions employées pour passer de la formule (8) à la formule (9) ont toute la généralité désirable.

23. *Lignes de niveau.* — Pour tous les points de CD situés sur une parallèle à l'axe OU, l'allongement proportionnel sera le même, et la tension par unité de surface n'y variera qu'en raison des variations que pourrait éprouver le coefficient E. Pour cette raison, les parallèles à OU menées dans le plan CD s'appellent *lignes de niveau*. Leur direction est connue à priori comme celle de OU, quand on donne le point d'application H de la force N, puisque cette direction, conjuguée de OH dans l'ellipse centrale d'inertie, n'est autre que celle de la tangente à cette ellipse, au point situé sur OH; leur équation générale est

$$\frac{xx_1}{b^2} + \frac{yy_1}{a^2} = \text{constante.}$$

24. *Centre des tensions; axe neutre.* — Nous donnerons le nom de *centre des tensions* au point H par lequel passe nécessairement la résultante des actions moléculaires puisqu'elles font équilibre à la force donnée N.

La tension positive ou négative en un point quelconque d'une

section CD (*fig. 17*) étant représentée par la formule (7) (n° 21),

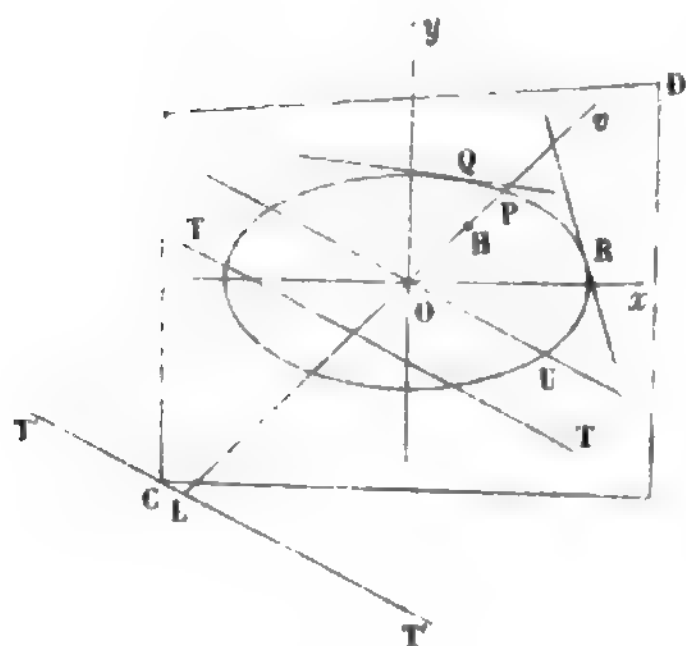
$$t = \frac{NE}{\Sigma E\omega} \left( 1 + \frac{uu_1}{r^2} \right),$$

déterminons une ligne TT dont la distance  $u_2$  à l'axe OU (ligne de niveau passant au centre d'élasticité) satisfasse à la relation

$$1 + \frac{u_1 u_2}{r^2} = 0;$$

nous obtiendrons une ligne située au delà de OU par rapport au centre des tensions, car  $u_2$  et  $u_1$  sont nécessairement de signes contraires. La distance entre le centre d'élasticité et cette ligne a pour valeur absolue  $\frac{r^2}{u_1}$ . Si TT traverse la section,

Fig. 17.



toutes les fibres situées sur son passage n'éprouveront ni pression ni tension, puisque  $t = 0$ . Par ce motif, nous appelons **TT** *axe neutre* dans la section CD; ce qui précède en détermine complètement la position.

**25. L'allongement d'une fibre élémentaire est proportionnel à sa distance à l'axe neutre.** — Les fibres rencontrées par l'axe neutre ne s'allongent et ne se raccourcissent pas, puisqu'elles éprouvent un effort nul. Donc, si l'on se reporte à la *fig. 16*, dans laquelle AB et CD représentent des sections infiniment voisines, et C'D' la position prise par CD relativement à AB, quand la force N a produit son effet, on voit que l'axe neutre est précisément l'intersection des plans CD, C'D'. Donc aussi l'écartement perpendiculaire de ces deux plans en un point quelconque, ou l'allongement de la fibre élémentaire contenant ce point, est proportionnel à sa distance à l'axe neutre. On voit aussi que, par suite des positions relatives du centre d'élasticité, du centre des tensions et de l'axe neutre, les fibres élémentaires situées du même côté de cet axe que le centre des tensions éprouvent une action de même nature que celle supportée par la fibre élémentaire moyenne, tandis que c'est le contraire qui a lieu pour les fibres élémentaires situées du côté opposé. La nature de l'action exercée sur la fibre moyenne étant connue à priori (n° 22), cette considération sera souvent utile pour savoir s'il y a pression en tension en un point donné.

Dans le cas où le coefficient d'élasticité E serait le même pour toutes les fibres élémentaires, on pourrait dire que la tension en un point, par unité de surface, serait proportionnelle à sa distance à l'axe neutre. Dans le cas le plus général, cette tension serait proportionnelle au produit de E par cette même distance.

**26. Analogie du centre des tensions avec le centre de percussion.** — Nous allons maintenant démontrer que le centre des tensions H (*fig. 17*) est identique avec le centre de percussion de la surface CD, tournant autour de l'axe neutre TT, pourvu qu'on attribue à chaque élément superficiel une densité égale au coefficient d'élasticité. En effet, le centre de percussion dont il s'agit n'est autre chose qu'un point par lequel passe

la résultante des forces d'inertie tangentiellles qui se développeraient dans une rotation de la surface autour de TT, sans vitesse initiale; puisque, d'après le principe de d'Alembert, ces forces d'inertie doivent faire équilibre à une force unique appliquée au centre de percussion. Dans la rotation d'un corps solide, la force d'inertie tangentielle d'une molécule est proportionnelle à sa masse et à sa distance à l'axe; donc à l'élément  $\omega$  correspondra une force d'inertie perpendiculaire au plan CD, et proportionnelle au produit de  $E\omega$  par sa distance à TT. Or la tension totale du même élément est proportionnelle au même produit (n° 25) et dirigée suivant la même ligne. On a donc là deux groupes de forces parallèles appliquées aux mêmes points, et les forces du premier groupe sont dans un rapport constant avec celles du second; donc les résultantes coïncident en direction, ce qui prouve le théorème énoncé.

L'analogie entre la question que nous traitons et celle du mouvement qu'une impulsion communiquerait à la surface CD, matérialisée conformément à la convention ci-dessus, n'est pas bornée à la coïncidence qui vient d'être signalée. Imaginons, en effet, une impulsion agissant suivant la direction projetée au point H. Puisque l'axe TT rendu fixe n'éprouverait pas de pression, on peut lui restituer sa liberté sans altérer le mouvement produit, qui sera, par conséquent, une rotation instantanée autour de cette ligne. Les vitesses des différents points seront les mêmes sur une parallèle à TT, et proportionnelles à la distance entre cette parallèle et TT. On sait, de plus, que la vitesse du centre de gravité serait la même qu'en y transportant l'impulsion parallèlement à elle-même.

Or ces propriétés sont précisément celles que nous avons reconnues aux allongements des diverses fibres élémentaires traversant la surface CD. Il y a nullité des vitesses et des allongements sur la même ligne TT, égalité sur les parallèles à TT dans chacun des deux groupes; enfin, nous avons vu précédemment que la tension au centre d'élasticité est  $\frac{NE'}{\Sigma E\omega}$ , absolument comme si la force N y agissait, propriété qui ressemble à celle du mouvement du centre de gravité d'un corps.

Cette analogie remarquable pourrait servir de base à l'éta-

blissement de l'une des formules qui donnent la valeur de la tension par unité de surface en chaque point; mais cette marche semble trop indirecte et trop peu naturelle pour être préférée à la méthode, très-simple d'ailleurs, dont nous avons fait usage.

**27. Recherche générale du centre de pression d'une surface plane, plongée dans un liquide pesant et homogène.** — En supposant que le coefficient d'élasticité soit constant dans toute l'étendue de la surface CD (*fig. 17*), il y aura en chaque point une tension par unité de surface proportionnelle à l'ordonnée de ce point mesurée jusqu'à un certain plan, comme on l'a vu au n° 25. Ce plan contient l'axe neutre TT. Maintenant imaginons que la même surface CD soit plongée dans un liquide pesant et homogène, et que la ligne TT se trouve dans le plan horizontal de niveau ou la pression du liquide serait nulle. Les choses étant ainsi disposées, il est visible que la tension par unité de surface en un point est proportionnelle à la pression qui serait produite par l'immersion dans l'eau (pourvu cependant que la surface fût entièrement plongée), car, à cause de la constance du coefficient d'élasticité, ces deux forces sont l'une et l'autre proportionnelles à la distance qui sépare leur point d'application de l'axe neutre. Donc puisque les deux groupes sont composés de forces parallèles, les points où la résultante de chacun d'eux coupe le plan CD se confondent.

On voit aisément, d'après cette considération, comment la théorie que nous avons exposée dans ce § conduirait à la détermination générale du centre de pression d'une surface plane plongée dans un liquide pesant et homogène. En effet, la ligne TT est connue : c'est l'intersection du plan CD de la surface donnée avec le plan horizontal de niveau où la pression s'annule. La question est donc ramenée à trouver un centre de tension, connaissant l'axe neutre correspondant. Pour cela, on construira l'ellipse centrale d'inertie de la surface considérée comme homogène (à cause de l'invariabilité de E); on cherchera le diamètre conjugué des horizontales (lignes de niveau) de la surface, et l'on aura ainsi une ligne passant par le point cherché. On achèvera sans peine de le déterminer en se fondant sur la relation donnée au n° 24, entre les distances du centre de gravité à l'axe neutre et à la ligne de niveau passant par le centre des tensions, distances dont on connaît le produit.

Nous ne pouvons pas nous étendre davantage sur ce sujet, qui est trop en dehors du but que nous nous proposons.

**28. Positions diverses de l'axe neutre quand le centre des tensions varie. Noyau central d'une section.** — Lorsque le cen-



tre des tensions  $H$  (*fig. 17*) varie de position en partant du centre d'élasticité et s'éloignant indéfiniment sur le rayon vecteur  $Ov$ , la direction des lignes de niveau reste la même (n° 23), mais l'axe neutre change. Sa distance au centre d'élasticité, exprimée par  $\frac{P^2}{n_1}$  (n° 24), varie depuis l'infini jusqu'à zéro.

Ainsi lorsque  $H$  sera très-près de  $O$ , l'axe neutre rencontrera le prolongement de  $Ov$  à une très-grande distance, qui diminuera progressivement et deviendra nulle à la limite, lorsque  $H$  s'éloignera indéfiniment. Il y aura donc une position particulière  $H'$  de ce point, telle que l'axe neutre correspondant  $T'T'$  n'ait qu'un point  $C$  commun avec la section  $CD$ , qu'il laissera tout entière d'un même côté. La formule (8) permet de calculer  $OH'$ , car, en reprenant les notations du n° 21, on a, pour la ligne de niveau  $T'T'$ ,

$$v = -\overline{OL};$$

donc, puisque  $t = 0$  sur cette ligne, on doit avoir

$$1 - \frac{\overline{OH'} \cdot \overline{OL}}{P^2} = 0, \quad \text{d'où} \quad \overline{OH'} = \frac{P^2}{\overline{OL}}.$$

D'une manière analogue, par l'application des formules (9) et (7), on obtiendrait soit une relation entre les coordonnées de  $H'$ , soit sa distance à la ligne  $OC$ . Il y aura ainsi plusieurs procédés pour trouver  $H'$ .

Sur chaque rayon vecteur partant du centre de gravité, il y aura un point analogue; et le lieu de ces points constituera une courbe ou un contour polygonal fermé. L'axe neutre coupera ou ne coupera pas la surface  $CD$ , suivant que le centre des tensions sera à l'extérieur ou à l'intérieur de ce contour; dans le second cas, tous les éléments superficiels seront pressés ou tendus, suivant la direction de la résultante  $N$  qui agit sur le prisme dont  $CD$  est une section; la nature de l'effort sera partout la même qu'au centre d'élasticité. Nous appellerons *noyau central de la section* la portion d'aire située à l'intérieur de la courbe ou du contour dont nous venons de parler.

Lorsque la surface  $CD$  est un polygone convexe, comme dans la *fig. 17*, le noyau central est également terminé par un

contour polygonal. En effet, menons dans l'angle des axes coordonnés opposé à celui qui contient le sommet C, deux tangentes à l'ellipse centrale d'inertie, respectivement parallèles aux deux côtés qui se coupent en C. Soient R et Q les points de contact. Tant que le centre des tensions sera compris entre les côtés de l'angle QOR, les lignes de niveau auront une direction intermédiaire entre celle des deux tangentes que nous venons de construire, car cette direction sera celle d'une tangente menée entre Q et R (n° 23). Il suit de là que les lignes de niveau couperont à la fois, soit les côtés partant de C, soit leurs deux prolongements, et si l'axe neutre touche le périmètre extérieur en un point unique, ce ne pourra être qu'un sommet C. Appelons  $x'$  et  $y'$  les coordonnées de ce point,  $x_1$  et  $y_1$  celles du centre des tensions, et exprimons par la formule (9) que la tension est nulle en C; nous trouverons

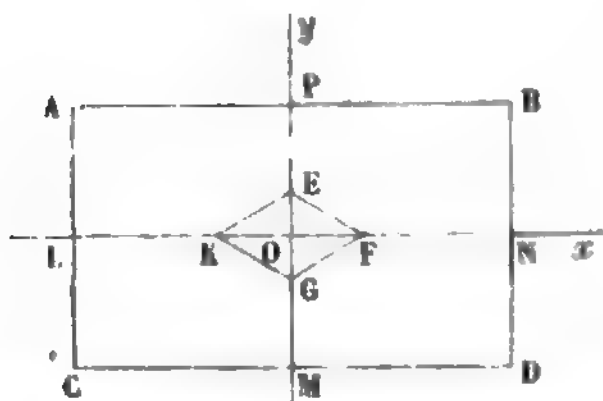
$$(7) \quad 1 + \frac{x_1 x'}{b^2} + \frac{y_1 y'}{a^2} = 0.$$

Cette équation étant du premier degré en  $x_1$  et  $y_1$ , et devant s'appliquer entre les positions OQ et OR du rayon vecteur, à tous les centres des tensions situés sur le contour du noyau central, on voit que dans l'angle QOR ce noyau central sera terminé par une droite que représente l'équation (7). A chaque sommet répondra de même une autre droite dans le contour du noyau central, et l'ensemble de ces droites constituera un polygone.

Voici maintenant divers exemples de la détermination du noyau central de quelques surfaces homogènes.

1°. *Rectangle homogène.* — Soit donné le rectangle ABCD (fig. 18)

Fig. 18.



dont les dimensions sont  $\overline{AB} = l$  et  $\overline{AC} = h$ . Les axes principaux d'inertie au centre de gravité sont les lignes  $Oy$ ,  $Ox$  menées parallèlement aux côtés du rectangle (n° 3). Si l'on applique les considérations générales que nous venons de développer, pour le cas où la surface est polygonale, on trouvera que

dans l'angle  $yOx$  le noyau central est limité par une droite, dont on aura

l'équation en substituant dans l'équation (7) les valeurs

$$x' = -\frac{l}{2}, \quad y' = -\frac{h}{2}, \quad b^2 = \frac{l}{12} l^2, \quad a^2 = \frac{l}{12} h^2 \quad (\text{n}^\circ 6),$$

ce qui donnera

$$1 - \frac{6x_1}{l} - \frac{6y_1}{h} = 0.$$

Cette équation est celle de la droite qui joint les points E et F, pris de telle manière que  $\overline{OE} = \frac{1}{6} \overline{AC}$  et  $\overline{OF} = \frac{1}{6} \overline{AB}$ . Dans chacun des trois autres angles formés par les axes  $Ox$ ,  $Oy$ , on trouvera une droite située dans une position semblable, en sorte que le noyau central a pour périmètre un losange dont les sommets divisent les médianes LN, PM en trois parties égales.

2°. *Couronne circulaire ou cercle plein homogène.* — Soient R le rayon extérieur,  $r$  le rayon intérieur. On sait (n° 6) que l'ellipse centrale est un cercle de rayon  $\frac{1}{2} \sqrt{R^2 + r^2}$ ; par conséquent tous les demi-diamètres de cette ellipse ont pour carré  $\frac{1}{4} (R^2 + r^2)$ . D'ailleurs la quantité désignée par  $\overline{OL}$  au commencement du n° 28 est ici le rayon R du cercle extérieur; donc  $\frac{1}{4} \frac{R^2 + r^2}{R}$  représente la distance constante du centre de gravité au périmètre du noyau central. Ce périmètre est donc un cercle concentrique à ceux qui limitent la section donnée; son rayon est sensiblement  $\frac{1}{2} R$  si la couronne est mince; il est  $\frac{1}{4} R$  si le cercle est plein.

3°. *Couronne elliptique comprise entre deux ellipses semblables ou ellipse pleine homogène.* — Appelons, comme au n° 6,  $l$  le grand axe et  $h$  le petit axe de l'ellipse extérieure,  $ml$  et  $mh$  les dimensions homologues de l'ellipse intérieure: les axes de l'ellipse centrale d'inertie seront (n° 6)

$$\frac{1}{2} l \sqrt{1 + m^2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} h \sqrt{1 + m^2}.$$

Ainsi donc, si l'on désigne par P un demi-diamètre quelconque de la première ellipse,  $\frac{1}{2} P \sqrt{1 + m^2}$  sera le demi-diamètre homologue dans l'ellipse centrale d'inertie, lequel est désigné par  $p$  au commencement du n° 28. Ce diamètre coupera le contour du noyau central à une distance du centre d'élasticité égale à  $\frac{(\frac{1}{2} P \sqrt{1 + m^2})^2}{P}$ , c'est-à-dire à  $\frac{1}{4} P (1 + m^2)$ . Donc enfin le noyau central aura pour périmètre une ellipse semblable à celles

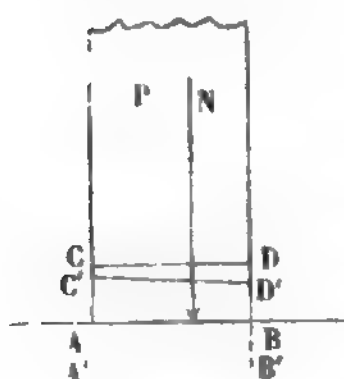
qui terminent la section; le rapport de similitude avec la plus grande sera  $\frac{1}{4}(1+m^2)$ , soit environ  $\frac{1}{2}$  ou bien  $\frac{1}{4}$ , suivant qu'il s'agit d'une couronne très-mince ou d'une section pleine.

**§ V. — Répartition d'une charge totale sur la base d'un prisme n'ayant pas d'adhérence avec son appui.**

**29. Généralités. Deux cas à distinguer. Solution du premier cas.** — Lorsqu'un corps reposant sur un plan est soumis à une ou plusieurs forces dont la résultante est normale au plan, et qu'il n'y a pas d'adhérence entre ce corps et son appui, pour que l'équilibre existe, on sait qu'il y a deux conditions nécessaires: 1° la résultante doit passer à l'intérieur du polygone convexe formé par les points d'appui; 2° elle doit tendre à serrer le corps contre sa base. Ces conditions devront être remplies par le prisme dont nous nous proposons d'étudier l'équilibre intérieur.

Supposons donc un corps P sensiblement prismatique aux environs de la section normale AB (*fig. 19*), à laquelle il se termine et sur laquelle il est porté. Les forces exercées sur ce corps donnent une résultante N satisfaisant aux conditions ci-dessus énoncées. On demande la pression en un point quelconque de la surface AB.

Fig. 19.



Il y a dans ce problème deux cas à distinguer. Le prisme étant fictivement prolongé en A' B' dans l'intérieur de son support, de manière à ce que AB devienne ainsi une section normale intermédiaire, il peut arriver, premièrement, que la théorie exposée au § IV conduise à reconnaître l'existence de pressions dans toutes les fibres élémentaires qui traversent AB; c'est ce qui aura lieu si la force N agit à l'intérieur du noyau central (n° 28), car, d'une part, toutes les fibres supporteront des actions de même nature, et, d'autre part, ces actions seront bien des pressions, puisque, d'après le sens admis pour N, la fibre moyenne doit être comprimée. Or il est naturel de supposer que les choses se passeront encore de même, si la prolongation fictive du prisme est remplacée par un appui

ne faisant pas corps avec lui, car ce défaut d'adhérence n'empêche pas les actions répulsives nécessaires à l'équilibre de s'exercer tout aussi bien que s'il s'agissait d'un corps continu. Ainsi donc, le cas où la force agirait à l'intérieur du noyau central de la base n'a pas besoin d'une étude particulière; il se trouve compris dans la théorie du § IV, qui permettra d'en calculer toutes les circonstances.

Mais il en sera tout autrement quand la force  $N$ , tout en satisfaisant aux conditions générales d'équilibre, rencontrera la base en dehors du noyau central. Si l'on voulait procéder encore comme nous venons de le faire, et appliquer la même théorie, on trouverait dans la base un axe neutre qui la couperait; pour les points situés du même côté que la force par rapport à cet axe neutre, on trouverait une pression, comme pour la fibre moyenne (n° 25), et, de l'autre côté de cet axe, on serait conduit à reconnaître une tension. Or cela ne peut pas être admis, car l'appui qui supporte le prisme est bien capable d'exercer sur lui des actions répulsives, mais il ne saurait, par hypothèse, donner lieu à des forces attractives, puisque l'adhérence est nulle. Les points qui ne sont pas pressés n'ont pas de tension à supporter. La base  $AB$  doit donc alors se diviser en deux parties, l'une résistant à des pressions, l'autre ne résistant à aucun effort.

**30. Solution générale du deuxième cas.** — On voit, par les considérations précédentes, qu'une nouvelle théorie est nécessaire pour résoudre le problème posé au n° 29, dans le second cas, celui où la résultante des charges agit en dehors du noyau central. Nous aurons recours à une hypothèse qui est une simple extension de celles que nous avons énoncées au n° 18; nous supposerons que, après la déformation produite par les forces, les points d'une section normale  $CD$ , très-rapprochée de  $AB$ , sont encore dans une même section  $C'D'$  du prisme primitif, cette hypothèse ne devant s'appliquer qu'à celle des deux parties de la section où il existe des pressions, puisque dans l'autre les fibres ne varient pas de longueur.

Il résulte immédiatement de cette hypothèse que, dans la partie pressée, la pression par unité de surface suivra les





sion de la surface PBQ située au-dessus, en ayant égard à sa densité variable qui sera supposée, en chaque point, égale au coefficient d'élasticité  $E$ . Le lieu des centres ainsi obtenus formera une courbe BC partant du noyau central pour aller au périmètre extérieur; le point C répondrait à l'axe  $SS'$  et le point B à l'axe  $S''S'''$ . En faisant varier la direction des lignes  $SS'$ , on aura d'autres courbes analogues qui rayonneront dans toutes les directions autour du noyau central; on arrivera donc, par tâtonnement, à faire passer l'une de ces courbes par le point donné H, et alors il est visible que le problème sera résolu.

34. *Tracé de la tangente à la courbe des centres de percussion relatifs à une série d'axes parallèles.* — Proposons-nous de mener une tangente à la courbe BC, dont nous venons de parler, courbe formant le lieu des centres de percussion d'une série de segments interceptés dans la surface APBQ par des lignes parallèles, ces centres étant relatifs à une rotation autour de la ligne droite qui est pour ainsi dire la corde du segment. Nous pouvons résoudre cette question fort simplement dans l'hypothèse d'une surface homogène, c'est-à-dire d'une surface dans laquelle le coefficient  $E$  ne varierait pas d'un point à l'autre.

Soient

PQ l'un de ces axes parallèles;

M le point correspondant de la courbe BC, c'est-à-dire le centre de percussion du segment PBQ relativement à l'axe PQ;

$Dx$  et  $Dy$  les axes coordonnés, dont l'un,  $Dx$ , est une des positions limites de PQ;

$r$  la distance  $\overline{DG}$  de PQ à l'axe des  $x$ ;

$h$  la distance des deux positions limites de PQ, ou la longueur  $DS''$ ;

$x'$ ,  $x''$  les abscisses des deux points où une ligne  $P'Q'$  parallèle aux  $x$ , menée entre PQ et  $S''S'''$ , coupe le périmètre de la surface;

$x_1$ ,  $y_1$ , les coordonnées du centre de percussion du segment;

$x_2$ ,  $y_2$ , les coordonnées de son centre de gravité;

$\omega$  l'un des éléments superficiels déterminés dans la surface de ce segment par des parallèles aux axes coordonnés infiniment voisines les unes des autres;

$\Sigma$  une somme étendue à tous les éléments  $\omega$ .

Les formules du n° 7 permettent d'avoir les coordonnées du centre de percussion en prenant pour axes les lignes GQ et Gy; pour les avoir relativement aux axes coordonnés que nous avons choisis, il suffira de

changer  $y$  en  $y - \eta$ , et l'on aura

$$\begin{aligned} (y_1 - \eta) \Sigma E(y - \eta) \omega &= \Sigma E(y - \eta)^2 \omega, \\ x_1 \Sigma E(y - \eta) \omega &= \Sigma E(y - \eta) x \omega. \end{aligned}$$

$E$  disparaît, puisque nous supposons une surface homogène;  $\omega$  peut être remplacé par  $dxdy$ , et l'on trouve

$$\begin{aligned} (y_1 - \eta) \int \int (y - \eta) dxdy &= \int \int (y - \eta)^2 dxdy, \\ x_1 \int \int (y - \eta) dxdy &= \int \int x(y - \eta) dxdy. \end{aligned}$$

- Si l'on effectue une première intégration pour les éléments qui constituent une tranche parallèle à l'axe des  $x$ , ces deux équations deviendront

$$\begin{aligned} (y_1 - \eta) \int_{\eta}^h (x' - x'') (y - \eta) dy &= \int_{\eta}^h (y - \eta)^2 (x' - x'') dy, \\ x_1 \int_{\eta}^h (x' - x'') (y - \eta) dy &= \frac{1}{2} \int_{\eta}^h (y - \eta) (x'^2 - x''^2) dy. \end{aligned}$$

Sous le signe  $\int$  nous n'avons que des fonctions de  $y$ , et, après l'intégration effectuée, nous n'aurons plus, dans ces deux équations, que des fonctions de  $\eta$ : nous pouvons donc différentier, par rapport à cette variable, suivant des règles connues, ce qui donne

$$\begin{aligned} \left( \frac{dy_1}{d\eta} - 1 \right) \int_{\eta}^h (x' - x'') (y - \eta) dy &- (y_1 - \eta) \int_{\eta}^h (x' - x'') dy \\ &= -2 \int_{\eta}^h (y - \eta) (x' - x'') dy, \\ \frac{dx_1}{d\eta} \int_{\eta}^h (x' - x'') (y - \eta) dy &- x_1 \int_{\eta}^h (x' - x'') dy \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\eta}^h (x'^2 - x''^2) dy. \end{aligned}$$

Pour simplifier ces équations, nous remarquerons, en premier lieu, que

$\int_{\eta}^h (x' - x'') (y - \eta) dy$  représente le moment total de la surface PBQ par rapport à la ligne PQ; secondement, que  $\int_{\eta}^h (x' - x'') dy$  est cette surface

elle-même; enfin que  $\frac{1}{2} \int_{\eta}^h (x'^2 - x''^2) dy$  est l'expression de son moment par rapport à l'axe des  $y$ . Donc on a

$$\begin{aligned} \int_{\eta}^h (x' - x'') dy &= \Sigma \omega, \\ \int_{\eta}^h (x' - x'') (y - \eta) dy &= (y_2 - \eta) \Sigma \omega, \\ \frac{1}{2} \int_{\eta}^h (x'^2 - x''^2) dy &= x_2 \Sigma \omega; \end{aligned}$$

et la substitution de ces valeurs dans les deux dernières équations donne

$$\frac{dy_1}{d\eta} (y_2 - \eta) = y_1 - \eta - (y_2 - \eta) = y_1 - y_2,$$

$$\frac{dx_1}{d\eta} (y_2 - \eta) = x_1 - x_2.$$

Par suite

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2};$$

d'où résulte cette conséquence intéressante que la tangente cherchée est la ligne qui joint le centre de percussion du segment PBQ à son centre de gravité.

Au point B, la valeur  $\frac{dy_1}{dx_1}$  se présente sous la forme  $\frac{0}{0}$ ; mais, en prenant le rapport des différentielles de  $y_1 - y_2$  et de  $x_1 - x_2$ , on trouve pour ce point

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{dy_1 - dy_2}{dx_1 - dx_2} = \frac{dy_2}{dx_2},$$

ce qui montre que le lieu des centres de percussion se raccorde tangentiellement avec le lieu des centres de gravité.

**32. Exemples simples de l'application de la théorie précédente.** — Nous allons appliquer la théorie du § V (nos 29 et 30) à quelques exemples simples, dans lesquels nous supposerons que la matière est homogène, ou du moins que le coefficient d'élasticité ne varie pas d'une fibre élémentaire à l'autre, dans toute l'étendue de la surface d'appui.

1°. *Rectangle homogène pressé par une force qui agit sur l'un des deux axes de symétrie.* — Distinguons deux cas, comme





alors la ligne séparative de la portion résistante du rectangle et de la portion non pressée,  $H'$  sera le centre de percussion de la surface  $BDQR$  tournant autour de  $QR$  (n° 30); donc on aura

$$\overline{SH'} = \frac{2}{3} \overline{PS} \text{ (n° 9), ou bien } \overline{PS} = 3 \overline{PH'},$$

ce qui détermine  $QR$ . Cela posé, on observera que la pression maximum se produit sur l'arête  $BD$  par la même raison que ci-dessus, et que cette pression est double de celle qui a lieu au centre de gravité de  $BDQR$ , puisque ce point est deux fois moins loin de l'axe neutre que le côté  $BD$ . Donc la pression maximum a pour valeur  $\frac{2N}{\overline{BD} \cdot \overline{PS}}$ , car  $\frac{N}{\overline{BD} \cdot \overline{PS}}$  est (n° 22) la

pression au centre d'élasticité. En appelant encore  $n$  le rapport  $\frac{\overline{OH'}}{\overline{OM}}$ , on aura

$$\overline{PS} = 3 \overline{PH'} = 3 \overline{OM} (1 - n);$$

par suite, la pression maximum

$$p = \frac{4}{3} \frac{N}{\overline{BD} \cdot 2 \overline{OM}} \cdot \frac{1}{1 - n}, \text{ ou } p = \frac{N}{\Omega} \cdot \frac{4}{3(1 - n)}.$$

Cette formule convient aux cas où la précédente cesse de s'appliquer, c'est-à-dire à ceux où l'on a  $n > \frac{1}{3}$ .

2°. *Cercle homogène.* — Soit donné le cercle de rayon  $\overline{OL}$  (*fig. 10*),  $H$  le centre des tensions, auquel est appliquée une force  $N$  parallèle aux arêtes du prisme dont le cercle donné est la base. Le coefficient d'élasticité est invariable dans l'étendue de cette base. On demande comment variera la pression maximum par unité de surface quand  $H$  changera de distance au centre  $O$  du cercle.

Soient  $\Omega$  la surface du cercle et  $R$  son rayon; soit de plus  $n$  le rapport  $\frac{\overline{OH}}{\overline{OL}}$ . Lorsque l'on aura  $n < \frac{1}{4}$ , la force agira dans le noyau central (n° 28), et toute la surface  $\Omega$  sera utilisée pour supporter la pression (n° 29). Nous en concluons immédiatement que la pression par unité de surface au point  $O$  sera  $\frac{N}{\Omega}$  (n° 22). D'un autre côté, l'ellipse

centrale d'inertie étant un cercle de rayon  $\frac{1}{2}R$  (n° 6), les lignes de niveau sont des perpendiculaires à OH (n° 23) et l'axe neutre est distant du point O d'une quantité égale à  $\frac{(\frac{1}{2}R)^2}{OH} = \frac{R}{4n}$ . La fibre la plus pressée étant celle du point L, le plus éloigné de l'axe neutre (n° 23), on aura la pression maximum  $p$  par unité de surface, en augmentant celle qui a lieu en O dans le rapport  $\frac{R}{4n}$  à  $\frac{R}{4n} + R$ , car c'est bien là le rapport des distances des deux points à l'axe neutre. On trouve ainsi

$$p = \frac{N}{\Omega} (1 + 4n).$$

La question devient plus complexe quand H n'est plus dans le noyau central du cercle, ce qui arrive lorsque  $n$  dépasse la valeur 0,25. Soit alors MP la ligne séparative des deux parties du cercle, l'une le segment MLP résistant à la force N, l'autre ne supportant ni pression ni tension. Le point H devant être (n° 30) le centre de percussion du segment MLP tournant autour de MP, si l'on appelle  $\varphi$  l'angle POL, on aura (n° 9)

$$n = \frac{1}{4} \frac{\varphi - \sin \varphi \cos \varphi - \frac{2}{3} \sin^3 \varphi \cos \varphi}{\sin \varphi - \varphi \cos \varphi - \frac{1}{3} \sin^3 \varphi},$$

relation dans laquelle on connaît  $n$ , et d'où l'on pourra déduire  $\varphi$  par tâtonnement. Après avoir obtenu cet angle, il est clair que MP sera déterminée, et la question reviendra à trouver la pression maximum produite dans le prisme ayant pour base le segment MLP par une force appliquée au point H, tellement placé, que l'axe neutre correspondant est MP.

Pour arriver à la solution, nous avons encore besoin de connaître la surface  $\Omega'$  du segment MLP et la distance de son centre de gravité au centre du cercle. Appelant  $m$  le rapport de cette distance au rayon, on trouve aisément

$$m = \frac{2}{3} \frac{\sin^3 \varphi}{\varphi - \sin \varphi \cos \varphi},$$

$$\Omega' = R^2 (\varphi - \sin \varphi \cos \varphi).$$

Donc la pression moyenne sur la surface  $\Omega'$ , ou bien  $\frac{N}{\Omega'}$ , s'exerce sur un élément dont la distance à l'axe neutre MP a pour valeur  $-R \cos \varphi + mR$ ; la pression maximum  $p$ , s'exerçant en L à la distance maximum de MP, aura pour valeur

$$\frac{N}{\Omega'} \cdot \frac{QL}{R(m - \cos \varphi)},$$

ou bien

$$\frac{N}{\Omega} \cdot \frac{\Omega}{\Omega'} \cdot \frac{1 - \cos \varphi}{m - \cos \varphi};$$

ou enfin

$$P = \frac{N}{\Omega} \cdot \frac{\pi (1 - \cos \varphi)}{\sin \varphi - \varphi \cos \varphi - \frac{1}{2} \sin^3 \varphi}.$$

*Comparaison des résultats obtenus pour le rectangle et pour le cercle.*

— Supposons deux surfaces homogènes, l'une circulaire, l'autre en forme de rectangle. Le quotient de la charge totale divisée par l'aire de la surface est le même de part et d'autre; la charge agit sur le rectangle en un point de l'un des axes de symétrie; enfin le rapport désigné par  $n$  dans les deux exemples traités ci-dessus a la même valeur pour le cercle et pour le rectangle. Il s'agit de voir celle des deux surfaces où la pression maximum sera la plus forte.

Pour faire cette comparaison, on se rappellera les résultats numériques donnés au n° 9, concernant quelques valeurs correspondantes de  $n$  et de  $\varphi$  pour le cercle. On a trouvé notamment que pour  $\varphi$  égal à

$$\pi, \quad \frac{3\pi}{4}, \quad \frac{\pi}{4}, \quad \frac{\pi}{2}, \quad 0,$$

on avait respectivement pour  $n$  les valeurs

$$0,25, \quad 0,335, \quad 0,589, \quad 0,876, \quad 1,000.$$

Ces valeurs, introduites dans les formules données ci-dessus, conduiront aux résultats suivants :

VALEURS DE $n$ .	PRESSIONS MAXIMA	
	Dans le cercle.	Dans le rectangle.
0,000	$1,000 \cdot \frac{N}{\Omega}$	$1,000 \cdot \frac{N}{\Omega}$
0,250	$2,000 \cdot \frac{N}{\Omega}$	$1,750 \cdot \frac{N}{\Omega}$
0,335	$2,378 \cdot \frac{N}{\Omega}$	$2,005 \cdot \frac{N}{\Omega}$
0,589	$4,712 \cdot \frac{N}{\Omega}$	$3,244 \cdot \frac{N}{\Omega}$
0,876	$27,139 \cdot \frac{N}{\Omega}$	$10,753 \cdot \frac{N}{\Omega}$
1,000	$\infty$	$\infty$

On voit que si  $n$  s'écarte de 0, c'est-à-dire que si la force n'est pas

appliquée très-près du centre de gravité des sections transversales, le cercle est de plus en plus désavantageux relativement au rectangle; mais cette conclusion est naturellement subordonnée aux conditions admises dans l'énoncé du problème, savoir l'homogénéité des surfaces et la situation du centre des tensions sur l'une des lignes médianes du rectangle.

3°. *Ellipse pleine homogène.* — Considérons l'ellipse pleine et homogène MLGPI (fig. 11) soumise à une force appliquée en H. Nous n'avons rien de particulier à dire sur le cas où ce point serait à l'intérieur du noyau central, et nous renverrons aux considérations générales du n° 29. Supposons donc cette condition non remplie : alors l'axe neutre MP divisera la surface en deux segments, dont un seul, celui où se trouve le centre des tensions, subira l'action de la force. Pour rentrer dans les cas d'application des formules données dans le § IV, il suffit de trouver la ligne MP; et, cela fait, les pressions se détermineront comme si le segment MIP n'existait pas (n° 30). On a vu au n° 30 que H devait être le centre de percussion du segment MLP, relatif à l'axe MP; d'un autre côté, on sait (n° 9) que le centre de percussion d'un segment d'ellipse, relativement à sa corde, se trouve sur le diamètre conjugué à cette corde : donc, en menant une corde conjuguée du diamètre OH, on aura la direction de la ligne inconnue MP. On pourra donc achever de déterminer cette ligne par un tâtonnement simple, car on sait trouver le centre de percussion d'un segment d'ellipse relativement à sa corde; il n'y aura qu'à faire varier cette corde, dont la direction est connue, jusqu'à ce que le centre de percussion du segment MLP soit précisément le point donné H; on sera dispensé de faire varier sa direction.

Voici encore, pour trouver la position de MP, l'indication d'un procédé qui, au fond, n'est autre chose que l'application des tâtonnements dont nous venons de parler. Imaginons que, après avoir trouvé MP, on transforme l'ellipse en cercle, comme nous l'avons fait au n° 9, pour trouver le centre de percussion du segment MLP. H', O' et L' étant les points transformés qui répondent à H, O et L,  $n$  le rapport  $\frac{\overline{O'H'}}{\overline{O'L'}}$  et  $\varphi$  l'angle PO'L', on aura  $n$  en fonction de  $\varphi$  (n° 9). Or  $n$  est aussi égal au rapport connu  $\frac{\overline{OH}}{\overline{OL}}$ ; donc on pourra, par tâtonnement, calculer  $\varphi$ . Alors on connaîtra  $\frac{\overline{O'Q}}{\overline{O'L'}}$ , c'est-à-dire  $\frac{\overline{OQ}}{\overline{OL}}$ , et, par suite, Q sera connu.

4°. *Rectangle homogène pressé par une force agissant en dehors des axes de symétrie.* — Le cas où la force agit à l'intérieur du noyau central ne présentant rien de particulier, nous admettrons tout de suite que le centre des tensions est en dehors de cette partie du rectangle ou tout au

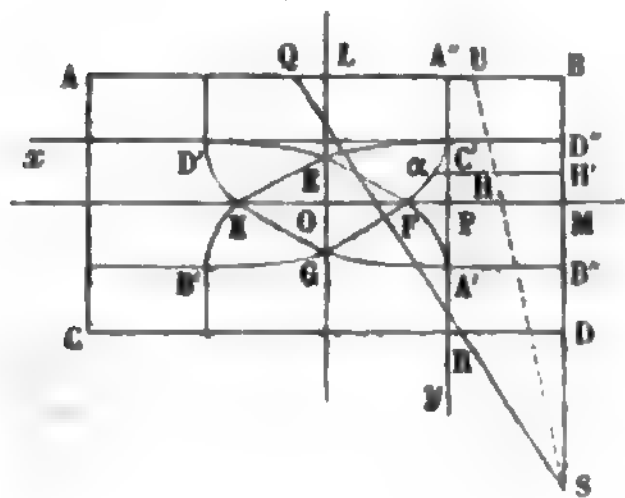
moins sur son contour. La détermination de l'axe neutre peut alors devenir très-complexe, car elle exigerait, en général, la solution d'équations de degré supérieur; mais elle est encore très-simple dans divers cas particuliers que nous allons examiner.

D'abord si le centre des tensions se trouve sur le contour même du noyau central, l'axe neutre passant alors par un sommet du rectangle (n° 28), il est clair que le sommet opposé sera le point le plus éloigné de cet axe, et qu'il en sera à une distance double de celle du centre de la surface. Donc la pression maximum est, dans ce cas, double de la pression moyenne (n° 25) (\*).

Supposons encore que le point  $H''$ , où est appliquée la résultante des pressions (*fig. 21*), se trouve dans un rectangle  $A'BC'D'$ , dont les côtés  $\overline{BA'}$ ,  $\overline{BD'}$  seraient respectivement le quart de  $\overline{BA}$  et de  $\overline{BD}$ . Pour avoir la ligne tellement placée, que le segment qu'elle intercepte dans le rectangle ait  $H''$  pour centre de percussion relativement à cette ligne, on prolongera  $BH''$  jusqu'à la rencontre de la médiane  $MP$  en  $Z$ ; on joindra  $DZ$ ; puis, ayant pris  $\overline{BZ'} = 2\overline{BH''}$ , on mènera par le point  $Z'$  une parallèle à  $DZ$ . Cette parallèle sera la ligne cherchée, et l'on n'aura plus qu'à déterminer la répartition de la force sur la surface complètement pressée du triangle homogène qu'elle forme avec  $BA$  et  $BD$  (n° 30). En effet, nous avons montré au n° 9 que le centre de percussion d'un triangle homogène, relativement à sa base, est au milieu de la ligne joignant le milieu de cette base avec le sommet opposé; or, d'après la construction précédente,  $H''$  satisfait évidemment à la condition dont il s'agit.

Il est un cas où la solution du problème dépend d'une équation du second degré : c'est celui dans lequel la portion pressée de la base

Fig. 22.



$ABCD$  (*fig. 22*) est un trapèze  $QRBD$ , ce qui arrivera quand le centre des tensions  $H$  satisfera à une condition que nous allons fixer tout à l'heure. On a vu, en effet (n° 9), que le trapèze  $QRBD$  aurait pour centre de percussion relatif à l'axe de rotation  $QR$  le point  $H$  déterminé de la manière suivante. Il faudrait joindre le point de rencontre  $S$  des lignes  $QR$ ,

(\*) Cette propriété s'étend facilement à toutes les surfaces homogènes douées d'un centre géométrique (point qui divise en deux parties égales toutes les cordes que l'on y fait passer).



BD, avec le point U pris sur BQ, de sorte que  $\overline{BU} = \frac{1}{3} \overline{BQ}$ ; puis, posant  $\overline{BD} = h$  et  $\overline{BS} = mh$ , on aurait, pour la distance de H à BQ,

$$z = \frac{h}{4} \cdot \frac{6m^2 - 8m + 3}{3m^2 - 3m + 1},$$

quantité variable entre  $\frac{h}{4}$  et  $\frac{h}{2}$ . Or, dans le problème actuel, H est un point donné, car c'est celui où l'on suppose que passe la pression résultante supportée par ABCD; par suite on connaît  $z$ , et l'équation précédente, du second degré en  $m$ , permet de trouver  $m$ , ce qui fait connaître le point S. S étant connu, on joint SH et l'on prolonge cette ligne jusqu'en U; on prend  $\overline{QB} = 3\overline{BU}$ , on joint SQ et l'on a ainsi l'axe neutre cherché.

Maintenant, il s'agit d'établir à quelle condition la surface réellement pressée sera un trapèze. Pour cela remarquons d'abord que le rapport  $\frac{z}{h}$  ne dépend que de  $m$ , de sorte que si l'on imagine diverses lignes analogues à SQ partant du point S, les points H correspondants seront sur une parallèle HH' à AB. Lorsque SQ atteindra la position SA, H viendra en une position  $\alpha$ , et il est clair que le centre de pression pourra se trouver en tel point qu'on voudra sur  $\alpha H'$ , entre  $\alpha$  et H', sans que la portion de ABCD réellement pressée cesse d'être un trapèze. En faisant descendre le point S depuis la position D, sur le prolongement de BD, on obtiendra pareillement une série d'horizontales telles que  $\alpha H'$ , toutes situées entre C'D" et FM. De même lorsque S montera sur DB prolongé à partir de B, on obtiendra les horizontales symétriques, entre A'B" et FM. Ainsi la figure mixtiligne C'FA'B"D" forme une aire dans laquelle peut être situé le point H pour donner lieu à une surface d'appui trapèze. En faisant varier S sur l'un des trois autres côtés du rectangle, on trouverait une autre figure mixtiligne adjacente à ce côté.

On peut aisément, d'après les explications qui viennent d'être données, trouver l'équation de l'une quelconque des huit branches de courbe, telle que C'F ou FA': cherchons, par exemple, celle de C'F, en choisissant pour axes des coordonnées les lignes C'x, C'y, menées par le point C' parallèlement aux côtés du rectangle. Le point  $\alpha$  doit d'abord être sur une ligne droite joignant le point S et un point pris sur AB, à la distance  $\frac{l}{3}$  du sommet B; cette droite a pour équation

$$y + \frac{h}{4} = \frac{3mh}{l} \left( x - \frac{1}{12} l \right).$$

Ensuite, la distance  $y + \frac{h}{4}$  de  $\alpha$  à la base AB a une valeur connue

$$y + \frac{h}{4} = \frac{h}{4} \cdot \frac{6m^2 - 8m + 1}{3m^2 - 3m + 1}.$$

Éliminant  $m$  entre ces deux relations, nous avons l'équation de la courbe C'F :

$$\frac{y^3}{h^3} + \frac{3xy^2}{lh^2} + \frac{3x^2y}{l^2h} - \frac{xy}{lh} - \frac{3x^2}{2l^2} - \frac{1}{16} \frac{x}{l} = 0.$$

Cette équation montre : 1° que le point F et les trois analogues E, G, K sont les quatre sommets du noyau central de ABCD, car pour  $y = \frac{1}{4}h$ , on a  $x = \frac{1}{12}l$ ; 2° que C'F se raccorde tangentiellement en C' et F avec les lignes droites C'γ et FG, car pour  $x = 0$  et  $x = \frac{1}{12}l$  on trouve respectivement

$$\frac{dy}{dx} = \infty \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{h}{l};$$

3° que C' est un point d'inflexion, car il est aisé de vérifier que la dérivée  $\frac{d^2x}{dy^2}$  est nulle pour  $x = 0$ . Des raccordements et inflexions analogues ont lieu pour les sept autres branches de courbe.

En résumé, si le centre de pression se trouve placé dans l'un des quatre petits rectangles tels que A''BC'D'', la surface d'appui sera un triangle; s'il se trouve dans un des quatre pentagones mixtilignes tels que C'FA'B''D'', la surface d'appui sera un trapèze; enfin, cette surface sera le rectangle tout entier quand le centre de pression tombera dans le noyau central, et un pentagone, s'il tombe dans un des triangles mixtilignes tels que C'FE. Ce dernier cas est le seul qui exigerait la solution d'équations d'un degré supérieur pour trouver la position de l'axe neutre.

Il est encore intéressant de savoir quelle fraction de l'aire totale du rectangle occupent les quatre triangles mixtilignes tels que C'FE : nous y arriverons en cherchant d'abord l'aire C'FP. On a

$$\text{aire C'FP} = \int_0^{\frac{h}{4}} x dy,$$

ou bien, en posant  $x' = \frac{x}{l}$ ,  $y' = \frac{4y}{h}$ ,

$$\text{aire C'FP} = A = \frac{1}{4}lh \int_0^1 x' dy'.$$

Or l'équation de la courbe, transformée en  $x'$  et  $y'$ , devient

$$y'^3 + 12x'y'^2 + 48x'^2y' - 16x'y' - 96x'^2 - 4x' = 0,$$

d'où l'on tire

$$x' = \frac{3y'^2 - 4y' - 1 + \sqrt{-3y'^4 + 10y'^2 + 8y' + 1}}{24(2 - y')};$$

il s'agit donc de calculer

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{4}lh \int_0^1 x' dy' \\ &= \frac{1}{96}lh \int_0^1 \frac{3y'^2 - 4y' - 1 + \sqrt{-3y'^4 + 10y'^2 + 8y' + 1}}{2 - y'} dy'. \end{aligned}$$

En premier lieu on aura

$$\begin{aligned} \int \frac{3y'^2 - 4y' - 1}{2 - y'} dy' &= \int \left( -3y' - 2 + \frac{3}{2 - y'} \right) dy' \\ &= -\frac{3}{2}y'^2 - 2y' - 3 \log \text{hyp}(2 - y'); \end{aligned}$$

donc

$$\int_0^1 \frac{3y'^2 - 4y' - 1}{2 - y'} dy' = -\frac{7}{2} + 3 \log \text{hyp} 2.$$

Maintenant on remarquera que

$$-3y'^4 + 10y'^2 + 8y' + 1 = (y' + 1)^2 (2 - 3y'^2 + 6y' + 1);$$

on doit donc déterminer l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{(y' + 1) \sqrt{-3y'^2 + 6y' + 1}}{2 - y'} dy' = B.$$

À cet effet nous prendrons une variable auxiliaire  $\alpha$  liée à  $y'$  par l'équation

$$3(1 - y')^2 = 4 \sin^2 \alpha;$$

l'élimination de  $y'$  donne alors

$$\begin{aligned} B &= \frac{8}{\sqrt{3}} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3} - \sin \alpha}{\sqrt{3} + 2 \sin \alpha} \cos^2 \alpha d\alpha = \frac{8}{\sqrt{3}} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3} - \sin \alpha}{\sqrt{3} + 2 \sin \alpha} (1 - \sin^2 \alpha) d\alpha \\ &= \frac{8}{\sqrt{3}} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^3 \alpha - \sqrt{3} \sin^2 \alpha - \sin \alpha + \sqrt{3}}{2 \sin \alpha + \sqrt{3}} d\alpha \\ &= \frac{8}{\sqrt{3}} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left( \frac{1}{2} \sin^2 \alpha - \frac{3}{4} \sqrt{3} \sin \alpha + \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \sqrt{3} \frac{1}{2 \sin \alpha + \sqrt{3}} \right) d\alpha. \end{aligned}$$

On écrirait immédiatement la valeur de B, si l'on connaissait l'intégrale  $\int \frac{d\alpha}{2 \sin \alpha + \sqrt{3}}$ . Or on la ramène aux fractions rationnelles en posant  $\tan \frac{1}{2} \alpha = u$ , ce qui donne

$$\begin{aligned} \int \frac{d\alpha}{2 \sin \alpha + \sqrt{3}} &= \int \frac{2 du}{4u + \sqrt{3}(1+u^2)} = \int \frac{2\sqrt{3} du}{3u^2 + 4u\sqrt{3} + 3} \\ &= \int \frac{2 d(u\sqrt{3} + 2)}{(u\sqrt{3} + 2)^2 - 1} \\ &= \log \text{hyp} \frac{u\sqrt{3} + 1}{u\sqrt{3} + 3} + \text{const.} \\ &= \log \text{hyp} \frac{u\sqrt{3} + 1}{u + \sqrt{3}} + \text{const.} \end{aligned}$$

Enfin, si l'on rétablit  $\tan \frac{1}{2} \alpha$  à la place de  $u$ , qu'on remplace  $\sqrt{3}$  par  $\tan \frac{\pi}{3}$ , et qu'on multiplie par  $\cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{1}{2} \alpha$  les deux termes de la fraction  $\frac{u\sqrt{3} + 1}{u + \sqrt{3}}$ , on trouve

$$\int \frac{d\alpha}{2 \sin \alpha + \sqrt{3}} = \log \text{hyp} \frac{\cos \left( \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \alpha \right)}{\sin \left( \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} \alpha \right)} + \text{const.}$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{8}{3} \sqrt{3} \int \frac{\sqrt{3} - \sin \alpha}{\sqrt{3} + 2 \sin \alpha} \cos^2 \alpha d\alpha &= \frac{2}{\sqrt{3}} (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha) + 6 \cos \alpha + \frac{5}{\sqrt{3}} \alpha \\ &\quad + 3 \log \text{hyp} \frac{\cos \left( \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \alpha \right)}{\sin \left( \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} \alpha \right)} + \text{const.}; \end{aligned}$$

et par suite l'intégrale définie B a pour valeur

$$B = \frac{7\pi}{3\sqrt{3}} - \frac{7}{2} + 3 \log \text{hyp} \frac{3}{2}.$$

Donc l'intégrale définie qui entre comme facteur dans A est égale à

$$B - \frac{7}{2} + 3 \log \text{hyp} 2 = \frac{7\pi}{3\sqrt{3}} - 7 + 3 \log \text{hyp} 3 = 0,5280$$

d'où résulte

$$A = \frac{1}{96} \cdot 0,5280 \cdot lh = 0,005500 \cdot lh.$$

L'aire C'FP étant connue, on en conclut l'aire totale des huit triangles mixtilignes analogues, laquelle est  $0,0440 \cdot lh$ ; puis, comme le noyau central occupe une aire égale à  $4 \cdot \frac{l}{6} \cdot \frac{h}{12}$  ou à  $0,0556 \cdot lh$ , on en déduit pour la surface totale des quatre triangles tels que C'FE, l'expression.

$$0,25 \cdot lh - 0,044 \cdot lh - 0,0556 \cdot lh = 0,1504 \cdot lh.$$

Ainsi donc la portion du rectangle où doit se trouver le centre des tensions pour que la surface d'appui devienne pentagonale n'occupe guère que la septième partie de la surface  $lh$  de ce rectangle.

Enfin nous indiquerons une solution approximative pour le cas où le centre de pression serait sur l'une des diagonales du rectangle, en  $H'''$  par exemple (*fig. 21*), dans la partie à laquelle répond une surface d'appui pentagonale. Soit VI l'axe neutre cherché; il faut que  $H'''$  soit le centre de percussion du rectangle tronqué VIABD tournant autour de VI. Or si l'on attribuait à cette ligne une position quelconque parallèle à AD, entre AD et la parallèle passant par le sommet C, le centre de percussion correspondant serait nécessairement sur la ligne BC, qui forme avec AD un système de diamètres conjugués de la surface rectangulaire (n° 8); pour l'axe neutre AD, on aurait la surface d'appui triangulaire ADB et le centre de percussion C' (n° 9); pour l'axe parallèle passant en C, la surface d'appui deviendrait le rectangle entier et le centre de percussion aurait passé au point où BO coupe la ligne EF du noyau central. Donc VI, auquel répond le centre de pression intermédiaire  $H'''$ , est une parallèle à AD, passant entre O et C. Pour achever de déterminer sa position, nommons

$m$  le rapport  $\frac{\overline{BU}}{\overline{BO}}$ , rapport dont la connaissance suffirait pour définir

le point U, et, par conséquent, la ligne cherchée VI;

$k$  le rapport  $\frac{\overline{UH'''}}{\overline{BO}}$ ;

$p$  le rapport donné  $\frac{\overline{BH'''}}{\overline{BO}}$ .

On sait (n° 8) que  $H'''$  est, en projection sur le plan de la figure, le centre de gravité d'un solide projeté sur VIABD et terminé à un plan passant par VI; or ce solide peut être considéré comme la différence entre le tétraèdre projeté sur XBY et deux tétraèdres semblables, égaux entre eux, qui se projettent sur les triangles XAI, VDY. Ces tétraèdres sont



dans le rapport des cubes des dimensions homologues; le premier étant représenté par  $\overline{BU}^3$ , chacun des deux autres le serait par  $\overline{OU}^3$ ; ou bien encore, le premier étant  $m^3$ , les autres auraient pour valeur commune  $(m-1)^3$ . Le centre de gravité du premier se projette au milieu de BU (n° 9); sa distance à XY, comptée parallèlement à la diagonale BC, serait donc  $\frac{1}{2}m \cdot \overline{BO}$ . De même les autres centres de gravité des deux autres seraient à la distance  $\frac{1}{2}(m-1) \cdot \overline{BO}$ , comptée suivant la même direction. Donc si l'on applique le théorème des moments relativement à VI, on aura

$$k[m^3 - 2(m-1)^3] = m^3 \cdot \frac{1}{2}m - 2(m-1)^3 \cdot \frac{1}{2}(m-1),$$

ou bien

$$k[m^3 - 2(m-1)^3] = \frac{1}{2}[m^4 - 2(m-1)^4];$$

d'ailleurs  $k = m - p$ : par conséquent  $p$  étant connu,  $m$  devrait se déduire de l'équation

$$(m-p)[m^3 - 2(m-1)^3] = \frac{1}{2}[m^4 - 2(m-1)^4].$$

Cette équation complète du quatrième degré se résout par approximation, en remarquant qu'on a, sans erreur sensible,

$$\frac{m^4 - 2(m-1)^4}{m^3 - 2(m-1)^3} = \frac{1}{3}(1 + m + m^2),$$

tant que  $m$  est compris entre 1 et 2. C'est ce que montre le tableau suivant, où A désigne le premier membre de l'égalité précédente et B le second:

Valeurs de $m$ .	Valeurs de A.	Valeurs de B.	Différence.	Erreur relative.
1,0	1,0000	1,0000	0,0000	0,0000
1,1	1,1015	1,1033	0,0018	0,0016
1,2	1,2093	1,2133	0,0040	0,0033
1,3	1,3252	1,3300	0,0048	0,0036
1,4	1,4489	1,4533	0,0044	0,0030
1,5	1,5800	1,5833	0,0033	0,0021
1,6	1,7179	1,7200	0,0021	0,0012
1,7	1,8625	1,8633	0,0008	0,0005
1,8	2,0130	2,0133	0,0003	0,0001
1,9	2,1700	2,1700	0,0000	0,0000
2,0	2,3333	2,3333	0,0000	0,0000
1.				5

Or le point U se trouvant nécessairement O et C;  $m$  ne peut varier que de 1 à 2; nous pouvons donc écrire simplement.

$$m - p = \frac{1}{6}(1 + m + m^2);$$

d'où nous tirerons

$$m = \frac{1}{2}[5 - \sqrt{3(7 - 8p)}].$$

Pour le point C', on a  $p = \frac{1}{2}$ , et, par suite,  $m = 1$ ; pour le point commun de OB et EF, on a  $p = \frac{5}{6}$  et  $m = 2$ ; ces deux valeurs de  $m$  répondant aux deux limites de  $p$  sont rigoureusement exactes. Dans l'intervalle, il y aura une erreur, toujours très-petite, comme on peut en juger par le tableau précédent. Cette erreur, insignifiante au point de vue pratique, aurait pu encore être réduite en posant

$$\frac{m^4 - 2(m-1)^4}{m^3 - 2(m-1)^3} = \alpha + \beta m + \gamma m^2,$$

et choisissant les constantes  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  de la manière la plus convenable; mais on serait ainsi tombé dans l'inconvénient d'introduire des coefficients plus compliqués dans les formules.

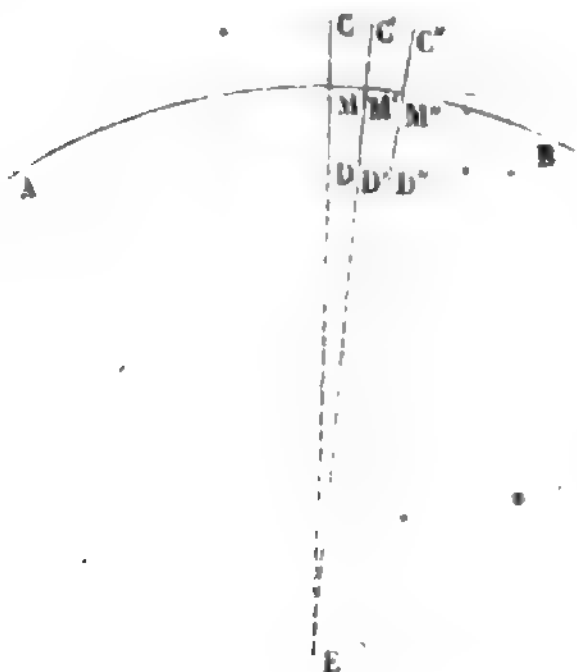
Quand  $m$  aura été calculé, on en dedra la distance  $\overline{BU}$ , puis la ligne VI, qui fait connaître la surface d'appui VIABD.

#### § VI. — Extension des théories précédentes à des corps non rigoureusement prismatiques.

33. *Forme d'une pièce droite ou courbe dans son état primitif. Fibre moyenne. Fibre élémentaire.* — Il faut d'abord définir d'une manière précise la forme des corps dont nous avons à nous occuper, alors qu'ils sont dans leur *état primitif*, c'est-à-dire dans un état idéal et purement abstrait où aucune force, pas même la pesanteur, n'agirait sur eux, en sorte que la tension des fibres serait nulle dans toutes les parties. Pour cela, prenons une ligne AB quelconque (*fig. 23*), supposée sans jarrets ni points multiples, et n'ayant dans son étendue qu'une faible torsion qui ne la fait pas beaucoup différer d'une courbe plane; imaginons la série de ses plans normaux et traçons dans chacun d'eux une aire assujettie aux conditions suivantes: 1° d'avoir son centre d'élasticité sur la courbe AB; 2° d'avoir,

parallèlement au plan osculateur de  $AB$ , des dimensions petites

Fig. 23.



en comparaison du rayon de courbure de cette courbe; 3° de varier dans sa forme d'une manière continue et lente, en sorte que si l'on passe du plan normal  $CD$  à un plan normal  $C'D'$  assez distant du premier pour que  $MM'$  soit une fraction notable de la longueur  $AB$ , les aires tracées dans ces deux plans soient assez peu diffé-

rentes et se trouvent placées à peu près de la même manière relativement aux plans osculateurs en  $M'$  et  $M''$ . Le solide, ainsi engendré, s'il est matérialisé et soustrait à toute force, constituera une pièce droite ou courbe dans son état primitif.

La courbe  $AB$  recevra le nom de *fibre moyenne* de la pièce, par analogie avec la définition, donnée au n° 15, de la fibre moyenne d'un prisme. De même nous appellerons *fibre élémentaire* le volume engendré par un élément superficiel de l'aire mobile, pendant une fraction infiniment petite de son parcours.

34. *Conséquence de la définition d'une pièce.*—Ainsi qu'on vient de le voir, dans la définition que nous avons donnée d'une pièce, nous n'avons pas exclu le cas d'une fibre moyenne à double courbure, ni celui des changements d'étendue et de figure de la section transversale, ni enfin le cas d'un arc engendré par une aire qui pendant son mouvement le long de la ligne directrice ne tournerait pas simplement autour d'axes perpendiculaires aux plans osculateurs successifs, mais encore autour des tangentes à la courbe  $AB$ , de manière à constituer une espèce de solide tordu. Toutefois ces divers écarts devront être renfermés dans de justes limites et ne pas s'opérer avec rapidité. Lorsque cette condition sera remplie, la partie de la pièce comprise entre deux sections infiniment voisines, normales à la fibre moyenne, pourra évidemment être considérée comme

très-peu différente d'un prisme droit. De plus, toutes les arêtes de ce prisme auront sensiblement même longueur, car la plus grande dimension de sa base, mesurée parallèlement au plan osculateur de la fibre moyenne, est petite par rapport au rayon de courbure (n° 33) : hypothèse d'où il résulte que la différence entre la plus longue et la plus courte arête du prisme dont il s'agit, est elle-même une petite fraction de l'élément de fibre moyenne compris entre les deux sections normales qui le terminent.

35. *Détermination de la tension en un point quelconque de la pièce, quand toutes les forces extérieures sont connues.* — Comme on peut le pressentir d'après les considérations présentées au n° 34, ce problème se ramène sans difficulté à celui qui a été résolu dans les §§ III, IV et V. Considérons en effet la portion de la pièce comprise entre deux plans normaux  $CD$ ,  $C'D'$  (*fig. 23*) très-voisins l'un de l'autre, mais d'ailleurs quelconques; elle peut être assimilée à un prisme droit dont toutes les fibres élémentaires auraient la longueur  $\overline{MM'}$  (n° 34). Ce prisme reste en équilibre sous l'action des forces extérieures qui lui sont directement appliquées, et des réactions qu'il reçoit dans les plans  $CD$ ,  $C'D'$ , de la part des molécules voisines de ces plans; or les réactions qui s'exercent en  $C'D'$  constituent nécessairement un système de forces équivalent aux forces extérieures appliquées entre  $C'D'$  et l'extrémité  $B$ , puisque la partie  $M'B$  reste aussi en équilibre; il en résulte que le prisme  $CDC'D'$  éprouve, dans sa base  $CD$ , des actions moléculaires capables de faire équilibre à toutes les forces extérieures qui sollicitent la pièce entre le point  $M$  et l'extrémité  $B$ . On pourra donc appliquer, pour trouver l'intensité et la nature de ces actions, la méthode développée aux §§ III, IV et V, pourvu que la nature particulière à la question ne rende pas inadmissibles les hypothèses sur lesquelles elle est fondée.

36. *Observation sur l'étendue de la déformation.* — A la vérité, pour appliquer cette méthode, il semble que l'on devrait connaître la figure d'équilibre affectée par la pièce dans son état définitif, après la déformation, tandis que l'on ne connaît ordinairement que la figure dans l'état primitif. Mais, dans

toutes les constructions jouissant d'une certaine stabilité, ces deux figures sont généralement très-peu différentes l'une de l'autre. En effet, des forces suffisantes pour altérer, par leur action permanente, l'élasticité de la matière, ne produisent encore que des allongements ou raccourcissements très-faibles; et il en est de même des variations de la température atmosphérique. Par exemple, s'il s'agit du fer, on sait que, sous une traction de 20 kilogrammes par millimètre carré, un prisme de fer ne s'allonge que de 0,001 de sa longueur primitive, et il est bien rare que dans les constructions on atteigne cette limite. De même, une variation de température de 36 degrés, relativement à la température initiale, ne produirait qu'une dilatation ou contraction de 0<sup>m</sup>,000366 par mètre de longueur. Pour d'autres matières que le fer, les chiffres changeraient, mais les conclusions resteraient les mêmes. Par conséquent, chaque fibre élémentaire variant très-peu en longueur, il est assez naturel d'admettre que la pièce elle-même ne se déformera pas beaucoup.

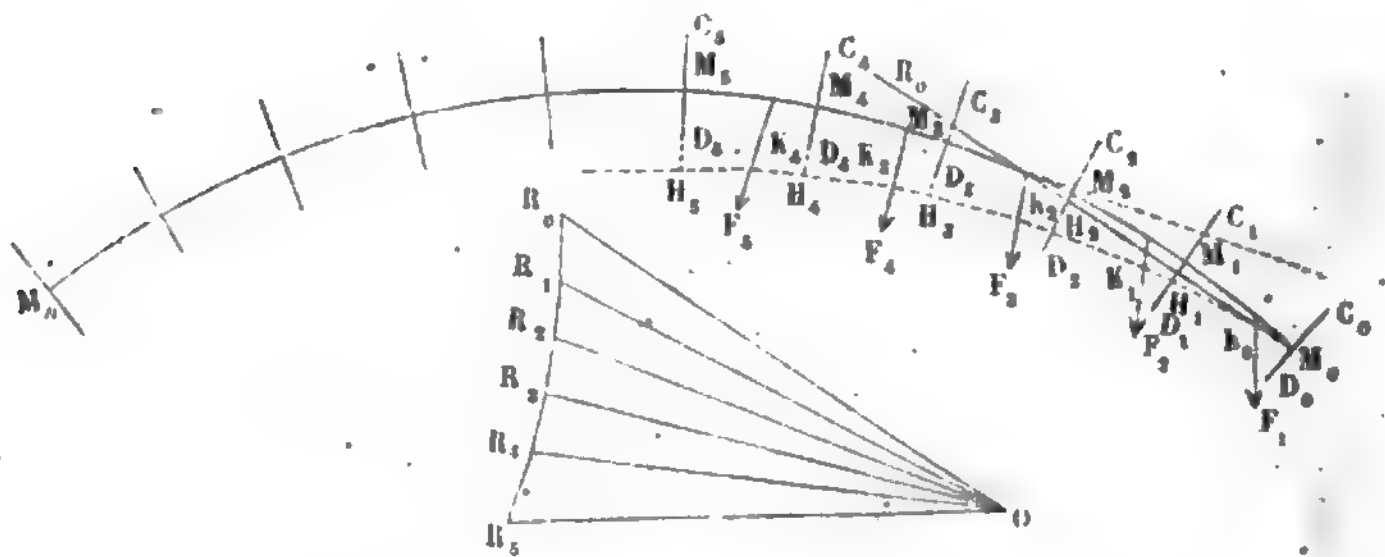
Toutefois, nous ne chercherons pas à dissimuler que ce raisonnement n'est pas entièrement rigoureux. Si l'on considère une pièce très-grande, de petits changements de longueur de toutes les fibres élémentaires peuvent, en s'accumulant, produire des effets sensibles sur la forme générale du corps. Mais alors, pour ne pas nous engager dans des calculs que personne n'a tentés jusqu'à présent, nous serons forcé de comprendre le fait dont il s'agit parmi les données et hypothèses de la question; le raisonnement que nous avons fait aura du moins pour résultat de montrer que cette hypothèse est plausible et qu'elle doit en effet se vérifier dans la plupart des cas. En conséquence, nous admettons que la pièce déformée diffère infiniment peu, quant aux dimensions et à la position, de ce qu'elle était dans son état primitif. Dès lors, il n'y aura aucune difficulté pour calculer ou construire géométriquement les données à introduire dans la théorie des §§ III, IV et V, au moyen de laquelle on déterminera les tensions dans la section CD; c'est ce que nous allons montrer pour un cas particulier.

### 37. *Usage de la courbe des pressions pour avoir la tension*



*d'un élément quelconque de fibre.* — On suppose que la fibre moyenne, indépendamment des conditions énoncées au n° 33, satisfasse encore à celle d'être dans un même plan, et, en second lieu, que les forces extérieures appliquées à une portion quelconque de la pièce, entre deux sections normales arbitraires, puissent être réduites à une force unique agissant dans ce plan, ou à un couple qui lui serait parallèle. Si l'on considère dans une telle pièce une section normale, quelconque  $C_3 D_3$  (*fig. 24*), on a vu tout à l'heure que les actions molé-

Fig. 24.



lares développées dans cette section doivent faire équilibre aux forces extérieures qui agissent entre le point  $M_3$  et l'extrémité  $M_0$ , c'est-à-dire à la résultante de ces forces. Pour appliquer immédiatement la théorie des §§ III, IV et V, tout se réduit à trouver cette résultante : c'est à quoi l'on parviendra facilement en procédant comme il suit.

Après avoir partagé la fibre moyenne  $M_0 M_5$  (*fig. 24*) en intervalles égaux ou inégaux  $M_0 M_1$ ,  $M_1 M_2$ ,  $M_2 M_3$ , etc., auxquels correspondent les sections normales  $C_0 D_0$ ,  $C_1 D_1$ ,  $C_2 D_2$ ,  $C_3 D_3$ , etc., supposons qu'on ait pu facilement réduire à une seule force toutes celles qui agissent entre deux sections consécutives, et qu'on ait obtenu de cette manière les forces  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$ ,  $F_4$ , etc.; supposons de plus que dans la section extrême  $C_0 D_0$  (mais non pas nécessairement au centre d'élasticité  $M_0$ ) agisse la force  $R_0$ . On mènera par un point  $O$  arbitraire la ligne  $OR_0$  parallèle et proportionnelle à la force  $R_0$ , et dans le même sens; par le point  $R_0$  on mènera  $R_0 R_1$  parallèle à la force  $F_1$ , et l'on prendra

la longueur  $\overline{R_0 R_1}$  proportionnelle à cette force et de même sens. On continuera de la même manière à construire le polygone  $R_0 R_1 R_2 R_3 \dots$ , dont les côtés successifs représentent en intensité, en direction, en sens et aussi dans leur ordre, les forces  $F_1, F_2, F_3$ , etc. Les propriétés bien connues du polygone des forces montrent immédiatement que les lignes  $\overline{OR_0}, \overline{OR_1}, \overline{OR_2}$ , etc., représentent à la même échelle, en intensité, direction et sens, les forces totales qui agissent respectivement sur les sections  $C_0 D_0, C_1 D_1, C_2 D_2$ , etc.

Il est nécessaire d'avoir non-seulement chaque résultante en grandeur, direction et sens, mais d'avoir aussi sa position réelle dans le plan. Or rien n'est plus facile, quand la construction précédente est effectuée. Par le point  $K_0$ , où la première résultante  $R_0$  coupe la première force  $F_1$ , on mènera  $K_0 K_1$  parallèle à  $OR_1$ ; cette ligne  $K_0 K_1$  coïncidera avec la position véritable de la seconde résultante  $OR_1$ , car cette résultante doit passer par le point de rencontre de  $R_0$  et de  $F_1$ . De même, par le point  $K_1$ , où la résultante dirigée suivant  $K_0 K_1$  coupe la seconde force  $F_2$ , on mènera  $K_1 K_2$  parallèle à  $OR_2$ , jusqu'à la rencontre de  $F_2$ ; puis par  $K_2$  la parallèle  $K_2 K_3$  à  $OR_3$ , et ainsi de suite. Les différents côtés du polygone ainsi formé ne seront autre chose que les résultantes successives, rétablies dans leur position véritable; et puisque l'on en connaît la grandeur et le sens, elles seront entièrement connues.

On déduira donc aisément de là le centre des tensions dans une section quelconque. En effet, ce point est l'intersection de la résultante qui correspond à la section dont il s'agit, avec le plan de cette section; ainsi pour la section  $C_1 D_1$  on aura le centre  $H_1$  déterminé par la rencontre de la résultante  $R_1$ , dirigée suivant  $K_1 K_2$  avec la trace  $C_1 D_1$  du plan de la section sur le plan de la fibre moyenne, qui est en même temps celui de la figure. On aurait d'une manière semblable les autres centres de tensions  $M_0, H_1, H_2, H_3$ , etc., dont le lieu géométrique constitue ce qu'on appelle communément la *courbe des pressions*. Il n'est peut-être pas sans utilité de faire remarquer que si les forces  $F_1, F_2, F_3$ , etc., ne provenaient pas d'une charge répartie d'une manière continue sur la longueur de la pièce, et si dans

une section, telle que  $C_2D_2$ , par exemple, agissait une force finie qui ne se subdivisât pas en une infinité de forces élémentaires distribuées sur une certaine étendue à droite et à gauche de  $C_2D_2$ , alors la courbe des pressions présenterait une discontinuité. On aurait d'abord une première branche, telle que  $M_0H_1H_2$ ; puis, la dernière résultante se combinant avec la force isolée qui agit en un point de  $C_2D_2$ , le centre des tensions passerait brusquement de  $H_2$  en un autre point  $H'_2$ , d'où partirait une seconde branche de courbe continue, allant jusqu'à une autre section dans laquelle une nouvelle force finie produirait une nouvelle discontinuité.

Il est clair qu'on pourrait remplacer les constructions géométriques par un calcul algébrique. Pour avoir la résultante  $R_3$ , par exemple, il suffirait de projeter sur deux axes rectangulaires pris dans le plan de la figure, toutes les forces agissant entre  $M_3$  et  $M_0$ , et de faire la somme algébrique des projections sur chaque axe. Cela ferait connaître l'intensité, la direction et le sens de la force  $R_3$ . Pour avoir sa position, il suffirait de calculer en outre la somme algébrique des moments des mêmes forces par rapport au point  $M_3$ .

Quand on aura, par l'une ou l'autre méthode, trouvé ces diverses résultantes, pour faire le calcul des tensions dans une section quelconque, telle que  $C_3D_3$ , par exemple, on projetera  $R_3$  sur la tangente en  $M_3$ , et sur la normale au même point. Cela donnerait, pour la section dont il s'agit, les quantités désignées par  $N$  et  $P$  au § III;  $V$  serait nul, et  $X$  égal au moment de  $R_3$  relativement à  $M_3$ . On verra plus loin des exemples de ces calculs.

38. *Restrictions que doit éprouver la théorie générale dans certains cas exceptionnels.* — Il y a des cas dans lesquels les hypothèses énoncées au n° 18, sur lesquelles repose toute la théorie des §§ III, IV et V, sont à priori entièrement dénuées de vraisemblance. Par exemple, si une colonne mince en métal, supportant un poids à sa partie supérieure, s'appuie sur un large socle en pierre, on pourrait, par les formules que nous avons données, déterminer la pression en chaque point d'une section quelconque de la colonne; mais il ne conviendrait pas

de les appliquer à la recherche des pressions sur la surface supérieure du socle. On comprend, en effet, que, par l'effet de la déformation, cette surface ne doit pas rester plane, comme nous l'avons supposé, mais qu'il doit se produire une certaine dépression aux environs des points qui reçoivent directement l'action de la colonne. Mais on conçoit aussi que cet effet doit être local, et qu'il doit tendre à s'effacer de plus en plus à mesure qu'on s'éloigne du point où il se produit. Ainsi, on ne devrait faire usage des formules que pour étudier la manière dont se répartit la pression dans une section du socle, prise à une distance suffisamment grande de la surface supérieure.

En général, une exception analogue aura lieu pour tous les points des pièces prismatiques où seraient directement appliquées des forces considérables; mais, en même temps, on sait que ces points sont ordinairement renforcés par un excédant de matière, dont les constructeurs comprennent parfaitement la nécessité. Par conséquent, il n'y a pas trop à se préoccuper de ce qui se passe dans ces circonstances exceptionnelles, car elles ont peu d'influence sur la résistance générale de la pièce. Nous avons voulu seulement, par les observations qui précèdent, mettre le lecteur en garde contre une extension trop grande qu'il serait peut être tenté de donner aux formules: il convient toujours de se rappeler les hypothèses fondamentales, et d'examiner, dans chaque application, jusqu'à quel point elles sont susceptibles d'être vérifiées, sans quoi l'on s'exposerait à des mécomptes fâcheux, dont la théorie ne devrait pas, équitablement, être rendue responsable:

39. *Exemple numérique de la détermination des tensions.* — Nous allons montrer par un exemple l'application de la marche indiquée à la fin du n° 37. Cet exemple se rapporte à un projet de pont qui avait été fait pour la ville de Brest, par M. Tritschler, architecte. Le pont devait être soutenu par deux arcs en tôle à fibre moyenne circulaire, placés en amont et en aval. L'ensemble de ces deux arcs présentait une section rectangulaire de 3 mètres de hauteur sur une largeur réduite 0<sup>m</sup>,048 (\*); ce nombre,

---

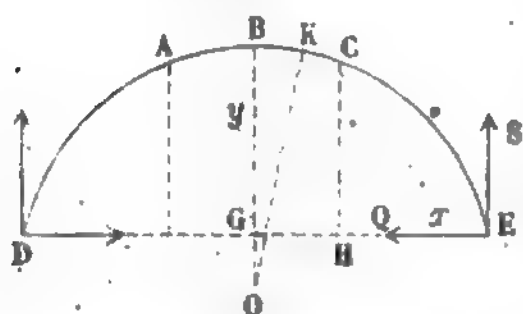
(\*) Nous n'entendons pas donner très-rigoureusement ici les nombres du projet; il s'agit simplement d'un exemple d'application de la théorie.

plus petit que la largeur réelle, tient compte, par aperçu, des évidements qui étaient pratiqués dans la tôle. Les arcs présentaient donc une section de 144 000 millimètres carrés que nous regarderons comme homogène, et qui, en conséquence, devait avoir par rapport à l'horizontale du

centre de gravité un rayon de gyration égal à  $\sqrt{\frac{I}{12} \cdot 3^2}$  (n° 6), soit à  $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ . La fibre moyenne était un arc de cercle de 55 mètres de rayon et 40 mètres de flèche : d'où l'on conclut aisément que la ligne des naissances, ou la corde, avait pour longueur 105<sup>m</sup>, 83.

La charge n'était pas répartie d'une manière tout à fait uniforme. En prenant de part et d'autre de la verticale BG du centre (fig. 25) une lon-

Fig. 25.



gueur horizontale de 20 mètres, la partie AC, ayant ainsi 40 mètres de longueur en projection sur la corde, était chargée à raison de 3100 kilogrammes par mètre courant projeté, soit en tout de 124 000 kilogrammes. Le surplus de la pièce suppor-

taît 11 150 kilogrammes par mètre courant de projection horizontale, en tout 734 000 kilogrammes environ. Ces poids sont censés comprendre le poids propre de l'arc, et on les regarde comme appliqués à la fibre moyenne elle-même. Enfin, des calculs que nous ne pouvons pas encore exposer maintenant ont fait connaître que la réaction de chacun des points d'appui D et E devait, sous les charges indiquées et avec une certaine variation de température, être équivalente aux forces suivantes :

429 000 kilogrammes, suivant la verticale, de bas en haut;

214 400 kilogrammes, suivant l'horizontale, en allant de chaque naissance vers la verticale du milieu de l'arc.

Considérons une section normale passant au point K, choisi d'abord entre B et C. Appelons :

$\rho$  le rayon de l'arc ;

$p$  le poids par mètre courant projeté, appliqué sur BC ;

$p'$  la quantité analogue pour la partie CE ;

$\alpha$  l'angle BOK ;

$y, x$  les coordonnées de K par rapport aux axes  $Gx, Gy$  ;

$S, Q$  les composantes verticale et horizontale de la réaction exercée en E par l'appui ;

$a, f, b$  les distances  $\overline{GE}, \overline{GB}, \overline{GH}$  ;

$N$  la somme des projections sur la tangente en K des forces qui agissent



entre K et E, ces projections étant prises positivement ou négativement, suivant qu'elles vont dans le sens de K vers E ou en sens contraire;

P la somme des projections des forces sur le rayon OK, prises positivement pour le sens OK;

X la somme des moments des mêmes forces par rapport au point K, calculée en prenant pour sens positif des moments le sens de ceux qui tendent à faire tourner dans le sens de  $Gx$  vers  $Gy$ .

On aura :

$$N = p(b-x)\sin\alpha + p'(a-b)\sin\alpha - Q\cos\alpha - S\sin\alpha,$$

$$P = -p(b-x)\cos\alpha - p'(a-b)\cos\alpha - Q\sin\alpha + S\cos\alpha,$$

$$X = -\frac{1}{2}p(b-x)^2 - p'(a-b)\left[\frac{1}{2}(a+b)-x\right] - Qy + S(a-x);$$

ou bien

$$N = (p-p')(b-x)\sin\alpha + p'(a-x)\sin\alpha - Q\cos\alpha - S\sin\alpha,$$

$$P = -(p-p')(b-x)\cos\alpha - p'(a-x)\cos\alpha - Q\sin\alpha + S\cos\alpha,$$

$$X = -\frac{1}{2}(p-p')(b-x)^2 - \frac{1}{2}p'(a-x)^2 - Qy + S(a-x).$$

Si la section était située entre C et E, ces expressions changeraient de forme, parce que toute la portion de l'arc entre la section dont il s'agit et l'extrémité E serait chargée du même poids  $p'$  par mètre courant. On voit alors que les valeurs de N, P, X deviennent

$$N = p'(a-x)\sin\alpha - Q\cos\alpha - S\sin\alpha,$$

$$P = -p'(a-x)\cos\alpha - Q\sin\alpha + S\cos\alpha,$$

$$X = -\frac{1}{2}p'(a-x)^2 - Qy + S(a-x).$$

Or on a

$$x = p\sin\alpha, \quad y = p(\cos\alpha - \cos\varphi), \quad S = pb + p'(a-b) = 429000^k;$$

substituant ces valeurs, puis remplaçant les lettres par les valeurs numériques données, nous avons trouvé :

Entre B et C,

$$\frac{1}{1000}N = -214,4\cos\alpha - 170,5\sin^2\alpha,$$

$$\frac{1}{1000}P = -214,4\sin\alpha + 170,5\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$\frac{1}{10^6}X = -11,79\cos\alpha - 4,689\sin^2\alpha + 11,92,$$

Entre C et E,

$$\frac{1}{1000} N = -214,4 \cos \alpha + 161,0 \sin \alpha - 613,2 \sin^2 \alpha,$$

$$\frac{1}{1000} P = -214,4 \sin \alpha - 161,0 \cos \alpha + 613,2 \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$\frac{1}{10^6} X = -11,79 \cos \alpha + 8,855 \sin \alpha - 16,86 \sin^2 \alpha + 10,31.$$

On possède maintenant tous les éléments nécessaires pour calculer numériquement, au moyen des considérations générales du n° 18 et des formules du n° 21, les tensions en chaque point d'une section quelconque ; car toutes les forces agissant depuis OK jusqu'à l'extrémité E de la pièce équivalent à la résultante de N et de P, appliquée en K et combinée avec le couple dont le moment est X. D'abord, le couple désigné par V étant ici constamment nul, il n'y a pas de torsion, et l'élasticité transversale n'est mise en jeu dans le plan OK que par la force P, qui donne lieu à un glissement simple. Au glissement répondent des tensions transversales dont la somme absolue égale P, et qui, pour les divers éléments de fibre partant du plan OK, sont simplement proportionnelles à la section  $\omega$  de ces éléments (n° 14), attendu que la matière de l'arc est supposée homogène. La tension transversale par unité de surface de l'un quelconque des éléments en question égalera donc la force totale P, divisée par la section totale  $\Omega$ . Ainsi on calculera le quotient  $\frac{P}{\Omega}$  pour diverses sections de la pièce, et l'on connaîtra de cette manière les grandeurs successives par lesquelles passent les tensions transversales correspondantes.

Restent les forces N et les couples X, qui produisent l'extension et la flexion simples, et par conséquent les tensions longitudinales. Dans la section OK, en particulier, N et X peuvent être composés et donneront une résultante égale et parallèle à N, contenue également dans le plan de la fibre moyenne, mais appliquée en un point K' de la ligne OK, différent, en général, du centre d'élasticité K. On se trouvera donc ici dans le cas étudié au n° 21, avec cette circonstance particulière que le point d'application de la force totale N est placé sur un axe de symétrie de la section. Cet axe OK étant axe principal d'inertie de la section pour le point K, la flexion, qui s'opère autour de son conjugué (n° 16), aura lieu autour de la perpendiculaire en K au plan de la figure. Si donc on applique la formule (7) du n° 21,  $u$  désignera la distance positive ou négative d'un élément  $\omega$  de la section à cette perpendiculaire, et  $u_1$  la valeur particulière de  $u$  pour le point K'. Il nous suffit, pour être en mesure de faire cette application, de connaître la distance  $\overline{KK'} = u_1$  : or, X n'est

autre chose que le moment  $N \cdot \overline{KK'}$  de  $N$  relativement au point  $K$ , c'est-à-dire qu'on a

$$N u_1 = X,$$

ou bien

$$u_1 = \frac{X}{N},$$

équation qui fait connaître  $u_1$  en valeur absolue. On remarquera d'ailleurs que si  $X$  et  $N$  ont des valeurs numériques de même signe, le point  $K'$  se trouvera entre  $K$  et  $O$ , et inversement il serait sur le prolongement de  $OK$  si  $X$  et  $N$  avaient des signes contraires. Donc on sera en droit de remplacer  $u_1$  par  $\frac{X}{N}$ , pourvu que les distances  $u$  soient comptées positivement dans le sens  $KO$  et négativement en sens contraire.

En définitive, la formule (7) du n° 21, qui exprime la tension longitudinale  $t$  d'un élément quelconque de fibre dans la section  $OK$ , deviendra

$$t = \frac{N}{\Omega} \left( 1 + \frac{u u_1}{r^2} \right) = \frac{N}{\Omega} \left( 1 + \frac{X u}{N r^2} \right);$$

le facteur  $E$  disparaît comme constant dans l'arc entier. Dans une même section,  $t$  varie avec  $u$  d'une fibre à l'autre; ses valeurs extrêmes répondront aux valeurs extrêmes de  $u$ , qui sont  $+1,50$  pour l'intrados et  $-1,50$  pour l'extrados. D'ailleurs  $r^2 = 0,75$  et  $\Omega = 0,144$ ; nous écrirons donc

$$\text{Pour l'extrados... } t = \frac{N}{0,144} \left( 1 - \frac{2X}{N} \right) = \frac{1}{0,144} (N - 2X),$$

$$\text{Pour l'intrados... } t = \frac{N}{0,144} \left( 1 + \frac{2X}{N} \right) = \frac{1}{0,144} (N + 2X).$$

L'unité de force étant le kilogramme et l'unité de surface le mètre carré, ces formules donneraient des tensions en kilogrammes par mètre carré; pour les avoir en kilogrammes par millimètre carré, il suffirait de diviser par  $10^6$  ou de remplacer  $0,144$  par  $144000$ .

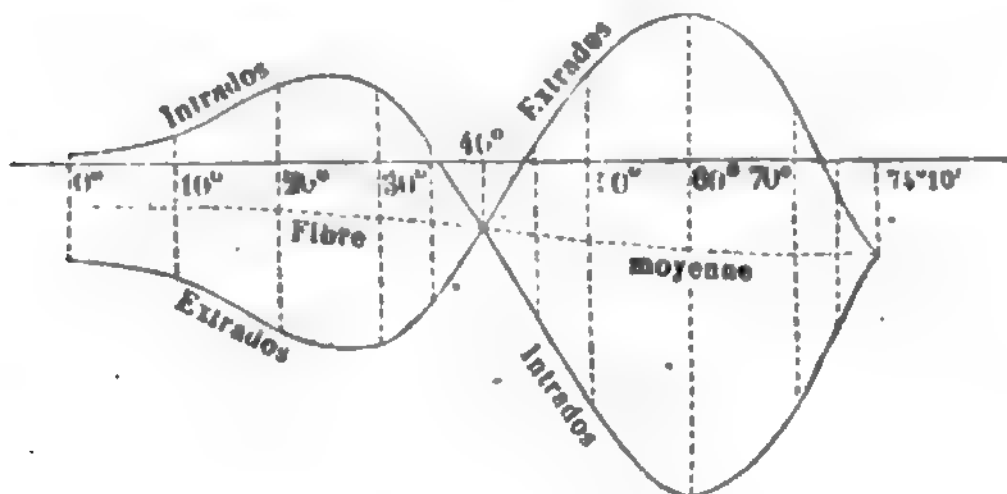
Voici le tableau des résultats numériques relatifs à 12 sections.

NUMÉROS des sections.	VALEURS de $\alpha$ .	$\frac{N}{144000}$	$\frac{X}{72000}$	TENSION LONGITUDINALE par millimètre carré		TENSION TRANSVERSALE par millimètre carré. $\frac{P}{144000}$	OBSERVATIONS.
				A l'extrados.	A l'intrados.		
1	0.00	— 1,49	1,76	— 3,25	0,27	— 0,00	<p>Le point C correspond à <math>\alpha = 21^{\circ} 19', 4</math>.</p> <p>Le point E correspond à <math>\alpha = 74^{\circ} 10', 4</math>.</p> <p>Les tensions longitudinales négatives sont des pressions.</p> <p>La tension transversale est dirigée de l'intrados vers l'extrados, ou en sens inverse, suivant qu'elle est positive ou négative.</p>
2	10.00	— 1,50	2,33	— 3,83	0,83	— 0,06	
3	20.00	— 1,54	4,01	— 5,55	2,47	— 0,13	
4	30.00	— 1,80	4,16	— 5,96	2,36	0,13	
5	35.00	— 1,98	2,40	— 4,38	0,42	0,23	
6	40.00	— 2,18	— 0,08	— 2,10	— 2,26	0,28	
7	45.00	— 2,39	— 2,90	0,51	— 5,29	0,29	
8	50.00	— 2,60	— 5,42	2,82	— 8,02	0,23	
9	60.00	— 3,11	— 7,98	4,87	— 11,09	0,00	
10	70.00	— 3,21	— 4,97	1,76	— 8,18	— 0,41	
11	72.00	— 3,25	— 2,44	— 0,81	— 5,69	— 0,51	
12	74.10,4	— 3,28	— 0,00	— 3,28	— 3,28	— 0,62	

Comme on le voit, les tensions qui sollicitent les fibres au glissement transversal sont assez faibles comparativement aux tensions longitudinales : la résistance du fer aux unes et aux autres étant à peu près la même, on voit qu'il n'y aurait pas eu dans cet exemple d'erreur bien notable à suivre l'usage assez généralement reçu de négliger les tensions transversales.

Les tensions longitudinales à l'extrados, à l'intrados et sur la fibre moyenne sont représentées graphiquement par la *fig. 26*; les abscisses

Fig. 26.



des courbes sont proportionnelles aux valeurs de  $x$ , et les ordonnées sont proportionnelles aux valeurs de ces tensions.



## CHAPITRE DEUXIÈME.

FORMULES GÉNÉRALES POUR DÉTERMINER LA DÉFORMATION D'UNE PIÈCE DROITE OU COURBE SOUS L'ACTION DE FORCES DONNÉES. — RECHERCHE DES FORCES INCONNUES. — THÉORÈMES SUR LA COMPOSITION DES EFFETS DUS A DIVERSES CAUSES. — MOUVEMENTS VIBRATOIRES DES PIÈCES ÉLASTIQUES.

### § I. — Calcul de la déformation d'une pièce, sous l'action de forces connues.

40. *Lemme relatif aux déplacements des différents points d'un système invariable.* — On sait que le déplacement élémentaire d'un système invariable peut toujours être obtenu au moyen de trois translations parallèles à trois axes coordonnés et de trois rotations autour des mêmes axes.

Soient  $a, b, c$  les trois translations respectivement parallèles

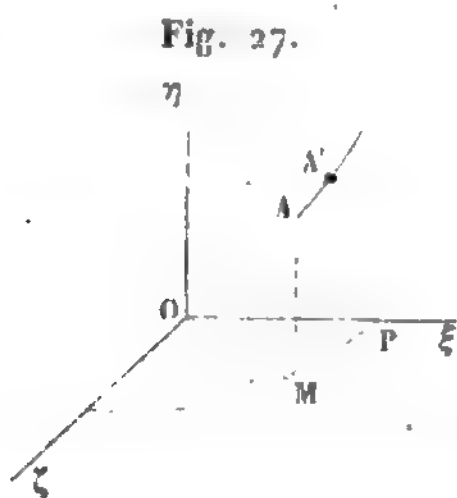


Fig. 27.

aux axes rectangulaires  $O\xi, O\eta, Oz$  (fig. 27);  $m, n, p$  les trois rotations autour des mêmes axes. Ces six mouvements étant tous infiniment petits, il s'agit d'avoir l'expression analytique du déplacement d'un point  $A$  quelconque du système en fonction de ses coordonnées  $\xi, \eta, \zeta$ .

A cet effet, on remarquera d'abord que le déplacement  $AA'$  du point  $A$  est la ligne qui forme le polygone obtenu en portant bout à bout les six déplacements composants, chacun avec sa direction propre. Donc la projection de  $AA'$  sur un axe quelconque est égale à la somme algébrique des projections des déplacements dus aux trois translations et aux trois rotations. Cherchons donc la projection du déplacement dû à une rotation, par exemple à  $n$ , qui se fait autour de  $O\eta$ . Soit  $OM$  la projection de  $OA$  sur le plan des  $\xi\zeta$ ; la rotation  $n$  toute seule, si elle avait lieu de  $O\zeta$  vers  $O\xi$ , ferait décrire au point  $A$  un petit

élément circulaire de rayon  $OM$ , perpendiculaire à cette ligne, ayant le sens de  $M$  à  $P$ , et contenu dans un plan parallèle au plan des  $\xi\eta$ . Sa longueur serait  $n \cdot \overline{OM}$ , et ses projections auraient pour valeurs, savoir :

$$\begin{aligned} \text{sur l'axe des } \xi & \dots\dots\dots n \cdot \overline{OM} \cdot \cos MO\xi, \quad \text{ou bien} \quad n\xi, \\ \text{sur l'axe des } \eta & \dots\dots\dots 0, \\ \text{sur l'axe des } \zeta & \dots\dots\dots -n \cdot \overline{OM} \cdot \cos MO\xi, \quad \text{ou bien} \quad -n\xi. \end{aligned}$$

De la même manière on trouverait les projections des déplacements dus à  $m$  et  $p$ , qui sont respectivement

$$\begin{aligned} \text{pour } m & \dots\dots\dots 0, \quad -m\xi, \quad m\eta, \\ \text{pour } p & \dots\dots\dots -p\eta, \quad p\xi, \quad 0. \end{aligned}$$

Réunissant maintenant toutes les projections sur un même axe et nommant  $\Delta\xi$ ,  $\Delta\eta$ ,  $\Delta\zeta$  les variations des coordonnées du point  $A$ , on aura l'effet total des six mouvements composants, exprimé par les équations

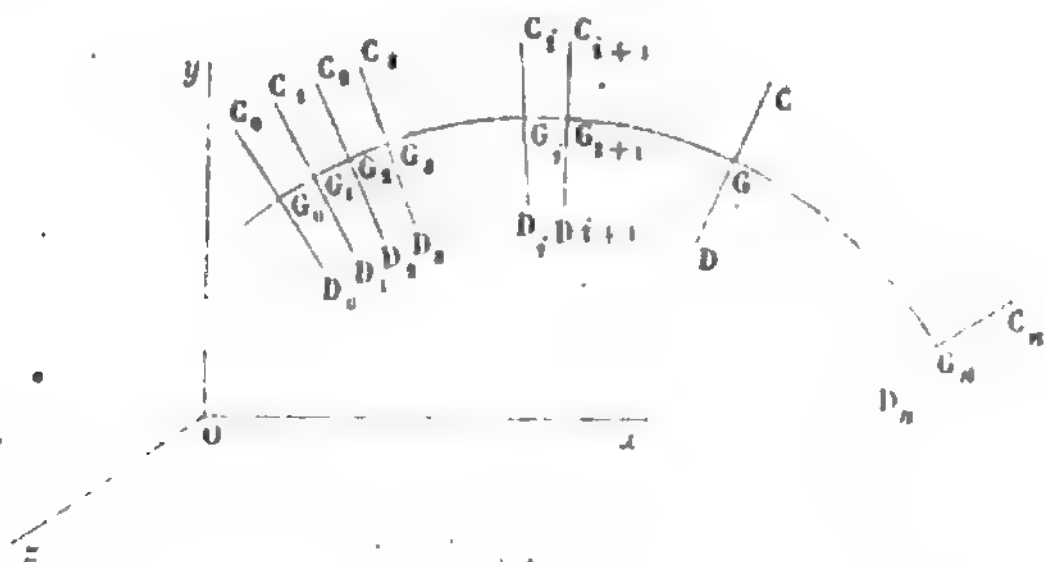
$$\begin{aligned} \Delta\xi &= a + n\xi - p\eta, \\ \Delta\eta &= b + p\xi - m\zeta, \\ \Delta\zeta &= c + m\eta - n\xi. \end{aligned}$$

Pour la généralité de ces formules, il ne faut pas oublier que les translations  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , aussi bien que les rotations  $m$ ,  $n$ ,  $p$ , doivent prendre le signe  $+$  ou le signe  $-$ , suivant les cas. Les translations sont positives quand elles ont lieu dans le sens positif des axes coordonnés qui leur sont parallèles; une rotation autour de  $O\xi$  est positive quand elle amènerait la portion positive de l'axe  $O\xi$  sur la portion positive de l'axe  $O\eta$ ; de même le sens positif pour les rotations autour de  $O\xi$  sera de  $O\eta$  vers  $O\xi$ , et pour les rotations autour de  $O\eta$  celui de  $O\xi$  vers  $O\xi$ .

41. *Réduction du problème qui fait l'objet de ce chapitre à une composition de mouvements.* — Soit une pièce dont la fibre moyenne est  $G, G_n$  (fig. 28);  $C, D_1, C_1 D_1, C_2 D_2, \dots, C_n D_n$ , les sections transversales successives, déterminées par des plans normaux très-voisins les uns des autres. Le volume infiniment petit compris entre deux sections consécutives  $C_i D_i, C_{i+1} D_{i+1}$ ,

peut être considéré (n° 34) comme un prisme, et l'on connaît le système de forces auxquelles doivent faire équilibre les tensions développées dans les éléments de fibre qui traversent  $C_i D_i$ ; ces forces sont toutes celles qui agissent sur la pièce entre  $C_i D_i$  et l'extrémité  $C_n D_n$ . On pourra donc, en procédant comme au n° 18, trouver les deux translations et les deux rotations que  $C_{i+1} D_{i+1}$  prend relativement à  $C_i D_i$ .

Fig. 28.



Cela posé, imaginons que l'on connaisse le mouvement absolu pris par une section initiale  $C_0 D_0$ . Le mouvement absolu de  $C_i D_i$  se composera du mouvement relatif de  $C_i D_i$  relativement à  $C_0 D_0$  (qu'on sait calculer) et du mouvement absolu de  $C_0 D_0$ ; de même, connaissant le mouvement absolu de  $C_i D_i$ , on passerait à celui de  $C_{i+1} D_{i+1}$ , et ainsi de suite. On verrait ainsi que pour une section quelconque  $CD$ , le mouvement absolu résulte de la composition du mouvement absolu de  $C_0 D_0$  avec tous les mouvements relatifs des groupes de deux sections infiniment voisines qu'on peut imaginer entre  $C_0 D_0$  et  $CD$ . Donc le déplacement du point  $G$  résultera de la composition des déplacements dus à tous ces mouvements, considérés chacun à part; en projection sur un axe, ce déplacement sera la somme algébrique des projections obtenues en prenant isolément chaque mouvement partiel.

Il est clair maintenant que la méthode du n° 40 sera applicable pour trouver les déplacements de  $G$  parallèlement à trois axes coordonnés, dus à chaque mouvement composant, pourvu que chacun de ces mouvements ait subi la décomposition que suppose cette méthode. On conçoit donc sans peine la marche

à suivre pour trouver les variations des trois coordonnées de  $G$ ; nous allons donner quelques détails sur les calculs à effectuer.

42. *Formules générales pour calculer les variations des coordonnées d'un point quelconque de la fibre moyenne.* — Ramenons toutes les forces qui agissent depuis une section quelconque  $C_i D_i$  jusqu'à l'extrémité  $C_n D_n$  (fig. 28) à deux forces et à deux couples, comme il a été fait au n° 18. Nous aurons d'abord la force  $N$  dirigée normalement à  $C_i D_i$ , c'est-à-dire suivant la tangente en  $G_i$  à la fibre moyenne, force à laquelle nous donnons le signe  $+$  ou le signe  $-$ , suivant qu'elle agira en allant à partir de  $G_i$  du côté où l'on place l'extrémité  $C_n D_n$ , ou en sens inverse; secondement une force  $P$ , passant par le point  $G_i$ , située dans le plan  $C_i D_i$ , et faisant avec les axes coordonnés rectangulaires  $Ox, Oy, Oz$  des angles que nous appellerons  $\alpha, \beta, \gamma$ ; troisièmement un couple  $V$  dont l'axe a même direction que la force  $N$ ; enfin un couple  $X$  dont l'axe est dans le plan  $C_i D_i$ . Nous appellerons d'ailleurs

$\delta$  l'angle aigu que fait la trace du couple  $X$  sur le plan  $C_i D_i$  avec le diamètre conjugué de cette trace, dans l'ellipse centrale d'inertie de la section  $C_i D_i$ ;

$\lambda, \mu, \nu$  les angles que ce diamètre conjugué fait avec les trois axes;

$r, l$  les rayons de gyration de la section  $C_i D_i$ , relativement au diamètre conjugué dont on vient de parler et à la tangente menée suivant  $G_i G_{i+1}$ ;

$e$  le ressort longitudinal (n° 13) de ladite section;

$ke$  son ressort transversal (n° 14),  $k$  étant le rapport supposé constant (n° 15) des deux coefficients d'élasticité  $G$  et  $E$ ;

$s$  la longueur mesurée suivant la fibre moyenne entre la section  $C_i D_i$  et celle qui est prise pour origine;

$x, y, z$  les coordonnées rectangulaires du point  $G_i$ .

En ne nous occupant d'abord que du mouvement relatif de la section  $C_i D_i$  et celle qui est infiniment voisine, nous trouverons que ce mouvement se compose (n° 18):

D'une translation, suivant la direction de la force  $N$ , dont la

I.

6.\*

valeur est  $\frac{N ds}{e}$ , et les projections sur les trois axes coordonnés  $\frac{dx}{e}$ ,  $\frac{N dy}{e}$ ,  $\frac{N dz}{e}$ ;

D'une translation suivant la force  $P$  qui aura pour expression  $\frac{P ds}{ke}$ , et dont les projections sur les axes coordonnés seront pareillement  $\frac{P \cos \alpha \cdot ds}{ke}$ ,  $\frac{P \cos \beta \cdot ds}{ke}$ ,  $\frac{P \cos \gamma \cdot ds}{ke}$ ;

D'une rotation autour de l'élément  $G_i G_{i+1}$  prolongé, exprimée par  $\frac{V ds}{kel^2}$ , dont les composantes rectangulaires parallèles aux axes coordonnés, sont  $\frac{V dx}{kel^2}$ ,  $\frac{V dy}{kel^2}$ ,  $\frac{V dz}{kel^2}$ ;

D'une rotation autour du diamètre conjugué avec la trace du couple  $X$ , ayant pour valeur  $\frac{X \sin \delta \cdot ds}{er^2}$  et se décomposant de même en  $\frac{X \sin \delta \cos \lambda \cdot ds}{er^2}$ ,  $\frac{X \sin \delta \cos \mu \cdot ds}{er^2}$ ,  $\frac{X \sin \delta \cos \nu \cdot ds}{er^2}$ .

On aura donc finalement pour le mouvement relatif dont il s'agit :

1°. Trois translations parallèles aux axes coordonnés, savoir :

$$\begin{aligned} \text{Suivant l'axe des } x \dots & \frac{N dx}{e} + \frac{P \cos \alpha \cdot ds}{ke}, \\ y \dots & \frac{N dy}{e} + \frac{P \cos \beta \cdot ds}{ke}, \\ z \dots & \frac{N dz}{e} + \frac{P \cos \gamma \cdot ds}{ke}; \end{aligned}$$

2°. Trois rotations autour des parallèles aux trois mêmes axes menées par le point  $G_i$  :

$$\begin{aligned} \text{Autour de la parallèle à } Ox \dots & \frac{V dx}{kel^2} + \frac{X \sin \delta \cos \lambda \cdot ds}{er^2}, \\ Oy \dots & \frac{V dy}{kel^2} + \frac{X \sin \delta \cos \mu \cdot ds}{er^2}, \\ Oz \dots & \frac{V dz}{kel^2} + \frac{X \sin \delta \cos \nu \cdot ds}{er^2}. \end{aligned}$$

Dans les applications, chacune de ces rotations composantes



devra recevoir le signe + ou le signe —, d'après la convention exprimée à la fin du n° 40; c'est un point sur lequel nous reviendrons. Quant aux translations, elles ne donnent pas lieu à cette difficulté, car les expressions algébriques ci-dessus prennent d'elles-mêmes le signe convenable, pourvu que  $N$  soit compté positivement dans le sens indiqué tout à l'heure, et que les angles  $\alpha, \beta, \gamma$  soient mesurés entre la force  $P$  (quantité censée toujours positive) et les parties positives des axes.

Maintenant il est facile d'appliquer la méthode indiquée en abrégé au n° 41, pour avoir le déplacement d'un point quelconque  $G$  de la fibre moyenne. Appelons en effet  $\Delta x_0, \Delta y_0, \Delta z_0$  les trois composantes de ce déplacement pour la section initiale  $C_0 D_0$ ;  $m_0, n_0, p_0$  les trois composantes de la rotation de la section  $C_0 D_0$ , qui produisent les variations très-petites des angles que la normale à cette section faisait primitivement avec les trois axes coordonnés;  $x_1, y_1, z_1$  les coordonnées du point  $G$ ; conservons les lettres sans indice pour les quantités qui se rapportent à toute section intermédiaire entre  $C_0 D_0$  et  $CD$ ,  $C_1 D_1$  par exemple. En vertu des trois translations et des trois rotations qui viennent d'être analysées, le point  $G$  prendra les déplacements ci-après :

Suivant l'axe des  $x$ ,

$$\begin{aligned} \frac{N dx}{e} + \frac{P \cos \alpha \cdot ds}{ke} + (z_1 - z) \left( \frac{V dy}{kel^2} + \frac{X \sin \delta \cos \mu \cdot ds}{er^2} \right) \\ - (y_1 - y) \left( \frac{V dz}{kel^2} + \frac{X \sin \delta \cos \nu \cdot ds}{er^2} \right); \end{aligned}$$

Suivant l'axe des  $y$ ,

$$\begin{aligned} \frac{N dy}{e} + \frac{P \cos \beta \cdot ds}{ke} + (x_1 - x) \left( \frac{V dz}{kel^2} + \frac{X \sin \delta \cos \nu \cdot ds}{er^2} \right) \\ - (z_1 - z) \left( \frac{V dx}{kel^2} + \frac{X \sin \delta \cos \lambda \cdot ds}{er^2} \right); \end{aligned}$$

Suivant l'axe des  $z$ ,

$$\begin{aligned} \frac{N dz}{e} + \frac{P \cos \gamma \cdot ds}{ke} + (y_1 - y) \left( \frac{V dx}{kel^2} + \frac{X \sin \delta \cos \lambda \cdot ds}{er^2} \right) \\ - (x_1 - x) \left( \frac{V dy}{kel^2} + \frac{X \sin \delta \cos \mu \cdot ds}{er^2} \right); \end{aligned}$$

formules qui résultent immédiatement de celles qu'on a données au n° 40.

Ajoutant algébriquement tous les effets dus aux mouvements des sections intermédiaires entre  $C, D$ , et  $CD$ , et tenant compte du mouvement de la première section  $C, D$ , on trouvera donc pour les variations  $\Delta x_1, \Delta y_1, \Delta z_1$  des coordonnées de  $G$ ,

$$\begin{aligned}
 \Delta x_1 &= \Delta x_0 + n_0 (z_1 - z_0) - p_0 (y_1 - y_0) \\
 &\quad + \int_{x_0}^{x_1} \left( \frac{N}{e} + \frac{P \cos \alpha}{ke} \frac{ds}{dx} \right) dx \\
 &\quad + \int_{s_0}^{s_1} \left[ \begin{aligned} &(z_1 - z) \left( \frac{V}{kel^2} \frac{dy}{ds} + \frac{X \sin \delta \cos \mu}{er^2} \right) \\ &-(y_1 - y) \left( \frac{V}{kel^2} \frac{dz}{ds} + \frac{X \sin \delta \cos \nu}{er^2} \right) \end{aligned} \right] ds; \\
 \Delta y_1 &= \Delta y_0 + p_0 (x_1 - x_0) - m_0 (z_1 - z_0) \\
 &\quad + \int_{y_0}^{y_1} \left( \frac{N}{e} + \frac{P \cos \beta}{ke} \frac{ds}{dy} \right) dy \\
 &\quad + \int_{s_0}^{s_1} \left[ \begin{aligned} &(x_1 - x) \left( \frac{V}{kel^2} \frac{dz}{ds} + \frac{X \sin \delta \cos \nu}{er^2} \right) \\ &-(z_1 - z) \left( \frac{V}{kel^2} \frac{dx}{ds} + \frac{X \sin \delta \cos \lambda}{er^2} \right) \end{aligned} \right] ds; \\
 \Delta z_1 &= \Delta z_0 + m_0 (y_1 - y_0) - n_0 (x_1 - x_0) \\
 &\quad + \int_{z_0}^{z_1} \left( \frac{N}{e} + \frac{P \cos \gamma}{ke} \frac{ds}{dz} \right) dz \\
 &\quad + \int_{s_0}^{s_1} \left[ \begin{aligned} &(y_1 - y) \left( \frac{V}{kel^2} \frac{dx}{ds} + \frac{X \sin \delta \cos \lambda}{er^2} \right) \\ &-(x_1 - x) \left( \frac{V}{kel^2} \frac{dy}{ds} + \frac{X \sin \delta \cos \mu}{er^2} \right) \end{aligned} \right] ds.
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

#### 43. Déplacements produits par la température et le calage.

— Les formules (1) du n° 42 ne tiennent pas compte des variations de  $x, y, z$  qui pourraient être produites par des causes étrangères aux charges que supporte la pièce. Parmi ces causes il faut ranger les changements de température et le calage.

Les changements de température, suivant qu'il y a augmen-

tation ou diminution, tendent à dilater ou à contracter toutes les parties du corps qui les éprouve, s'il n'y a aucun obstacle extérieur pour s'y opposer; mais cette altération de dimensions n'entraîne pas d'altération de forme dans une matière homogène; ou du moins dans une matière dont le coefficient de dilatation linéaire ne varie pas d'un point à un autre, ce que nous supposerons. Il n'en est pas de même quand des obstacles extérieurs viennent contrarier l'effet de la dilatation, mais il est clair qu'en tenant compte à part des forces exercées par ces obstacles sur la pièce, on peut toujours considérer celle-ci comme entièrement libre. Par conséquent  $\tau$  étant le coefficient de dilatation linéaire correspondant au changement de température, on devrait simplement ajouter aux premiers membres des formules (1) ci-dessus le terme  $\tau (x_1 - x_0)$  pour  $\Delta x_1$ , et de même  $\tau (y_1 - y_0)$ ,  $\tau (z_1 - z_0)$  pour  $\Delta y_1$  et  $\Delta z_1$ ; mais en même temps il faudrait faire entrer dans les expressions de N, P, X, V les forces qui proviendraient d'obstacles extérieurs opposés aux effets de la dilatation.

Le calage des pièces courbes donne lieu à des considérations analogues. Dans la pratique, les grands arcs en métal ne sont pas formés d'un seul bloc. On les construit, en général, avec des voussoirs juxtaposés, entre lesquels on enfonce des cales en métal et que l'on boulonne ensuite fortement. Il résulte de cette disposition que l'arc exerce sur ses appuis des pressions indépendantes des forces qui le sollicitent lui-même, c'est-à-dire qu'il agirait encore sur ses appuis si l'on supprimait toutes les charges qui lui sont directement appliquées. Cela équivaut en quelque sorte à une dilatation artificielle, en vertu de laquelle la fibre moyenne prendrait une longueur supérieure à sa longueur primitive. Il semble qu'on tiendra compte de ce fait d'une manière rationnelle et satisfaisante, si l'on attribue à la constante  $\tau$ , non pas la valeur du coefficient de la dilatation linéaire produite par le changement des circonstances atmosphériques, mais ce coefficient augmenté du rapport entre l'allongement produit par le calage et la longueur de l'arc. Ainsi, soient S la longueur totale de la fibre moyenne, d'après le projet;  $\sigma$  la somme des épaisseurs des cales introduites entre les segments de cette fibre;  $\tau'$  la dilatation linéaire, positive ou négative

tive, due au changement de température. On devra prendre

$$\tau = \tau' + \frac{\sigma}{S}.$$

Naturellement le rapport  $\frac{\sigma}{S}$  est variable dans la pratique, mais il reste toujours très-petit; il est assez ordinairement inférieur au nombre 0,0001.

44. *Formules spéciales pour le cas où la fibre moyenne est primitivement dans un plan contenant les forces extérieures.*

— Quand la fibre moyenne est plane dans son état primitif, et que toutes les forces appliquées sur un élément quelconque de la pièce, entre deux sections normales consécutives, peuvent se réduire à une force située dans le plan de cette fibre, les formules (1) du n° 42 se simplifient notablement. En effet, toutes les forces qui agissent sur la portion  $G_i G_n$  (*fig. 28*) donneront nécessairement lieu à une résultante unique ou à un couple, situés dans le plan  $G_i G_n$ . On pourra prendre les axes des  $x$  et des  $y$  dans ce plan, et alors on aura, pour tous les points de la courbe  $G_i G_n$ ,

$$V = 0, \quad \gamma = \frac{\pi}{2}, \quad \cos \alpha = \pm \frac{dy}{ds}, \quad \cos \beta = \mp \frac{dx}{ds}, \quad z = 0;$$

car d'abord le couple  $X$  subsiste seul, la force  $P$  est dirigée suivant la normale principale de la fibre moyenne, et enfin la fibre moyenne se trouve tout entière dans le plan des  $xy$ . Il est facile en outre de compter positivement la force  $P$ , dans chaque cas particulier, de manière à ce qu'on doive prendre les signes inférieurs dans les expressions de  $\cos \alpha$  et de  $\cos \beta$  : par exemple, avec la disposition de la *fig. 28*, il faudrait prendre  $P$  positivement dans le sens  $G_i C_i$ , ou, si l'on veut, dans le sens contraire à celui de la normale qui se dirige vers le centre de courbure. Substituant ces valeurs de  $V$ ,  $\gamma$ ,  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$  dans les formules (1) ci-dessus, et rétablissant le terme par lequel on tient compte des dilatations produites par des causes étrangères aux charges (n° 43), on trouvera

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \left\{ \begin{aligned}
 \Delta x_1 &= \Delta x_0 - p_0 (y_1 - y_0) + \tau (x_1 - x_0) \\
 &\quad + \int_{x_0}^{x_1} \left( \frac{N}{e} - \frac{P}{ke} \frac{dy}{dx} \right) dx \\
 &\quad - \int_{s_0}^{s_1} (y_1 - y) \frac{X \sin \delta \cos \nu}{er^2} ds; \\
 \Delta y_1 &= \Delta y_0 + p_0 (x_1 - x_0) + \tau (y_1 - y_0) \\
 &\quad + \int_{y_0}^{y_1} \left( \frac{N}{e} + \frac{P}{ke} \frac{dx}{dy} \right) dy \\
 &\quad + \int_{s_0}^{s_1} (x_1 - x) \frac{X \sin \delta \cos \nu}{er^2} ds; \\
 \Delta z_1 &= \Delta z_0 + m_0 (y_1 - y_0) - n_0 (x_1 - x_0) \\
 &\quad + \int_{s_0}^{s_1} \frac{X \sin \delta}{er^2} [(y_1 - y) \cos \lambda - (x_1 - x) \cos \mu] ds.
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

45. Conditions à remplir pour que la déformation d'une pièce à fibre moyenne plane s'opère dans le plan même de cette fibre. — Nous ne traiterons cette question que dans l'hypothèse restreinte faite au n° 44 sur le mode de distribution des forces extérieures. La condition à remplir, c'est que  $\Delta z_1$  soit nul pour tous les points de la fibre moyenne; il faut donc poser

$$\begin{aligned}
 &\Delta z_0 + m_0 (y_1 - y_0) - n_0 (x_1 - x_0) \\
 &\quad + \int_{s_0}^{s_1} \frac{X \sin \delta}{er^2} [(y_1 - y) \cos \lambda - (x_1 - x) \cos \mu] ds = 0.
 \end{aligned}$$

Cette expression devant être nulle quels que soient les points dont on a représenté les coordonnées par  $x_0, y_0, x_1, y_1$ , on en déduit

$$\Delta z_0 = 0, \quad m_0 = 0, \quad n_0 = 0,$$

et si  $X$  n'est pas constamment nul,

$$\cos \lambda = 0, \quad \cos \mu = 0,$$

car  $\sin \delta$  ne peut pas s'annuler. Donc les conditions cherchées consistent en ce que 1° le point  $G_0$  de la fibre moyenne, ap-



partenant à la section initiale  $C_0 D_0$ , doit se déplacer dans le plan des  $xy$  (ce qui était évident); 2° la section  $C_0 D_0$  doit tourner autour d'une parallèle à l'axe des  $z$ , c'est-à-dire d'une perpendiculaire au plan de la fibre moyenne; 3° l'axe autour duquel s'effectue la flexion doit être en chaque point perpendiculaire à ce même plan.

Comme le couple  $X$  est contenu dans le plan de la fibre moyenne, on voit par la dernière condition que l'axe autour duquel s'effectue la flexion due à ce couple lui est perpendiculaire; par suite, qu'il est perpendiculaire à son diamètre conjugué dans l'ellipse centrale d'inertie de la section transversale sur laquelle agit  $X$  (n° 16). Donc ces deux directions conjuguées sont celles des axes de l'ellipse; donc enfin, sauf les conditions qui se rapportent à la section initiale, on peut énoncer la proposition suivante :

*Quand une pièce a sa fibre moyenne dans un plan contenant aussi les forces extérieures, pour que la déformation ne fasse pas sortir la fibre moyenne de son plan, il faut que ce plan coupe toutes les sections transversales suivant un de leurs axes principaux d'inertie.*

Cette condition jointe à la nullité des trois quantités  $\Delta z_0$ ,  $m_0$ ,  $n_0$  est d'ailleurs suffisante, car si elle est remplie, on en conclura que l'axe de flexion est partout perpendiculaire au plan de la fibre moyenne, par suite, que  $\cos\lambda$  et  $\cos\mu$  sont nuls, et l'on retrouverait ainsi que  $\Delta z$  doit être constamment égal à zéro.

Les formules (2) doivent être modifiées dans ce cas en y faisant  $\sin\delta = 1$ ,  $\cos\gamma = 1$ .

46. *Déviations des sections normales de la pièce.* — La section normale  $CD$  éprouve une rotation totale qui s'obtient en composant celle de  $C_0 D_0$  avec toutes les rotations relatives de deux sections voisines entre  $G_0$  et  $G$ . On aura donc, d'après les règles connues de la composition des rotations, pour les composantes rectangulaires  $m_1$ ,  $n_1$ ,  $p_1$  de la rotation de  $CD$  suivant les trois axes coordonnés :

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} m_1 = m_0 + \int_{x_0}^{x_1} \left( \frac{V}{kel^2} + \frac{X \sin \delta \cos \lambda}{er^2} \frac{ds}{dx} \right) dx, \\ n_1 = n_0 + \int_{y_0}^{y_1} \left( \frac{V}{kel^2} + \frac{X \sin \delta \cos \mu}{er^2} \frac{ds}{dy} \right) dy, \\ p_1 = p_0 + \int_{z_0}^{z_1} \left( \frac{V}{kel^2} + \frac{X \sin \delta \cos \nu}{er^2} \frac{ds}{dz} \right) dz. \end{array} \right.$$

Quand on connaît la rotation du plan CD, il est facile d'en déduire les variations des sinus des angles  $A_1, B_1, C_1$ , qu'il fait avec les axes des  $x, y, z$ . Il suffit d'imaginer par l'origine une perpendiculaire au plan, de longueur égale à 1; les coordonnées de l'extrémité de cette ligne seront  $\sin A_1, \sin B_1, \sin C_1$ , et si l'on en calcule les variations par les formules du n° 40, on trouvera

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta \sin A_1 = n_1 \sin C_1 - p_1 \sin B_1, \\ \Delta \sin B_1 = p_1 \sin A_1 - m_1 \sin C_1, \\ \Delta \sin C_1 = m_1 \sin B_1 - n_1 \sin A_1. \end{array} \right.$$

Dans le cas particulier examiné au n° 44, on doit faire  $V = 0$ , et alors les formules (3) deviennent

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} m_1 = m_0 + \int_{s_0}^{s_1} \frac{X \sin \delta \cos \lambda}{er^2} ds, \\ n_1 = n_0 + \int_{s_0}^{s_1} \frac{X \sin \delta \cos \mu}{er^2} ds, \\ p_1 = p_0 + \int_{s_0}^{s_1} \frac{X \sin \delta \cos \nu}{er^2} ds. \end{array} \right.$$

Si l'on suppose en outre remplies les conditions posées au n° 45 pour que la flexion ait lieu dans un plan, on aura simplement

$$(6) \quad m_1 = 0, \quad n_1 = 0, \quad p_1 = p_0 + \int_{s_0}^{s_1} \frac{X ds}{er^2}.$$

Dans ce dernier cas la rotation a lieu autour d'une perpendiculaire au plan de la fibre moyenne, en sorte que  $p_1$  est la varia-

tion de l'angle que la section normale CD fait avec un autre plan normal, invariable en direction.

47. *Formules de la déformation, spéciales pour les poutres droites.* — Nous supposons une pièce à fibre moyenne rectiligne, chargée d'ailleurs suivant le mode défini au n° 44. En prenant la fibre moyenne pour axe des  $x$ , on aura constamment  $y=0$ ,  $z=0$ ,  $s=x$ , et les formules (2) prennent la forme suivante :

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta x_1 = \Delta x_0 + \tau (x_1 - x_0) + \int_{x_0}^{x_1} \frac{N}{e} dx; \\ \Delta y_1 = \Delta y_0 + p_0 (x_1 - x_0) + \int_{x_0}^{x_1} (x_1 - x) \frac{X \sin \delta \cos \nu}{er^2} dx \\ \quad + \int_{x_0}^{x_1} \frac{P}{ke} dx; \\ \Delta z_1 = \Delta z_0 - n_0 (x_1 - x_0) - \int_{x_0}^{x_1} (x_1 - x) \frac{X \sin \delta \cos \mu}{er^2} dx. \end{array} \right.$$

Dans le cas plus particulier de la déformation plane (n° 45) on trouve :

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta x_1 = \Delta x_0 + \tau (x_1 - x_0) + \int_{x_0}^{x_1} \frac{N}{e} dx, \\ \Delta y_1 = \Delta y_0 + p_0 (x_1 - x_0) + \int_{x_0}^{x_1} (x_1 - x) \frac{X dx}{er^2} \\ \quad + \int_{x_0}^{x_1} \frac{P}{ke} dx, \\ \Delta z_1 = 0. \end{array} \right.$$

Assez ordinairement on néglige dans les applications l'effet de l'effort tranchant  $P$ , qui entre dans l'expression de  $\Delta y_1$ . On peut remarquer en outre que  $\Delta y_1$  n'est autre chose que  $y_1$  pour la pièce courbée par la flexion, et écrire en conséquence

$$y_1 = y_0 + p_0 (x_1 - x_0) + \int_{x_0}^{x_1} (x_1 - x) \frac{X dx}{er^2};$$

puis différentiant deux fois par rapport à la variable  $x_1$ , on aura

successivement

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{dy_1}{dx_1} = p_0 + \int_{x_0}^{x_1} \frac{X dx}{er^2}, \\ \frac{d^2y_1}{dx_1^2} = \frac{X_1}{e_1 r_1^2}. \end{cases}$$

Cette formule différentielle, sauf le changement des notations, est celle que l'on donne ordinairement dans les traités de Résistance des Matériaux, comme point de départ des calculs sur la flexion plane des pièces droites. Elle se présente ici comme conséquence d'une théorie assez compliquée; mais on peut l'établir directement d'une manière bien simple. Prenons en effet pour axe des  $x$  la fibre moyenne primitive, et pour axe des  $y$  une ligne perpendiculaire tracée dans le plan qui contient, par hypothèse, les forces extérieures ainsi que la fibre moyenne déformée. Puis qu'on suppose négligeable l'effet du glissement transversal, une section n'éprouvera, relativement à la section infiniment voisine, que les deux mouvements simples de l'extension et de la flexion : il en résulte, comme nous allons le montrer tout à l'heure (n° 50), que les sections primitivement normales sont encore normales après la déformation. Cela posé, la section menée par le point dont les coordonnées sont  $x$  et  $y$  fait avec le plan perpendiculaire à l'axe des  $x$  un angle égal à celui que fait avec le même axe la tangente à la fibre moyenne; cet angle, très-petit, peut être confondu avec sa tangente  $\frac{dy}{dx}$ . Pour la section infiniment voisine, placée à la distance  $dx$  de la première, l'angle analogue aura pour valeur  $\frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} dx$ ; donc les deux sections, primitivement parallèles, font maintenant entre elles un angle  $\frac{d^2y}{dx^2} dx$  qui représente la rotation relative, c'est-à-dire la flexion simple. Il en résulte un couple de forces moléculaires exprimé (n° 16) par  $er^2 \frac{d^2y}{dx^2}$ , attendu que  $\sin \delta$  est

ici égal à 1; et comme ce couple fait équilibre au couple fléchissant  $X$ , on doit avoir

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{X}{Er^2},$$

formule ne différant de l'équation (9) que par la suppression des indices.

**48. Du sens positif à attribuer aux couples  $V$ ,  $X$  dans les formules précédentes.** — Une chose a pu rester dans le doute lorsque nous avons établi les formules générales du n° 42 et celles des n°s 44, 46 et 47, qui en sont des conséquences : c'est le sens positif qu'on doit adopter quand on évalue, dans chaque problème particulier, les couples  $V$  et  $X$ , ou du moins les six composantes de la rotation relative de deux sections infiniment voisines, lesquelles déterminent le signe des quantités

$$V \frac{dx}{ds}, \quad V \frac{dy}{ds}, \quad V \frac{dz}{ds}, \quad X \cos \lambda, \quad X \cos \mu, \quad X \cos \nu.$$

La difficulté disparaîtra si l'on se rappelle qu'un couple qui agit pour tordre ou fléchir produit toujours une rotation dont l'axe fait un angle nul ou aigu avec l'axe représentatif de ce couple, car les forces moléculaires auxquelles il fait équilibre sont en sens contraire des déplacements. On connaîtra donc en grandeur, direction et sens les rotations produites par  $V$  et  $X$ ; il ne restera plus, en calculant leurs composantes, qu'à suivre les conventions du n° 40, relatives aux sens positifs des rotations autour de chaque axe coordonné.

Par exemple, lorsqu'il s'agira d'appliquer les formules (6), (8) ou (9), le couple  $X$  (qui est situé dans le plan des  $xy$ ) devra être considéré comme positif quand il tendra à faire venir la partie positive de l'axe des  $x$  sur la partie positive de l'axe des  $y$ . La même règle doit être observée pour l'application des formules (2) au cas particulier de la déformation plane (n° 45).

**49. Détermination des constantes qui représentent le mouvement de la section prise pour point de départ.** — Les for-



mules (1) du n° 42 font connaître les composantes  $\Delta x_1$ ,  $\Delta y_1$ ,  $\Delta z_1$  du déplacement d'un point quelconque de la fibre moyenne, en fonction des forces extérieures et de six quantités  $\Delta x_0$ ,  $\Delta y_0$ ,  $\Delta z_0$ ,  $m_0$ ,  $n_0$ ,  $p_0$  qui définissent le mouvement absolu d'une section. Dans le cas particulier de la déformation plane (n° 45), trois de ces quantités sont nulles, et il n'en subsiste que trois dans les formules, savoir  $\Delta x_0$ ,  $\Delta y_0$ ,  $p_0$ .

Au premier abord, on trouvera peut-être singulier que, connaissant la pièce dans son état primitif et les forces en équilibre qui lui sont ensuite appliquées, la théorie ne donne pas la situation qu'elle prend définitivement. Cependant on voit aisément qu'il doit en être ainsi, quand on se pénètre bien des conditions du problème. La question, qui consisterait à trouver le déplacement absolu, serait une question de dynamique, dans laquelle on devrait tenir compte, non-seulement de la situation primitive du corps et des forces qui lui sont appliquées, mais encore des masses de ses différents points et de leurs vitesses initiales. Or ce sont là des données que nous n'avons pas introduites. Nous avons simplement supposé l'équilibre des forces extérieures et la petitesse du déplacement total. Mais avec ces deux conditions on peut évidemment imaginer une infinité de déplacements, tous très-petits et d'ailleurs arbitraires. Si l'on en a trouvé un, et qu'on fasse mouvoir très-peu la pièce à partir de cette seconde position, sans altérer la forme nouvelle qu'elle a prise, les deux conditions dont il s'agit seront encore satisfaites. En effet, nous aurons bien un déplacement total très-petit, et les forces extérieures n'ayant pas sensiblement changé dans leurs positions relatives, se feront encore équilibre. Il y a donc une indétermination réelle dans le problème, et l'on ne peut la faire cesser qu'en introduisant de nouvelles données, comme nous allons le faire tout à l'heure.

Cependant quoique la position définitive de la pièce reste indéterminée tant que l'on ne connaît pas les quantités  $\Delta x_0$ ,  $\Delta y_0$ ,  $\Delta z_0$ ,  $m_0$ ,  $n_0$ ,  $p_0$ , on voit par la manière même dont les formules (1) ont été obtenues, que le mouvement de chaque section CD (*fig. 28*) relativement à la section initiale C, D, est parfaitement déterminé, en fonction des forces seulement : en

sorte que si l'on ne connaissait le mouvement absolu d'aucune section, il serait possible néanmoins de calculer la forme finale de la pièce, tout en laissant dans l'indécision sa situation réelle.

Maintenant nous allons donner quelques exemples de la détermination des quantités dont il s'agit, en nous bornant à ceux dont on aurait le plus fréquemment besoin dans les applications. La déformation sera supposée plane, et par suite il suffira de trouver les valeurs de  $\Delta x_0$ ,  $\Delta y_0$ ,  $p_0$ .

Le cas le plus simple serait celui où la pièce aurait en  $C_0 D_0$  (*fig. 28*), non-seulement un appui fixe, mais encore un encastrement qui rendrait sa direction invariable. Alors on aurait

$$\Delta x_0 = 0, \quad \Delta y_0 = 0, \quad p_0 = 0.$$

Si l'encastrement et l'appui fixe existaient en une autre section qu'on ne voudrait pas prendre pour point de départ,  $x'$  et  $y'$  étant les coordonnées de son centre d'élasticité, il faudrait exprimer que pour ce point  $\Delta x'$  et  $\Delta y'$  sont nuls et que la section conserve sa direction première, c'est-à-dire qu'elle n'a pas de rotation. Alors les formules (2) du n° 44, modifiées comme il est dit au n° 45, et la formule (6) du n° 46, donnent les équations

$$\Delta x_0 - p_0 (y' - y_0) + \tau (x' - x_0) + \int_{x_0}^{x'} \left( \frac{N}{e} - \frac{P}{he} \frac{dy}{dx} \right) dx - \int_{s_0}^{s'} (y' - y) \frac{X ds}{er^2} = 0,$$

$$\Delta y_0 + p_0 (x' - x_0) + \tau (y' - y_0) + \int_{y_0}^{y'} \left( \frac{N}{e} + \frac{P}{he} \frac{dx}{dy} \right) dy + \int_{s_0}^{s'} (x' - x) \frac{X ds}{er^2} = 0,$$

$$p_0 + \int_{s_0}^{s'} \frac{X ds}{er^2} = 0.$$

La dernière équation fait connaître immédiatement  $p_0$ , et par

une substitution dans les deux autres, on connaîtra  $\Delta x_0$ ,  $\Delta y_0$  :

$$\Delta x_0 = -\tau (x' - x_0) - \int_{x_0}^{x'} \left( \frac{N}{e} - \frac{P}{ke} \frac{dy}{dx} \right) dx + \int_{s_0}^{s'} (y_0 - y) \frac{X ds}{er^2},$$

$$\Delta y_0 = -\tau (y' - y_0) - \int_{y_0}^{y'} \left( \frac{N}{e} + \frac{P}{ke} \frac{dx}{dy} \right) dy - \int_{s_0}^{s'} (x_0 - x) \frac{X ds}{er^2}.$$

Supposons maintenant le cas très-ordinaire, presque le seul cas pratique, dans lequel les deux extrémités reposent simplement sur deux appuis fixes. Prenons l'un de ces appuis pour origine des coordonnées, la ligne qui les joint pour axe des  $x$ ; soit en outre  $2a$  leur distance. En appliquant au second appui la formule qui donne  $\Delta y_1$  (nos 44 et 45), on aura

$$2ap_1 + \int_0^{2a} \left( \frac{N}{e} \frac{dy}{dx} + \frac{P}{ke} \right) dx + \int_0^{2a} (2a - x) \frac{X}{er^2} \frac{ds}{dx} dx = 0,$$

équation d'où l'on tire très-aisément la valeur de  $p_1$ . D'ailleurs  $\Delta x_0$  et  $\Delta y_0$  sont nuls.

Enfin nous considérerons le cas où la fibre moyenne aurait un point fixe, et un élément dont la position changerait par la déformation, mais dont la direction serait déterminée à priori. C'est ce qui arrive, par exemple, lorsqu'un arc symétrique par rapport à une ligne est symétriquement chargé de chaque côté de cette ligne. Il est clair que la symétrie doit subsister après la déformation, et par suite la direction de l'élément situé sur l'axe de symétrie ne doit pas changer. Dans cette circonstance, on pourrait procéder ainsi qu'il suit. On prendrait pour axe des  $x$  une ligne quelconque passant par le point fixe, et pour axe des  $y$  une perpendiculaire menée par le point où l'on connaît la direction de la fibre moyenne. Ce dernier point étant pris pour l'une des limites  $(x_0, y_0)$  des intégrales définies, on aura d'abord, par hypothèse,  $p_1 = 0$ . Ensuite, si l'on appelle  $a$  l'abscisse du point fixe, les formules du n° 44, modifiées comme au n° 45 et appliquées à ce point, donneront

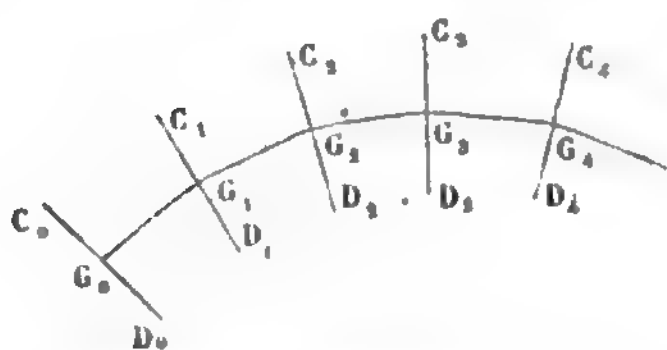
$$\Delta x_0 = -\tau a - \int_0^a \left( \frac{Xy}{er^2} \frac{ds}{dx} + \frac{N}{e} \right) dx + \int_0^a \frac{P}{ke} \frac{dy}{dx} dx,$$

$$\Delta y_0 = \tau y_0 - \int_0^a \left[ \frac{X(a-x)}{er^2} \frac{ds}{dx} + \frac{N}{e} \frac{dy}{dx} \right] dx - \int_0^a \frac{P}{ke} dx.$$

Dans le cas plus particulier où l'on supposerait une symétrie complète comme celle que nous donnions tout à l'heure pour exemple, on pourrait prendre la direction de l'axe des  $x$  de telle manière que l'axe des  $y$  fût la ligne de symétrie elle-même. Alors on aurait  $p_0 = 0$ ,  $\Delta x_0 = 0$ , et l'équation qui donne  $\Delta y_0$  ferait connaître la quantité dont varie la flèche de l'arc.

50. *Remarque sur la position définitive des sections normales.* — On peut se demander si les sections primitivement normales à la fibre moyenne le sont encore après la déformation. Pour répondre à cette question, on peut d'abord remplacer la fibre moyenne par un polygone infinitésimal.  $G_0, G_1, G_2, G_3, G_4, \dots$  (fig. 29). Tant que la section  $C_2 D_2$ , par exemple, n'aura relative-

Fig. 29.



ment à la section infiniment voisine  $C_1 D_1$  que les mouvements qui constituent l'allongement simple, la flexion et la torsion, il est clair que le point  $G_2$  se déplacera par rapport à  $C_1 D_1$  en restant sur

la direction de l'élément  $G_1 G_2$ ; donc le plan  $C_1 D_1$  restera normal à la courbe après la déformation. Mais s'il existe un effort tranchant  $P$  qui fasse glisser  $C_2 D_2$  dans son plan, le point  $G_2$  décrira un élément de chemin perpendiculairement à  $G_1 G_2$ , et cet élément aura un rapport fini avec  $G_1 G_2$ : donc après que les forces auront produit leur effet, le plan  $C_1 D_1$  ne sera plus normal à la fibre moyenne.

51. *Construction géométrique approximative de la fibre moyenne déformée.* — Si l'on pouvait construire géométriquement les lignes représentatives du mouvement résultant d'une section normale quelconque  $CD$  (fig. 28), il serait aisé d'en déduire le déplacement du point  $G$ . Or, comme on l'a vu au n° 41, le mouvement de  $CD$  résulte de la composition d'une infinité de mouvements, savoir: 1° le mouvement de la section initiale  $C_0 D_0$ ; 2° tous les mouvements relatifs des groupes de deux sections infiniment voisines entre  $C_0 D_0$  et  $CD$ . Ces mouvements relatifs, en nombre infini, ne peuvent pas en général être composés rigoureusement par des constructions géométriques. Mais

on peut éluder la difficulté en partageant l'intervalle  $G,G$  par des plans normaux suffisamment rapprochés, en nombre fini, et traitant chaque portion de pièce comprise entre deux de ces plans consécutifs comme un élément de longueur infiniment petite. De cette manière, le mouvement de la section  $CD$ , et, par suite, le déplacement du point  $G$  s'obtiendraient par la composition d'un nombre fini de mouvements, composition qui peut s'exécuter géométriquement ou par le calcul.

52. *Observation au sujet de l'effort tranchant dans une section quelconque.* — Dans diverses occasions, et notamment aux n<sup>os</sup> 19 et 39, quand il était question de déterminer les tensions en un point quelconque d'une pièce, nous avons dit qu'on négligeait habituellement l'effet de la force transversale désignée par  $P$  dans les calculs du n<sup>o</sup> 42, laquelle tend à produire un glissement relatif de deux sections voisines, parallèlement à leur plan. L'expérience a généralement consacré cette manière d'opérer, à laquelle nous nous conformerons presque toujours, dans le but de simplifier les applications que nous avons à faire de la théorie. Ainsi nous admettrons comme un fait que, sauf les cas exceptionnels que nous signalerons, les tensions transversales ont peu d'importance dans les pièces que les ingénieurs ont à établir, relativement aux tensions longitudinales; et qu'il en est de même des déformations correspondantes. Par conséquent, lorsque nous appliquerons les diverses formules de ce §, nous négligerons à l'avenir les termes qui contiennent la force  $P$ .

## § II. — Recherche des forces inconnues.

53. *Indications succinctes sur la nature des questions à résoudre.* — Ainsi que nous l'avons dit au commencement du Cours, il peut arriver, et il arrive le plus ordinairement dans les applications, que toutes les forces qui sollicitent une pièce ne sont pas des données immédiates de la question. Par exemple, lorsqu'un arc symétrique par rapport à une verticale et chargé de poids disposés symétriquement par rapport à cette ligne, repose à ses extrémités sur deux appuis placés au même niveau, il suffit pour l'équilibre que chaque appui fournisse



une réaction verticale égale à la moitié de la somme des poids qui agissent sur la pièce entière. Mais s'il ne donnait pas lieu à une autre réaction, il arriverait que la corde de l'arc varierait en longueur; c'est un fait que l'on pourrait reconnaître au moyen des formules du § I de ce chapitre, et qui est d'ailleurs évident quand on suppose un changement de température. Or, si les appuis sont disposés de manière à empêcher cette variation de la corde, il est clair que par cela même ils doivent exercer sur la pièce des forces horizontales, capables de produire une variation égale et de sens contraire à celle qui aurait eu lieu sans leur existence. Ces forces ne sont pas données immédiatement; elles sont une conséquence de la forme de l'arc et des charges qui agissent sur lui. Leur détermination constitue un problème d'une nature particulière.

On serait conduit à une conclusion analogue si l'on supposait généralement un arc lié d'une manière quelconque à certains corps qui l'empêchent de se déformer librement sous l'action des forces qui lui sont appliquées, comme il le ferait sans l'existence de ces obstacles. Pour annuler ou tout au moins pour modifier les déplacements qui tendent à se produire, il faut que la présence des obstacles donne lieu à certaines réactions, qui ordinairement ne peuvent pas être déterminées indépendamment de l'étude des déformations produites. C'est ainsi que, dans l'exemple précédent, on se trouverait conduit à chercher l'expression de l'allongement de la corde.

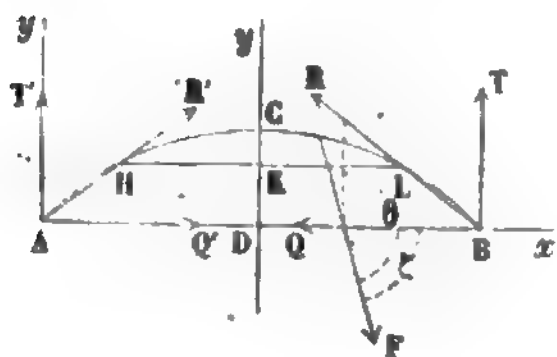
Comme il peut y avoir un grand nombre de combinaisons diverses, soit dans la disposition des appuis et des obstacles de toute nature opposés au mouvement de la pièce, soit dans la nature de ces obstacles et leur mode d'action, le problème dont nous avons à nous occuper ici peut donner lieu à une grande variété de problèmes particuliers, et il serait presque impossible de donner une théorie en termes tout à fait généraux. Nous croyons même qu'il serait inutile d'essayer une classification. Mais nous traiterons avec détail un certain nombre de questions qui montreront bien la marche que l'on devrait suivre dans d'autres cas, auxquels ne s'appliqueraient pas directement les calculs que nous allons développer. Nous nous bornerons d'ailleurs au cas de la déformation plane, et nous négligerons

les effets de l'élasticité transversale; les formules de déformation qu'il conviendra d'employer seront donc celles du n° 44, en ayant égard aux observations des n° 45 et 52.

54. PREMIER CAS. *Pièce non symétrique reposant sur deux appuis fixes.* — Le cas qui se présente le plus ordinairement dans la pratique est celui d'un arc soutenu à ses deux extrémités par deux appuis inébranlables, qui empêchent tout mouvement des points extrêmes de la fibre moyenne. En général, ces appuis consistent en forts massifs de maçonnerie sur lesquels on dispose un siège en fonte, ou embase, suivant l'expression technique. L'arc doit reposer sur l'embase par l'intermédiaire d'une lame de plomb ou de cales en fer destinées à produire une répartition sensiblement uniforme de la pression; en sorte qu'on peut admettre, sans s'écarter vraisemblablement beaucoup des faits réels, que dans les sections extrêmes le centre des tensions se trouve sur la fibre moyenne. Les supports jouent ici le même rôle que des articulations fixes placées aux extrémités de la fibre moyenne. Entre ces deux points et dans son plan, l'arc reçoit l'action des charges qu'il doit supporter, y compris celle de son propre poids, mais il n'est d'ailleurs contrarié dans ses mouvements par aucun obstacle, à l'exception de ceux qui l'empêchent de sortir de son plan par l'effet de causes accidentelles.

Soient  $AB$  (fig. 30) la fibre moyenne,  $F$  l'une des forces qui la sollicitent,  $R, R'$  les réactions des supports placés en  $A$  et en  $B$ . Il s'agit de déterminer ces réactions. D'abord on observera

Fig. 30.



qu'elles doivent être dans le plan de la figure; car, puisque toutes les autres forces extérieures sont dans ce plan, l'équilibre n'existerait pas sans cela: donc on pourra remplacer  $R$  par deux forces  $T, Q$ , l'une perpendiculaire à  $AB$ , l'autre dirigée suivant  $AB$ ; de même

$R'$  sera remplacé par le système  $T', Q'$ . Cela posé, en appelant  $\zeta$  et  $\theta$  les angles faits par la force  $F$  avec les axes coordonnés  $Ax, Ay$ ,  $2a$  la distance  $\overline{AB}$ ,  $d$  le bras de levier de  $F$  rela-

tivement au point A, les conditions générales d'équilibre entre les forces extérieures d'un système donneront

$$Q' + \Sigma F \cos \zeta - Q = 0,$$

$$T' + T + \Sigma F \cos \theta = 0,$$

$$2aT - \Sigma F d = 0;$$

équations dont les deux premières expriment l'équilibre de translation, et la troisième l'équilibre des moments autour du point A. Cela ne fait encore que trois équations entre quatre inconnues. La quatrième nous sera fournie en exprimant que, malgré l'action de toutes les forces, la distance des deux extrémités A et B de la fibre moyenne reste invariable. Si nous prenons pour axe des coordonnées la ligne AB et la perpendiculaire Ay, nous devons avoir pour le point B,  $\Delta x_1 = 0$ . Appliquons donc à ce point les formules du n° 44, en prenant le point A pour origine des intégrations. Il faudra faire à la fois dans l'expression de  $\Delta x_1$ ,

$$\Delta x_1 = 0, \quad \Delta x_0 = 0, \quad y_1 = 0, \quad y_0 = 0,$$

$$x_1 = 2a, \quad x_0 = 0, \quad \sin \delta = 1, \quad \cos \nu = 1,$$

ce qui donnera, en supprimant d'ailleurs le terme  $\frac{P}{ke} \frac{dy}{dx}$  (n° 52),

$$2\tau a + \int_0^{2a} \left( \frac{Xy}{e} \frac{ds}{dx} + \frac{N}{e} \right) dx = 0,$$

équation dans laquelle il n'entre en réalité d'autre inconnue que la force Q. Pour la mettre en évidence, nous poserons, en ayant égard aux conventions sur les signes algébriques de N et de X (nos 42 et 48),

$$X = X' - Qy, \quad N = N' - Q \frac{dx}{ds}.$$

Alors X' sera la somme des moments, par rapport à un point quelconque de la fibre moyenne, de toutes les forces qui agissent depuis ce point jusqu'au point B, moins la force Q; de même N' sera la somme des projections de ces forces sur la tangente au point considéré, la force Q étant encore laissée de côté. X' et N' seront donc des fonctions de x immédiatement

calculables, car  $X$  et  $N$  ne contiennent que les inconnues  $T$  et  $Q$ , dont la première est déterminée par la troisième des équations données ci-dessus. Substituant ces valeurs de  $X$  et de  $N$ , on aura

$$2\tau a + \int_0^{2a} \frac{X' y}{er^2} \frac{ds}{dx} dx - Q \int_0^{2a} \frac{y^2}{er^2} \frac{ds}{dx} dx \\ + \int_0^{2a} \frac{N'}{e} dx - Q \int_0^{2a} \frac{1}{e} \frac{dx}{ds} dx = 0;$$

d'où l'on tire

$$(10) \quad Q = \frac{\int_0^{2a} \frac{X' y}{er^2} \frac{ds}{dx} dx + \int_0^{2a} \frac{N'}{e} dx + 2\tau a}{\int_0^{2a} \frac{y^2}{er^2} \frac{ds}{dx} dx + \int_0^{2a} \frac{1}{e} \frac{dx}{ds} dx}.$$

Après avoir ainsi déterminé  $T$  et  $Q$ , on en conclura sans peine  $T'$  et  $Q'$  au moyen des deux équations qui expriment l'équilibre de translation de la pièce.

Dans le cas où l'on trouverait pour l'une des inconnues une valeur négative, cela indiquerait simplement que la force qu'elle représente est de sens contraire à celui qu'on lui a supposé sur la figure.

Les forces  $Q$  et  $Q'$  considérées en sens contraire, ou, autrement, les actions horizontales exercées par l'arc sur ses appuis, sont ce qu'on appelle les *poussées* de cet arc, lorsqu'elles tendent à renverser les appuis en dehors. Généralement elles peuvent être inégales; mais elles prennent la même valeur quand  $\Sigma F \cos \theta$  est nul, ce qui arrive notamment quand l'arc n'est chargé que de poids et que sa corde est horizontale.

55. DEUXIÈME CAS. *Pièce symétrique et symétriquement chargée.* — Supposons que l'arc représenté (fig. 30) soit placé dans les conditions qui ont été définies au n° 54, à part cette différence que la fibre moyenne sera symétrique relativement à la perpendiculaire  $Dy$ , menée au milieu de  $AB$ , et qu'il en sera de même des forces qui agissent à droite et à gauche de cette ligne. En vertu de cette symétrie, il est clair que le point  $C$  devra, par l'effet de la déformation, se déplacer suivant l'axe

$Dy$ , et que les réactions  $R, R'$ , nécessairement contenues dans le plan de la fibre moyenne, seront de plus égales. Appelons encore  $T$  et  $Q$  les composantes de l'une d'elles,  $F$  une des forces qui agissent entre  $C$  et  $B$  (nous laisserons de côté la force symétrique),  $\zeta$  et  $\theta$  les mêmes angles que tout à l'heure; on aura

$$T + \sum F \cos \theta = 0,$$

ce qui détermine l'inconnue  $T$ .

Afin d'avoir  $Q$ , prenons  $Dy$  et  $Dx$  pour axes des coordonnées, et exprimons que  $\Delta x_1$  est nul au point  $B$ . Nous appliquerons la formule qui donne  $\Delta x_1$  (n° 44) en prenant le point  $C$  pour origine des intégrations, et faisant en conséquence,

$$\Delta x_1 = 0, \quad \Delta x_0 = 0, \quad p_0 = 0,$$

$$x_1 = \overline{BD} = a, \quad x_0 = 0, \quad y_1 = 0,$$

valeurs qui jointes aux conditions  $\sin \delta = 1$ ,  $\cos \nu = 1$ ,  $P = 0$  (n°s 45 et 52) fournissent l'équation

$$\tau a + \int_0^a \left( \frac{Xy}{er^2} \frac{ds}{dx} + \frac{N}{e} \right) dx = 0.$$

Si nous remplaçons, comme dans le premier cas,  $X$  par  $X' - Qy$ ,  $N$  par  $N' - Q \frac{dx}{ds}$ , nous aurons

$$\begin{aligned} \tau a + \int_0^a \frac{X'y}{er^2} \frac{ds}{dx} dx - Q \int_0^a \frac{y^2}{er^2} \frac{ds}{dx} dx \\ + \int_0^a \frac{N'}{e} dx - Q \int_0^a \frac{1}{e} \frac{dx}{ds} dx = 0, \end{aligned}$$

et, par suite,

$$(11) \quad Q = \frac{\int_0^a \frac{X'y}{er^2} \frac{ds}{dx} dx + \int_0^a \frac{N'}{e} dx + \tau a}{\int_0^a \frac{y^2}{er^2} \frac{ds}{dx} dx + \int_0^a \frac{1}{e} \frac{dx}{ds} dx},$$

ce qui résout le problème.

36. TROISIÈME CAS. *Pièce soutenue par un plan sans obstacle direct à l'allongement de la corde.* — Supposons que la pièce



définie au n° 54 soit soutenue à ses extrémités par un plan sans frottement, qui empêche les points A et B de pénétrer à son intérieur, mais qui n'oppose aucun obstacle à leur écartement. Alors il est visible que les composantes des deux réactions en A et B, suivant la ligne AB, sont nulles; il ne reste donc que les composantes normales T et T', que l'on calculera comme au n° 54.

Si le frottement du plan n'était pas nul, et avait un coefficient égal à  $f$ , on calculerait les poussées Q et Q' suivant la marche du n° 54, dans l'hypothèse de la fixité complète des extrémités de l'arc. En supposant que ce calcul donnât  $Q < fT$  et  $Q' < fT'$  en valeur absolue, il est clair qu'aucun glissement n'aurait lieu, et que les choses se passeraient comme si la fixité supposée existait réellement. Mais si ces deux inégalités n'étaient pas satisfaites, la corde  $\overline{AB}$  varierait jusqu'à ce que Q et Q' fussent réduits respectivement à  $fT$  et  $fT'$ . Les réactions totales seraient donc  $T\sqrt{1+f^2}$ ,  $T'\sqrt{1+f^2}$ ; elles feraient avec la normale un angle égal à l'angle du frottement.

Cet exemple, comparé à celui du n° 54, montre bien clairement que la poussée d'un arc ne peut être obtenue qu'en exprimant l'invariabilité de la corde. Toute méthode qui serait fondée sur un autre principe pécherait par la base; les résultats qu'on en déduirait pourraient être approximatifs avec certaines données particulières, mais ils seraient souvent très-loin de l'exactitude.

57. QUATRIÈME CAS. *Pièce encastrée à ses deux extrémités.* — Ce cas ayant peu d'importance pratique, nous restreindrons la question, en supposant qu'il s'agisse d'un arc symétrique et symétriquement chargé, comme celui dont nous venons de nous occuper au n° 53. Nous ajouterons simplement cette condition, que, au lieu de deux simples appuis en A et B (*fig. 30*), il y a encastrement : c'est-à-dire que la direction de la tangente est maintenue invariable en ces points. Alors les réactions dans les sections extrêmes devront bien toujours être contenues dans le plan de la fibre moyenne; mais, comme nous allons le voir, elles ne passeront plus nécessairement par les points A et B. Si donc nous les transportons en ces points, il faudra en même temps introduire un couple inconnu, dont nous représenterons le moment par  $\mu$ , et l'on aura ainsi, au lieu de T et de Q, trois inconnues, T, Q et  $\mu$ , à déterminer.

La première sera donnée, comme au deuxième cas, par l'équation

$$T + \Sigma F \cos \theta = 0,$$

qui n'a aucune modification à subir. Les deux autres s'obtiendront en exprimant que  $p_1$  et  $\Delta x_1$  sont nuls pour le point B. A cet effet, on se servira des équations (2) du n° 44 et (6) du n° 46. Prenant le point C pour origine des intégrations, et appelant toujours  $a$  la distance  $\overline{BD}$ , on trouvera

$$\int_0^a \frac{X}{cr^2} \frac{ds}{dx} dx = 0,$$

$$\tau a + \int_0^a \left( \frac{Xy}{cr^2} \frac{ds}{dx} + \frac{N}{e} \right) dx = 0.$$

Or  $X'$  et  $N'$  conservent la même signification que précédemment (sauf que  $\mu$  ne sera pas compris dans le moment  $X'$ ), on pourra poser

$$X = X' - Qy + \mu.$$

$$N = N' - Q \frac{dx}{ds},$$

valeurs qui, substituées dans les deux dernières équations, donneront pour résultats :

$$\mu \int_0^a \frac{1}{cr^2} \frac{ds}{dx} dx - Q \int_0^a \frac{y}{cr^2} \frac{ds}{dx} dx + \int_0^a \frac{X'}{cr^2} \frac{ds}{dx} dx = 0,$$

$$\begin{aligned} \tau a + \mu \int_0^a \frac{y}{cr^2} \frac{ds}{dx} dx - Q \int_0^a \frac{y^2}{cr^2} \frac{ds}{dx} dx + \int_0^a \frac{X'y}{cr^2} \frac{ds}{dx} dx \\ + \int_0^a \frac{N'}{e} dx - Q \int_0^a \frac{1}{e} \frac{dx}{ds} dx = 0, \end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned} \mu \int_0^a \frac{1}{cr^2} \frac{ds}{dx} dx - Q \int_0^a \frac{y}{cr^2} \frac{ds}{dx} dx &= - \int_0^a \frac{X'}{cr^2} \frac{ds}{dx} dx, \\ - \mu \int_0^a \frac{y}{cr^2} \frac{ds}{dx} dx + Q \left( \int_0^a \frac{y^2}{cr^2} \frac{ds}{dx} dx + \int_0^a \frac{1}{e} \frac{dx}{ds} dx \right) \\ &= \tau a + \int_0^a \frac{X'y}{cr^2} \frac{ds}{dx} dx + \int_0^a \frac{N'}{e} dx. \end{aligned}$$

Les deux inconnues  $\mu$  et  $Q$  sont en évidence dans ces deux équations du premier degré. Il sera donc facile de les obtenir lorsque préalablement

on aura calculé les diverses intégrales définies, ce qu'on pourra toujours faire, au moins par approximation. On connaît déjà  $T$  : le problème est donc résolu, car les réactions sont symétriques en A et B.

Si la symétrie n'existait pas comme nous l'avons supposé, il y aurait six inconnues,  $T, Q, \mu$ , et les quantités analogues,  $T', Q', \mu'$ , se rapportant au point A. On écrirait d'abord les trois équations d'équilibre des forces extérieures; puis, prenant le point A pour origine des intégrations, et les lignes  $Ax, Ay$  pour axe des coordonnées, on appliquerait au point B les équations (2) et (6) des n° 44 et 46, au moyen desquelles on exprimerait que  $\Delta x_1, \Delta y_1$  et  $p_1$  s'annulent pour ce point. On ferait dans ces équations  $\Delta x_0, \Delta y_0, p_0, x_1, y_1, x_0$  tous nuls,  $x_1 = 2a$ ,  $\sin \delta = 1$ ,  $\cos \nu = 1$ ,  $P = 0$ ; on aurait alors les trois équations nécessaires pour achever de déterminer les inconnues.

58. CINQUIÈME CAS. *Pièce munie d'un tirant parallèle à la corde et reposant simplement sur deux appuis.* — Reprenons la pièce considérée au n° 55 et supposons qu'elle soit munie d'un tirant parallèle à la corde. Ce tirant sera une pièce droite articulée à ses deux extrémités; il devra joindre deux points qui, sans son action, tendraient à s'écarter l'un de l'autre. Cette condition est de rigueur si l'on ne veut employer comme tirant qu'une simple tige, en fer par exemple, qui puisse très-bien résister à une tension, mais fléchissant avec facilité sous une compression. Il est clair que si les points d'articulation tendaient à se rapprocher, le tirant serait à peu près inutile, à moins que ce ne fût une pièce rigide et de forte section. Au reste, les calculs que nous allons faire seraient encore applicables à ce cas. Nous supposerons en outre qu'aucune charge ne porte directement sur le tirant et qu'on peut faire abstraction de son poids comme relativement petit. Il s'agit de déterminer sa tension et la réaction exercée par l'un des appuis sur l'arc.

Soient HL (fig. 30) la fibre moyenne du tirant,  $2l$  sa longueur,  $S$  sa tension,  $\pi$  son ressort longitudinal (n° 13),  $b$  la distance  $\overline{DK}$  entre la fibre moyenne HL et la corde AB de l'arc. Conservons les autres notations du n° 55 et prenons pour axes coordonnés les lignes  $Dx, Dy$ . A cause de la symétrie complète par rapport à la ligne  $Dy$ , il est évident que le point C ne peut se déplacer que suivant cette ligne même et que l'élément supérieur de l'arc n'est pas dévié par l'effet de la déformation; d'un autre côté, l'allongement de la pièce KL, soumise à la tension  $S$ , a pour expression  $\frac{Sl}{\pi}$  (n° 12 et 13); enfin, B étant un appui fixe, les coordonnées de l'extrémité de l'arc sont invariables. Il résulte de là, d'une part, que  $p_1$  s'annule pour le point C; d'autre part, que  $\Delta x_1$  est nul en C et B et égal à  $\frac{Sl}{\pi}$  au point de jonction L du tirant avec la pièce principale.

Donc, si l'on applique la première des équations (2) du n° 44 aux points L et B et si l'on place au point C l'origine des intégrales définies, on aura, en continuant toujours à tenir compte des observations faites aux n° 45 et 52 :

$$\tau a + \int_0^a \frac{Xy}{er^2} \frac{ds}{dx} dx + \int_0^a \frac{N}{e} dx = 0,$$

$$\tau l + \int_0^l \frac{X(y-b)}{er^2} \frac{ds}{dx} dx + \int_0^l \frac{N}{e} dx = \frac{Sl}{n}.$$

Or on peut poser

$$\text{Entre } x = 0 \text{ et } x = l \dots \begin{cases} X = X' - Qy - S(y-b), \\ N = N' - (Q + S) \frac{dx}{ds}; \end{cases}$$

$$\text{Entre } x = l \text{ et } x = a \dots \begin{cases} X = X' - Qy, \\ N = N' - Q \frac{dx}{ds}. \end{cases}$$

La valeur de la réaction T parallèle aux  $y$  étant la même qu'au n° 55,  $X'$  et  $N'$  sont immédiatement calculables pour chaque point en fonction de  $x$ ,  $y$  et des forces connues. Substituant ces valeurs de  $X$  et de  $N$  dans les deux équations précédentes, on trouve :

$$Q \left( \int_0^a \frac{y^2}{er^2} \frac{ds}{dx} dx + \int_0^a \frac{1}{e} \frac{dx}{ds} dx \right) \\ + S \left( \int_0^l \frac{y(y-b)}{er^2} \frac{ds}{dx} dx + \int_0^l \frac{1}{e} \frac{dx}{ds} dx \right) \\ \tau a + \int_0^a \frac{X'y}{er^2} \frac{ds}{dx} dx + \int_0^a \frac{N'}{e} dx, \\ Q \left( \int_0^l \frac{(y-b)y}{er^2} \frac{ds}{dx} dx + \int_0^l \frac{1}{e} \frac{dx}{ds} dx \right) \\ + S \left( \int_0^l \frac{(y-b)^2}{er^2} \frac{ds}{dx} dx + \int_0^l \frac{1}{e} \frac{dx}{ds} dx + \frac{l}{n} \right) \\ - \tau l + \int_0^l \frac{X'(y-b)}{er^2} \frac{ds}{dx} dx + \int_0^l \frac{N'}{e} dx.$$

Ces deux équations du premier degré ne contiennent plus que les inconnues  $Q$  et  $S$ , qui sont par conséquent déterminées.

Si pour plus de rigueur on voulait tenir compte du poids du tirant,

cela ne compliquerait pas notablement la question. Les mêmes équations symboliques subsisteraient. Seulement  $\Pi$  étant la moitié du poids en question, on devrait dans le calcul de  $T$ ,  $X'$ ,  $N'$ , comprendre les termes qui seraient produits par le poids  $\Pi$  appliqué au point  $L$ .

Il arrive quelquefois que les tirants sont formés de deux tiges en prolongement l'une de l'autre, réunies dans un même écrou à une de leurs extrémités. Ces deux extrémités qui sont réunies dans l'écrou portent des vis filetées en sens contraire, de telle sorte qu'en faisant tourner l'écrou on produit un serrage, c'est-à-dire une diminution de la longueur totale du tirant. Si ce cas se présentait, au lieu d'égaliser à  $\frac{Sl}{\eta}$  le  $\Delta x$ , du point  $L$ ,

on devrait l'égaliser à la même quantité diminuée du raccourcissement dû au serrage. Souvent aussi le serrage est réglé pendant la construction même de manière à rendre  $Q$  sensiblement nul; la première des deux équations précédentes suffirait alors pour calculer  $S$ , après y avoir fait  $Q = 0$ ; la seconde, modifiée en supprimant de même le terme qui contient  $Q$  et introduisant le serrage, pourrait servir à déterminer théoriquement cette quantité.

39. *Analyse sommaire d'un cas plus général.* — Supposons un réseau de pièces dont les fibres moyennes sont dans un même plan contenant aussi les forces extérieures, et dont les sections ont une forme telle, que la déformation se produit aussi dans ce plan (n° 43). Ce réseau est formé par une pièce principale sur laquelle viennent s'embrancher, par articulation ou encastrement, des pièces secondaires indépendantes les unes des autres. On suppose que la pièce principale ait  $i$  points assujettis à glisser sur des courbes fixes sans frottement;  $j$  points fixes, parmi lesquels  $j'$  sont des appuis simples et  $j''$  des encastements;  $2k$  points reliés deux à deux par des tirants articulés à leurs extrémités;  $l$  points reliés à des points fixes par autant de pièces; parmi ces  $l$  pièces, il y en a  $l'$  articulées à leurs deux extrémités,  $l''$  encastées à leur extrémité fixe et articulées à leur point de croisement avec l'arc principal,  $l'''$  encastées au contraire à ce dernier point et articulées à l'autre,  $l''''$  encastées à leurs deux extrémités. Étant données la définition géométrique du système et les forces qui le sollicitent, on demande les réactions des points fixes et les actions mutuelles des diverses pièces les unes sur les autres.

A chaque point assujetti à demeurer sur une courbe sans frottement répondra une réaction dont il n'y aura que l'intensité à rechercher, car sa direction sera celle de la normale à la courbe; à chaque articulation correspondront des forces inconnues qui sont les composantes de la réaction totale suivant deux axes coordonnés; pour chaque encastrement il y aura, outre ces deux forces, une inconnue de plus, qui sera le moment du



couple engendré par le transport en un point déterminé de la réaction totale dont on ne connaît plus d'avance le point d'application. On sait, en effet, que dans un assemblage articulé la réaction totale exercée sur une pièce par l'articulation passe au centre autour duquel la rotation peut s'effectuer; mais il n'en est plus de même, évidemment, dans le cas d'un assemblage rigide, qui est capable d'empêcher une rotation autour de son centre. Ainsi donc il y aura un nombre total d'inconnues égal à

$$i + 2(j' + 2k + 2l' + l'' + l''') + 3(j'' + l'' + l''' + 2l^{iv}).$$

Faisons maintenant le dénombrement des équations que nous pouvons écrire pour les déterminer.

En premier lieu, la statique des systèmes invariables nous donnera trois équations d'équilibre pour chaque pièce, soit en tout.....  $3(k + l + 1)$ .

Les variations  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  des deux coordonnées de tout point glissant sur une courbe fixe ont entre elles une relation obligée. Soit, en effet,  $y = f(x)$  l'équation de la courbe; à cause de la petitesse de  $\Delta x$  et  $\Delta y$ , on aura

$$\Delta y = f'(x) \Delta x.$$

En mettant pour  $x$  la valeur qui résulte de la figure donnée du système, pour  $\Delta y$  et  $\Delta x$  leurs expressions en fonction des forces, cela fera donc une équation pour chaque point se trouvant dans la condition dont il s'agit, soit en tout.....  $l$ .

Les coordonnées de chaque point appartenant à deux pièces différentes doivent varier de la même quantité, quelle que soit celle des deux à laquelle on l'attribue. Comme il y a  $2k + l$  points dans ce cas, en exprimant ce fait on posera  $2(2k + l)$  équations, ci.....  $2(2k + l)$ .

La variation angulaire  $p$  doit être la même pour deux sections faites au point où deux pièces viennent s'encastrent l'une dans l'autre. On aura, pour exprimer cette condition, un nombre d'équations qui sera.....  $l'' + l'''$ .

Les variations des coordonnées sont nulles pour chaque point fixe. Si donc on égale ces variations à zéro, on trouvera de cette manière des équations dont le nombre sera  $2(j + l)$ .

Enfin les variations d'inclinaison des sections normales faites aux points fixes d'encastrement sont nulles, ce qui donne encore lieu à  $j'' + l'' + l^{iv}$  équations, ci.....  $j'' + l'' + l^{iv}$ .

En récapitulant, on voit qu'il y a en tout

$$i + 2j + j'' + 7k + 7l + l'' + l''' + 2l'''' + 3 \text{ équations.}$$

Nous avons vu que le nombre des inconnues est de

$$i + 2j' + 3j'' + 4k + 4l' + 5l'' + 5l''' + 6l'''';$$

or on a, d'après la définition même des lettres,

$$j = j' + j'', \quad l = l' + l'' + l''' + l'''';$$

par suite, le nombre des inconnues est encore exprimé par

$$i + 2j + j'' + 4k + 4l + l'' + l''' + 2l''''.$$

Donc le nombre des équations posées ci-dessus dépasse de  $3k + 3l + 3$  celui des inconnues. Mais il est à remarquer que dans ces équations entreront nécessairement, comme on l'a vu au n° 49, des constantes représentant pour chaque pièce le mouvement de la section initiale. Ces constantes seront au nombre de trois pour chaque pièce, et puisqu'il y a  $k + l + 1$  pièces, en comptant la pièce principale, les tirants et les pièces secondaires, on aura donc en définitive  $3(k + l + 1)$  inconnues auxiliaires, et par conséquent il y aura juste autant d'équations que d'inconnues.

Cet exemple pourrait, sans beaucoup de difficulté, recevoir une généralité plus grande, en écartant les hypothèses de la flexion dans un plan de l'indépendance des pièces secondaires, etc. Mais quand on essaye d'exécuter des calculs de cette espèce, même pour des systèmes composés d'un petit nombre de pièces, on est frappé de leur immense complication (\*). La généralisation dont il s'agit aurait donc peu d'intérêt pratique.

**§ III. — Remarques et théorèmes concernant la manière dont les forces extérieures entrent dans les formules qui font connaître la déformation d'une pièce. Conséquences.**

**60. Expression des quantités N, P, V, X en fonction des forces.** — Les quantités que nous avons désignées par N, P, V et X dans le cours du présent chapitre et dans le chapitre I<sup>er</sup>, sont : les deux premières, des sommes de projections sur un

---

(\*) Voir dans nos *Recherches analytiques sur la flexion et la résistance des pièces courbes*, chap. III, § VI, le calcul des actions mutuelles et des réactions des appuis, pour un pont du système Vergniais.

axe, de diverses forces extérieures, connues ou non; les deux autres, des sommes de moments de ces mêmes forces, par rapport à des axes déterminés. Donc, si l'on désigne les forces par  $F, F_1, F_2, \text{ etc.}$ , et par  $D, D_1, D_2, \text{ etc.}$ , des coefficients qui dépendent seulement des dimensions de la pièce et de la position des forces extérieures, on aura, pour les quantités dont il s'agit, des expressions de la forme

$$(1) \quad DF + D_1 F_1 + D_2 F_2 + \dots$$

D'ailleurs ces expressions ne seront pas applicables, sans changement, à la pièce considérée dans toute son étendue. Si on la parcourt dans le sens où l'on compte positivement la variable  $s$  qui entre dans les formules du n° 42, à mesure que l'on dépasse la section où se trouve le point d'application de chaque force, on doit supprimer le terme correspondant à cette force dans les valeurs de  $N, P, V$  et  $X$ . Toujours est-il que  $N, P, V$  et  $X$  sont des fonctions linéaires des forces extérieures, données ou inconnues, qui sollicitent la pièce : seulement le coefficient de chaque force devient constamment nul pour tous les points compris dans une certaine portion de la fibre moyenne.

Lorsqu'on suppose en outre que les angles  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu, \nu$ , qui entrent dans les formules générales de la déformation (n° 42 et suivants), sont uniquement fonction des coordonnées  $x, y, z$  de la section à laquelle ils se rapportent, la propriété qu'on vient de reconnaître aux quantités  $N, P, V, X$  entraîne d'autres fort importantes à cause des nombreuses applications qu'on peut en faire en pratique. Nous allons maintenant les passer en revue. Nous ferons toutefois observer auparavant que la supposition relative aux angles se trouve vérifiée d'elle-même quand il s'agit du cas particulier de la déformation plane étudié au n° 45 : en effet on a dans ce cas

$$\cos \alpha = \pm \frac{dy}{ds}, \quad \cos \beta = \mp \frac{dx}{ds}, \quad \gamma = \frac{\pi}{2}, \quad \delta = \frac{\pi}{2},$$

$$\lambda = \frac{\pi}{2}, \quad \mu = \frac{\pi}{2}, \quad \nu = 0.$$

61. *Expression en fonction des forces et du coefficient  $\tau$ ,*

des six constantes  $\Delta x_0, \Delta y_0, \Delta z_0, m_0, n_0, p_0$ , qui déterminent le mouvement de la section initiale. — Les six constantes qui déterminent le mouvement de la section initiale pourraient être données d'une manière absolument indépendante des forces; mais dans les applications pratiques il n'en sera presque jamais ainsi. Les conditions qui ont servi précédemment à en trouver la valeur (n° 49) reviennent toutes à égaler à zéro les variations de coordonnées d'un point, ou la rotation d'une section : nous admettrons, comme règle générale, qu'il en est toujours de même. On en conclut facilement (sauf la restriction mentionnée ci-dessus au sujet des angles  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu, \nu$ ) que les six constantes sont des fonctions linéaires, sans terme indépendant, des forces extérieures et du coefficient de dilatation  $\tau$ , c'est-à-dire qu'en appelant  $K, K_1, K_2, \dots, K_n$  des coefficients qui dépendent seulement des dimensions de la pièce et de la direction des forces extérieures, on aura, pour exprimer une quelconque de ces constantes, des valeurs de la forme

$$(2) \quad KF + K_1 F_1 + K_2 F_2 + \dots + K_n \tau.$$

En effet, après qu'on aura remplacé dans  $\Delta x_0, \Delta y_0, \Delta z_0, m_0, n_0, p_0$  (nos 42 et 46) les quantités  $N, P, V, X$  par leurs valeurs en fonction des forces, on aura des fonctions linéaires, sans terme indépendant, des quantités  $\Delta x_0, \Delta y_0, \Delta z_0, m_0, n_0, p_0, \tau, F, F_1, F_2, \dots$ . Donc les six équations d'où l'on devra tirer les inconnues  $\Delta x_0, \Delta y_0, \Delta z_0, m_0, n_0, p_0$  seront du premier degré, et les termes indépendants des inconnues (qui sont les seuls dans lesquels entrent  $\tau, F, F_1, F_2, \dots$ ) auront la forme (2) : donc enfin ces inconnues auront aussi des valeurs de la forme (2), car pour calculer chacune d'elles il faudrait multiplier les termes indépendants par divers coefficients des inconnues, et faire des sommes de produits pareils.

62. *Expression en fonction des forces et du coefficient  $\tau$ , des six quantités  $\Delta x_0, \Delta y_0, \Delta z_0, m_0, n_0, p_0$ , qui déterminent le mouvement d'une section quelconque.* — En reprenant les formules des nos 42 et suivants, et remplaçant  $N, P, V, X$ , ainsi que  $\Delta x_0, \Delta y_0, \Delta z_0, m_0, n_0, p_0$ , par leurs valeurs qui sont de l'une des

formes (1) ou (2), on trouve encore des valeurs qui ont la forme (2). Donc on peut énoncer ce théorème, dont la vérité exige toujours la restriction du n° 60 :

*Les six quantités  $\Delta x_1, \Delta y_1, \Delta z_1, m_1, n_1, p_1$ , qui caractérisent la déformation en un point quelconque de la fibre moyenne, sont des fonctions linéaires, sans terme indépendant, des forces extérieures et du coefficient de dilatation  $\tau$  provenant de causes étrangères à ces forces.*

Ou bien encore, on peut remarquer que, si dans une fonction de la forme (2), on suppose successivement que chacune des quantités  $F, F_1, F_2, \dots, \tau$  subsiste seule, les autres s'annulant toutes, on reproduira, l'un après l'autre, tous les termes de la fonction. Donc le théorème précédent peut encore s'énoncer en disant :

*Les six éléments de la déformation en un point quelconque de la fibre moyenne s'obtiennent en faisant, pour chacun d'eux, la somme des valeurs qu'il prendrait, si l'on faisait agir successivement, d'abord les diverses forces extérieures, puis la dilatation provenant de causes étrangères à ces forces.*

Ainsi l'effet spécial dû à chaque force n'est pas altéré par la présence des autres : les déformations se superposent pour donner l'effet total. Cette conséquence n'aurait pas pu être établie, si les déformations n'avaient pas été supposées très-petites, et si l'on avait eu pour déterminer les six constantes des conditions d'une autre espèce que celle admise plus haut ; elle serait également infirmée, si le coefficient de dilatation  $\tau$  n'était pas indépendant des charges, aussi bien que les angles  $\alpha, \beta, \gamma$ , etc. ; par exemple, si la chaleur ne dilatait pas également une barre tendue et une barre comprimée, ce que, à notre connaissance, les physiciens n'ont pas vérifié.

**63. Expression des forces inconnues en fonction des forces données. Conséquence relative aux éléments de la déformation.** — Distinguons les forces extérieures qui agissent sur chacune des pièces composant le système considéré, en deux groupes : le premier comprendra celles qui sont des données immédiates ; le second, celles qui sont inconnues à priori et



que l'on doit déterminer d'après les conditions du problème, suivant les procédés qui ont été indiqués dans le § II. Comme on l'a vu, les équations que l'on doit poser à cet effet sont de deux espèces différentes. La première espèce d'équations est fournie par la statique des systèmes invariables : on égale à zéro soit la somme des moments des forces par rapport à un axe, soit la somme de leurs projections sur une droite déterminée. Il est clair que par ce moyen on obtient toujours des équations dans lesquelles toutes les forces, données ou non, entrent au premier degré, sans terme indépendant. Les équations de la seconde espèce sont celles que l'on trouve en exprimant que tout point qui glisse sur une courbe fixe se meut suivant la tangente à cette courbe, en égalant à zéro les déplacements absolus de certains points immobiles, ou les variations angulaires des encastremements fixes, ou les différences de ces quantités pour certains points, avec les quantités analogues évaluées pour les mêmes points, considérés comme appartenant à une autre pièce (n° 59). De toute manière, si l'on a pris pour inconnues les composantes des forces cherchées suivant trois directions rectangulaires et leurs moments par rapport à trois axes déterminés, si  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , etc., sont en outre indépendants des forces (n° 60), on pose toujours (n° 62) une série d'équations dans lesquelles toutes les forces et le coefficient  $\tau$  entrent au premier degré, et où il n'y a pas de terme indépendant de ces quantités.

Toutes les équations qui serviront à déterminer les forces inconnues seront donc des équations du premier degré, dans lesquelles le terme indépendant des inconnues sera une fonction linéaire, sans terme constant, des forces données et du coefficient de dilatation. Donc d'après ce que nous avons déjà dit (n° 61) sur les valeurs des inconnues dans un système d'équations du premier degré, on arrive à cette conclusion:

1°. *Les composantes des forces inconnues suivant trois directions rectangulaires et leurs moments par rapport à trois axes déterminés sont des fonctions linéaires des forces données et du coefficient de dilatation  $\tau$ , sans terme constant;*

2°. *Les mêmes composantes et moments peuvent se déterminer en faisant la somme des valeurs qu'on obtiendrait, si*

*l'on conservait une seule des causes qui les produisent, toutes les autres étant supprimées.*

Les causes sont ici les forces données et le coefficient de dilatation.

Nous avons vu au n° 62 que les éléments de la déformation en un point quelconque de la fibre moyenne, c'est-à-dire les six quantités  $\Delta x_1, \Delta y_1, \Delta z_1, m_1, n_1, p_1$  sont des fonctions linéaires des forces extérieures et du coefficient de dilatation  $\tau$ , sans terme constant. Si l'on imagine que dans leurs expressions on remplace les forces extérieures inconnues par leurs valeurs en fonction des forces données, d'après le théorème précédent il est clair que l'on aura toujours une somme de termes consistant dans le produit d'un coefficient par l'une des forces données ou par  $\tau$ . Donc le théorème du n° 62 et la conséquence que nous en avons tirée peuvent être modifiés en ce sens qu'au lieu de toutes les forces extérieures, on est en droit d'y faire entrer seulement les forces extérieures données : seulement, quand on fera le calcul pour l'une des forces séparées ou pour la dilatation, on devra tenir compte des forces extérieures qui s'exerceraient dans les liaisons de chaque pièce, sous la seule action de cette force ou dilatation.

64. *Autre énoncé des propriétés établies au n° 63.* — Les théorèmes que nous venons d'établir s'énoncent encore d'une autre manière. Puisque la variation de l'abscisse  $\Delta x_1$  est la somme des variations que  $x_1$  éprouverait si chaque force connue et la dilatation  $\tau$  agissaient successivement à l'exclusion de toutes les autres causes, et puisque l'axe des  $x$  est arbitraire, on peut immédiatement conclure l'énoncé suivant :

*Quand les angles qui entrent dans les formules générales de la déformation (nos 42 et suivants) sont indépendants des forces (n° 60), le déplacement de l'un des points, par suite de la déformation, est la résultante (c'est-à-dire la ligne qui ferme le contour polygonal) des déplacements qui se produiraient, si l'on faisait agir isolément, et l'une après l'autre, toutes les forces extérieures connues et la cause des dilata-tions linéaires indépendantes des charges.*

Le même théorème s'étend aux réactions inconnues. La ré-

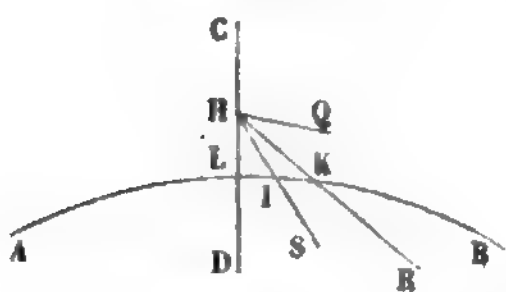
sultante des réactions partielles, en un point déterminé, qui se produiraient dans le cas de l'action successive et isolée des causes de déformation précédemment considérées, aurait en effet avec la réaction cherchée six choses communes : même projection sur trois axes et mêmes moments par rapport à ces axes. Il y aurait donc identité entre ces deux forces.

65. *Forces équivalentes.* — On appelle *systèmes de forces équivalentes* ceux qui ont une même résultante de translation et un même moment résultant pour un point quelconque : l'un des deux systèmes appliqué à un corps invariable en équilibre peut être remplacé par l'autre, sans que l'équilibre soit troublé. Mais ce qui peut changer beaucoup en pareil cas, ce sont les pressions et tensions des diverses parties du corps, et ses déformations, s'il n'est pas rigoureusement invariable. Par exemple, un système de deux forces égales et contraires appliquées aux deux extrémités d'une droite, ne troublera pas l'équilibre, mais il est visible qu'il modifiera les actions intérieures, et produira une variation de longueur.

On devra donc procéder avec circonspection, dans tous les problèmes relatifs à la déformation et à la résistance des matériaux, toutes les fois qu'il s'agira de remplacer une résultante par ses composantes, ou inversement, ou plus généralement toutes les fois qu'on voudra substituer un groupe de forces à un autre groupe équivalent. La condition pour que deux groupes de forces soient réellement équivalents, au point de vue qui nous occupe, c'est que les valeurs fournies par les deux groupes pour les quatre quantités  $N$ ,  $P$ ,  $V$ ,  $X$ , soient constamment les mêmes dans toutes les sections; car on a vu par toutes les formules établies jusqu'à présent, que les deux groupes entraîneraient alors les mêmes déformations et les mêmes tensions intérieures. Ainsi l'on pourra, par exemple, remplacer une résultante par ses composantes; mais il faudra que les points d'application des unes et des autres restent dans la même section : c'est là une condition indispensable. En effet, supposons une force  $R$  appliquée au point  $H$  de la section normale  $CD$  (*fig. 31*); nous pouvons parfaitement sans changer  $N$ ,  $P$ ,  $V$  et  $X$  en aucun point de l'arc, remplacer  $R$  par

deux composantes  $S$ ,  $Q$  concourantes en  $H$ . Mais nous n'avons

Fig. 31.



pas la liberté de transporter  $R$ ,  $S$  ou  $Q$  en une autre section que  $CD$ . En effet, si l'on doit considérer les forces qui agissent depuis une certaine section jusqu'à l'extrémité  $B$ , il faut cesser de compter  $R$  ou ses

deux composantes dès l'instant qu'on a dépassé la section  $CD$ . Or c'est ce qui n'aurait pas lieu si l'on appliquait  $R$  en  $K$  ou bien  $S$  en  $I$ , par exemple. Il est clair que de cette manière on introduirait dans les expressions de  $N$ ,  $P$ ,  $V$ ,  $X$ , entre  $L$  et  $K$  ou entre  $L$  et  $I$ , une force qui ne devrait pas y figurer.

**66. Propriété des arcs symétriques, mais non symétriquement chargés.** — Lorsqu'un système de pièces est symétrique par rapport à un plan, sans que les forces extérieures soient distribuées symétriquement, et qu'on suppose vérifiée la restriction du n° 60 relative aux angles  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , etc., il existe entre les circonstances de la déformation pour les points symétriques, une relation dont on pourra quelquefois tirer parti.

Prenons pour axe des  $x$  une perpendiculaire au plan de symétrie, et supposons les axes des  $y$  et des  $z$  situés dans ce plan; soient  $x, y, z, x', y', z'$  les coordonnées de deux points symétriques;  $\Delta x, \Delta y, \Delta z, m, n, p, \Delta x', \Delta y', \Delta z', m', n', p'$  les six quantités qui caractérisent la déformation en chacun de ces points. Imaginons qu'on rende symétrique le système des forces données ( $F$ ) en doublant par des forces symétriques celles qui en seraient dépourvues; alors on aura pour le point  $(x, y, z)$  les six éléments de la déformation  $\Delta x_1, \Delta y_1, \Delta z_1, m_1, n_1, p_1$ , et pour le point symétrique on aura  $-\Delta x_1, \Delta y_1, \Delta z_1, m_1, -n_1, -p_1$ . De même si, au lieu de doubler toute force non symétrique, on la supprime complètement, on aura pour le point  $(x, y, z)$  les éléments de la déformation  $\Delta x_2, \Delta y_2, \Delta z_2, m_2, n_2, p_2$ . En désignant par ( $F_1$ ) et ( $F_2$ ) les systèmes de forces symétriques auxquels répondent  $\Delta x_1$  et  $\Delta x_2$ , on voit qu'en passant de ( $F_2$ ) à ( $F$ ), il y a, dans les éléments de la déformation pour le point  $(x, y, z)$ , des variations représentées par

$$(3) \quad \Delta x - \Delta x_2, \quad \Delta y - \Delta y_2, \quad \Delta z - \Delta z_2, \quad m - m_2, \quad n - n_2, \quad p - p_2;$$

et ces variations seraient les éléments de déformation qui se produiraient au point dont il s'agit par la seule action des forces du système (F) dépourvues de symétriques (n° 62 et 63), car ce sont ces forces qu'il a fallu ajouter pour passer de (F<sub>2</sub>) à (F).

De même on reconnaît que, dans le passage de (F) à (F<sub>1</sub>), il y a dans les éléments de la déformation pour le point (x', y', z') des changements représentés par

$$(4) \quad \begin{cases} -\Delta x_1 - \Delta x', & \Delta y_1 - \Delta y', & \Delta z_1 - \Delta z', \\ m_1 - m', & -n_1 - n', & -p_1 - p'; \end{cases}$$

et ces quantités seraient les éléments de déformation dus à la seule action des forces par lesquelles diffèrent les systèmes (F) et (F<sub>1</sub>), lesquelles sont symétriques de celles qui constituent la différence de (F) et (F<sub>2</sub>).

Cette dernière remarque montre que les quantités (3) doivent être symétriques des quantités (4), et, par suite, on aura

$$\Delta x - \Delta x_2 = \Delta x_1 + \Delta x',$$

$$\Delta y - \Delta y_2 = \Delta y_1 - \Delta y',$$

$$\Delta z - \Delta z_2 = \Delta z_1 - \Delta z',$$

$$m - m_2 = m_1 - m',$$

$$n - n_2 = n_1 + n',$$

$$p - p_2 = p_1 + p';$$

relation très-simple dont on pourra souvent tirer parti, car la condition de symétrie dans les forces est de nature à faciliter les calculs, en sorte qu'on aurait plus commodément  $\Delta x_1$  et  $\Delta x_2$ , par exemple, que  $\Delta x$  et  $\Delta x'$ .

Nous aurons encore la même chose à dire au sujet des forces inconnues, et la démonstration serait absolument identique. Les axes des coordonnées (x, y, z) étant toujours définis comme nous venons de le faire, appelons R, S, T les trois composantes parallèlement à ces axes du système de forces inconnues qui provient d'une des liaisons; soient aussi K, L, M, la somme des moments de ce système par rapport aux mêmes axes; R', S', T', K', L', M' les quantités analogues pour le point symé-



trique;  $R_1, S_1, T_1, K_1, L_1, M_1, R_2, S_2, T_2, K_2, L_2, M_2$  ce que deviennent  $R, S, T, K, L, M$  quand on remplace le système des forces données  $(F)$  successivement par  $(F_1)$  et par  $(F_2)$ . On aura

$$R - R_2 = R_1 + R',$$

$$S - S_2 = S_1 - S',$$

$$T - T_2 = T_1 - T',$$

$$K - K_2 = K_1 - K',$$

$$L - L_2 = L_1 + L',$$

$$M - M_2 = M_1 + M'.$$

En résumé, lorsqu'un système de pièces est symétrique par rapport à un plan, mais non symétriquement chargé, si on le ramène à la symétrie de deux manières: 1° en ajoutant pour chaque force extérieure privée de sa symétrique une force égale en intensité et située symétriquement; 2° en supprimant les forces dont les symétriques manqueraient; que dans ces deux hypothèses on détermine l'un des six éléments de la déformation en un point de la fibre moyenne; la somme des deux quantités ainsi déterminées sera égale à la somme ou à la différence des quantités analogues, calculées pour le point considéré et pour son symétrique. La même propriété est vraie pour les composantes d'une réaction inconnue, parallèlement aux trois axes coordonnés, et pour ses moments par rapport aux mêmes axes. On doit, dans l'application de ce théorème, prendre deux des axes coordonnés dans le plan de symétrie et le troisième perpendiculaire à ce plan. On doit de plus prendre la différence des quantités analogues pour deux points symétriques, lorsque la symétrie leur donne des directions opposées. C'est ce qui arrive, par exemple, pour les déplacements ou forces en projection sur la perpendiculaire au plan de symétrie; c'est ce qui arrive aussi pour les rotations et moments autour de lignes contenues dans ce plan.

67. *Application du théorème général démontré au n° 66.* — Nous allons montrer, par un exemple très-simple, l'usage qu'on peut faire du théorème qui vient d'être démontré. Supposons une pièce symétrique par rapport à une verticale  $c$

reposant sur deux appuis de niveau : cette pièce étant chargée de forces d'une manière quelconque, on demande de déterminer les poussées horizontales qu'elle exerce contre ses deux appuis. Soient  $F$  l'une des forces données qui agissent sur la pièce, et  $\zeta$  son angle avec l'horizon ;  $Q$ ,  $Q'$  les poussées demandées estimées suivant les  $x$  positifs avec un signe convenable ;  $Q_1$  et  $-Q_1$  ce que deviendraient ces forces, en complétant la symétrie du système proposé par l'addition de nouvelles forces comme il est dit au n° 66 ;  $Q_2$ ,  $-Q_2$  les valeurs qu'elles prendraient en supprimant les forces ajoutées et leurs symétriques en même temps. On aura (n° 66)

$$Q_1 + Q_2 = Q - Q'.$$

De plus, en vertu de l'équilibre des forces extérieures, il faut que l'on ait

$$Q + Q' + \Sigma F \cos \zeta = 0.$$

Si l'on savait calculer la poussée dans le cas de forces symétriques, on pourrait avoir celle qui correspond au cas où la symétrie n'existe plus, au moyen de deux équations du premier degré extrêmement simples.

Lorsque  $\Sigma F \cos \zeta$  est égal à zéro, comme par exemple lorsque l'arc ne supporte que des poids, ou des forces symétriques en intensité et en direction, sans l'être nécessairement en position, on a

$$Q + Q' = 0;$$

les deux poussées sont égales et de sens contraire, et la première relation devient

$$2Q = Q_1 + Q_2,$$

c'est-à-dire que la poussée est la moyenne arithmétique entre les poussées  $Q_1$  et  $Q_2$ .

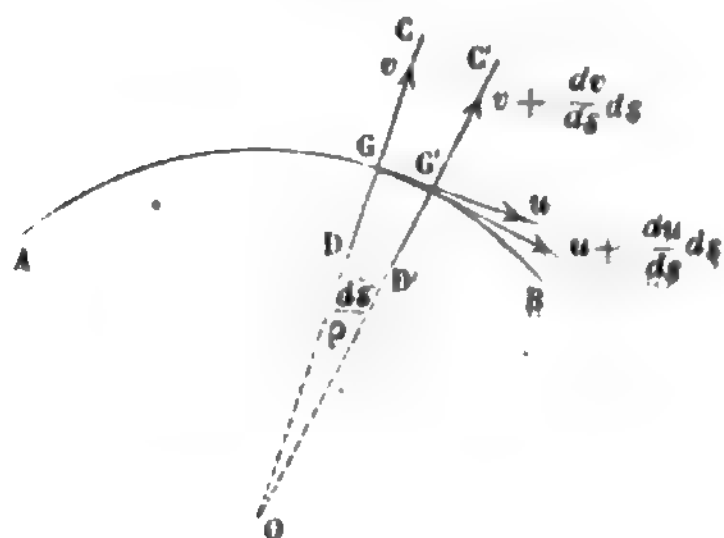
## § VI. — Des mouvements vibratoires dans les pièces élastiques.

68. *Principes généraux servant à la mise en équation des mouvements vibratoires.* — Les formules données au § I de ce chapitre, qui font connaître les diverses circonstances de la déformation d'une pièce élastique, ont été établies en exprimant qu'il se produisait, entre deux sections consécutives de la pièce, un déplacement relatif développant des actions moléculaires capables de faire équilibre à un certain système de forces extérieures. Lorsque la pièce vibre, naturellement cet équilibre n'existe plus; mais, en vertu du principe de d'Alembert, on sait que les équations qui sont la conséquence de l'équilibre d'un système matériel doivent être encore satisfaites dans l'état de mouvement, pourvu qu'aux forces réelles on joigne les forces d'inertie des diverses molécules. Pour avoir les équations du mouvement vibratoire, tout se réduirait donc à introduire dans les formules du § I lesdites forces d'inertie, qu'on devrait y faire figurer en évaluant les quatre fonctions des forces désignées par  $N$ ,  $P$ ,  $V$ ,  $X$ . Ces forces d'inertie seraient d'ailleurs exprimées au moyen des déplacements des divers points considérés comme fonctions du temps.

Un autre procédé, qu'il sera ordinairement plus commode d'employer, consisterait à faire l'application du principe de d'Alembert, non plus à la portion de pièce comprise entre une section normale et l'extrémité, mais à l'élément prismatique infiniment petit compris entre deux sections normales infiniment voisines. Nous allons faire usage de cette méthode pour mettre en équation le mouvement vibratoire d'une pièce homogène à fibre moyenne plane, à section constante et symétrique par rapport au plan de la fibre moyenne. Les forces extérieures agissant sur la pièce entre deux sections normales quelconques, sont réductibles à des forces contenues dans ce plan, parallèlement auquel sont dirigées les vitesses des mouvements que les sections possèdent à l'instant pris pour origine du temps. D'après ces conditions, il est clair qu'on se trouvera dans le cas de la déformation plane, c'est-à-dire qu'à une époque quelconque du mouvement tous les points auront des vitesses parallèles au plan de la fibre moyenne.

Cela posé, soient  $AB$  la pièce donnée (*fig. 32*) ;  $CD, C'D'$ , deux sections normales infiniment voisines, dont  $G$  et  $G'$  sont les centres d'élasticité et de gravité. Appelons :

Fig. 32.



$\omega$  l'aire constante de la section transversale ;  
 $r$  le rayon de gyration de cette surface relativement à l'axe autour duquel s'opère la flexion ;  
 $s$  la longueur, comptée dans l'état primitif de la pièce, entre le point  $G$  et un autre point  $A$  de la fibre

moyenne, pris pour origine ;

$\rho$  le rayon de courbure primitif de la fibre moyenne en  $G$  ;

$u, v$ , les déplacements du point  $G$  à un instant quelconque, parallèlement à la direction  $Gu$  de la tangente et à la direction  $GC$  de la normale ;

$\theta$  la variation de l'angle que fait  $GC$  avec une ligne fixe, cette rotation  $\theta$  étant comptée positivement dans le sens des aiguilles d'une montre, pour fixer les idées ;

$R, T$  les sommes algébriques des projections des forces directement appliquées à l'élément  $CDC'D'$ , les projections étant respectivement faites sur les lignes  $Gu$  et  $GC$ , et les forces étant divisées par la masse de l'élément en question ;

$M$  la somme des moments desdites forces rapportées à l'unité de masse, relativement au centre de gravité de  $CDC'D'$ , le sens positif étant le même que pour  $\theta$  ;

$\pi$  le poids par mètre cube de la matière qui constitue la pièce ;

$g$  l'accélération des corps pesants dans le vide ;

$E$  le coefficient d'élasticité longitudinale ;

$kE$  le coefficient d'élasticité transversale.

La forme de la fibre moyenne dans son état primitif étant connue, il suffit de donner  $s$  pour définir la position primitive d'une section. A l'instant pris pour origine du temps, cette

section ayant reçu des déplacements et des vitesses que l'on connaît, et les choses étant de même pour les autres sections, il s'agit de déterminer le mouvement de la pièce. Il est clair qu'on y parviendra si l'on peut exprimer en fonction de  $s$  et du temps  $t$  les trois quantités  $u$ ,  $v$ ,  $\theta$ . C'est ce que nous ferons à l'aide du principe de d'Alembert; mais auparavant il faut chercher comment on exprime les forces d'inertie de la masse comprise dans l'élément  $CDC'D'$ , ainsi que les actions moléculaires exercées sur cette masse par la matière voisine, au moyen des déplacements  $u$ ,  $v$ ,  $\theta$  ou de leurs dérivées en  $s$  et  $t$ .

La masse totale du prisme  $CDC'D'$  est  $\frac{\pi}{g} \Omega ds$ ; l'accélération de son centre de gravité a pour composantes  $\frac{d^2 u}{dt^2}$  et  $\frac{d^2 v}{dt^2}$ ; la résultante de translation des forces d'inertie de cette masse aura donc pour composantes, parallèlement à  $u$  et à  $v$ , les forces  $-\frac{\pi}{g} \Omega ds \frac{d^2 u}{dt^2}$ ,  $-\frac{\pi}{g} \Omega ds \frac{d^2 v}{dt^2}$ . D'un autre côté,  $CDC'D'$  tourne autour de son centre de gravité avec une vitesse angulaire  $\frac{d\theta}{dt}$  et une accélération angulaire  $\frac{d^2 \theta}{dt^2}$ , d'où résulte un couple d'inertie ayant pour intensité le produit du moment d'inertie par  $-\frac{d^2 \theta}{dt^2}$ , c'est-à-dire  $-\frac{\pi}{g} \Omega ds \cdot r^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2}$ .

Quant à l'évaluation des actions moléculaires exercées dans  $CD$ , par exemple, on observera qu'elles dépendent uniquement du mouvement relatif des deux sections  $CD$ ,  $C'D'$ . Le mouvement absolu de  $CD$  consiste en une translation  $(u, v)$  et une rotation  $\theta$  autour de  $G$  qu'on peut remplacer par une rotation égale autour de  $G'$ , jointe à une translation  $-\theta \cdot \overline{GG'}$  ou  $-\theta ds$ , parallèle et de sens contraire avec  $Gv$ ; pour avoir le mouvement relatif, on prendra ces mouvements  $u$ ,  $v$ ,  $-\theta ds$  et  $\theta$  en sens contraire, et on les composera avec le mouvement de  $C'D'$ , lequel consiste en une translation

$$\left( u + \frac{du}{ds} ds, v + \frac{dv}{ds} ds \right)$$



et une rotation  $\theta + \frac{d\theta}{ds} ds$ . Il est clair d'abord que la rotation relative ou flexion sera exprimée par  $\frac{d\theta}{ds} ds$ ; reste à exprimer la translation relative, ou plutôt ses composantes parallèlement à  $u$  et  $v$ , qui constituent respectivement l'extension et le glissement simples, entre les sections dont il s'agit. En projetant d'abord sur  $Gu$ , la translation  $-u$  se projette en vraie grandeur, et il en est de même de  $u + \frac{du}{ds} ds$ , aux infiniment petits du second ordre près;  $v + \frac{dv}{ds} ds$  faisant avec  $Gu$  un angle complémentaire de l'angle  $GOG'$  des deux sections ou de  $\frac{ds}{\rho}$  donne  $\frac{vds}{\rho}$  en projection, sauf une erreur infiniment petite du second ordre; enfin  $v$  et  $\theta ds$  sont perpendiculaires à l'axe de projection. Donc enfin la composante parallèle à  $Gu$  de la translation cherchée est  $\frac{du}{ds} ds + \frac{vds}{\rho}$ . On reconnaît de même que la composante suivant  $Gv$  a pour expression

$$\frac{dv}{ds} ds + \theta ds - \frac{uds}{\rho}.$$

Dans le calcul de la translation relative, nous avons négligé les variations de l'angle  $GOG'$  pendant le mouvement; eu égard à la petitesse des déformations, cela ne peut entraîner qu'une petite erreur. Il y a encore une erreur du même ordre quand on considère  $\left(\frac{du}{ds} + \frac{v}{\rho}\right) ds$  et  $\left(\frac{dv}{ds} + \theta - \frac{u}{\rho}\right) ds$  comme les valeurs de l'extension et du glissement simples; on devrait en effet projeter le mouvement, non sur la position primitive de la tangente ou de la normale, mais sur ces lignes prises dans la position qu'elles occupent à l'instant considéré.

A l'extension simple  $ds \left(\frac{du}{ds} + \frac{v}{\rho}\right)$  répond dans la section  $CD$  de l'élément.  $CDC'D'$ , suivant le sens opposé à  $Gu$ , la force  $E\Omega \left(\frac{du}{ds} + \frac{v}{\rho}\right)$ ; de même au glissement répondra la force

$k E \Omega \left( \frac{dv}{ds} + \theta - \frac{u}{\rho} \right)$ , dans le sens opposé à  $Gv$ ; enfin la flexion  $\frac{d\theta}{ds} ds$  donnera lieu au couple  $E \Omega r^2 \frac{d\theta}{ds}$ , estimé en sens contraire des rotations  $\theta$ . Dans la section  $C'D'$  il y aura des actions moléculaires analogues, qui seront égales aux précédentes augmentées de leur différentielle par rapport à  $s$ , et agiront dans le sens des déplacements. On composera entre elles toutes ces forces moléculaires exercées dans  $CD$  et  $C'D'$ , comme nous avons composé tout à l'heure les mouvements de ces deux sections, et l'on trouvera l'action résultante supportée par la matière de  $CDC'D'$ , savoir :

Force parallèle à  $Gu$  :

$$E \Omega ds \left[ \frac{d}{ds} \left( \frac{du}{ds} + \frac{v}{\rho} \right) + \frac{k}{\rho} \left( \frac{dv}{ds} + \theta - \frac{u}{\rho} \right) \right];$$

Force parallèle à  $Gv$  :

$$E \Omega ds \left[ k \frac{d}{ds} \left( \frac{dv}{ds} + \theta - \frac{u}{\rho} \right) - \frac{1}{\rho} \left( \frac{du}{ds} + \frac{v}{\rho} \right) \right];$$

Moment total par rapport au centre de gravité de l'élément, évalué dans le sens de la rotation  $\theta$  :

$$E \Omega ds \left[ r^2 \frac{d^2 \theta}{ds^2} - k \left( \frac{dv}{ds} + \theta - \frac{u}{\rho} \right) \right].$$

Par suite on trouvera pour les équations du mouvement de l'élément prismatique considéré :

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 u}{dt^2} = R + \frac{Eg}{\Omega} \left[ \frac{d}{ds} \left( \frac{du}{ds} + \frac{v}{\rho} \right) + \frac{k}{\rho} \left( \frac{dv}{ds} + \theta - \frac{u}{\rho} \right) \right]; \\ \frac{d^2 v}{dt^2} = T + \frac{Eg}{\Omega} \left[ k \frac{d}{ds} \left( \frac{dv}{ds} + \theta - \frac{u}{\rho} \right) - \frac{1}{\rho} \left( \frac{du}{ds} + \frac{v}{\rho} \right) \right]; \\ r^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} = M + \frac{Eg}{\Omega} \left[ r^2 \frac{d^2 \theta}{ds^2} - k \left( \frac{dv}{ds} + \theta - \frac{u}{\rho} \right) \right]. \end{array} \right.$$

Quand on néglige le glissement transversal, il faut, dans les

équations ci-dessus, considérer la quantité  $k E \Omega \left( \frac{dv}{ds} + \theta - \frac{u}{\rho} \right)$  comme l'expression de la force totale de glissement  $P$  dans la section  $CD$ , force qui peut ne pas être nulle, bien qu'on néglige ses effets. Les équations du mouvement deviennent, alors

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{d^2 u}{dt^2} = R + \frac{P g}{\Omega \rho} + \frac{E g}{\Omega} \frac{d}{ds} \left( \frac{du}{ds} + \frac{v}{\rho} \right), \\ \frac{d^2 v}{dt^2} = T + \frac{g}{\Omega} \frac{dP}{ds} - \frac{E g}{\Omega \rho} \left( \frac{du}{ds} + \frac{v}{\rho} \right), \\ r^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} = M + r^2 \frac{E g}{\Omega} \frac{d^2 \theta}{ds^2} - \frac{P g}{\Omega \rho}; \end{cases}$$

et il faudrait y joindre la relation

$$(3) \quad \frac{dv}{ds} + \theta - \frac{u}{\rho} = 0,$$

ce qui ferait quatre équations entre les inconnues  $u, v, \theta, P$ .

Ces équations aux différences partielles simultanées détermineront les inconnues, en fonction de  $s$  et de  $t$ , lorsque l'intégration pourra être effectuée et que l'on aura déterminé les fonctions arbitraires introduites par cette opération.

Quand on voudra faire usage des équations (1) et (2), il faudra bien se rappeler que les quantités  $R, T, M$  représentent des forces et un couple directement appliqués à la pièce que l'on considère. Si ces forces ou ce couple provenaient de l'action de masses liées à la pièce et entraînées dans son mouvement, on devrait, bien entendu, tenir compte, en les évaluant, de l'inertie de ces masses. Par exemple, si un poids  $p$  appliqué en un point  $K$  de la pièce, prend par suite de sa liaison avec elle des accélérations  $j$  suivant l'horizontale et  $j'$  suivant la verticale, au lieu de la force  $p$ , il faudra supposer appliquées en  $K$  les forces  $-\frac{pj}{g}$  et  $p \left( 1 - \frac{j'}{g} \right)$ , dirigées en sens contraire de  $j$  et  $j'$ .

Pour le moment, nous ne pousserons pas plus loin l'étude de la question; dans les cas pratiques les plus simples, la so-

lution présentera généralement de grandes difficultés, comme on le verra ultérieurement par les exemples que nous indiquerons. Nous n'avons voulu, en donnant les calculs précédents, que compléter la théorie générale de la déformation des pièces élastiques, par l'exposé de la méthode à suivre pour mettre en équation le problème des mouvements vibratoires.

Ici se termine la partie purement théorique du Cours. Nous allons maintenant faire une série d'applications à des cas pratiques choisis parmi ceux qui intéressent plus spécialement les ingénieurs.

---

## CHAPITRE TROISIÈME.

### PROBLÈMES DIVERS CONCERNANT LES POUTRES DROITES.

#### § I. — Poutres droites, à section constante, reposant sur deux appuis et chargées transversalement.

69. *Conditions générales à remplir par les poutres considérées dans ce paragraphe.* — Une poutre droite appuyée à ses deux extrémités doit porter des charges toutes perpendiculaires à sa fibre moyenne. Si l'on admet, pour fixer les idées, que la poutre est horizontale, ces charges (abstraction faite des forces provenant des appuis) consisteront, par exemple, en un poids uniformément réparti sur la longueur de la poutre et comprenant le poids propre de celle-ci, ou bien en un poids unique concentré en un certain point. Lorsque le poids de la pièce n'est pas négligeable devant ce poids unique, on se trouve dans un cas mixte où il y a tout à la fois une charge uniformément répartie et une charge isolée. On suppose remplie la condition pour que la déformation ait lieu dans le plan qui contient toutes les forces extérieures (n° 45); enfin on suppose constante la section de la poutre.

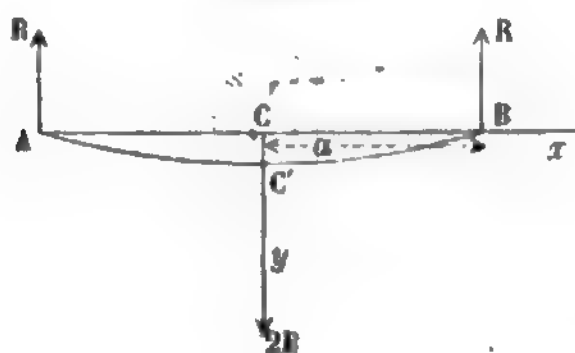
Cela posé, on peut avoir besoin de calculer les réactions des appuis, la déformation produite par les charges, les valeurs du moment fléchissant et de la force de glissement dans une section quelconque. Ce sont là les problèmes que nous allons passer en revue, en faisant diverses hypothèses particulières sur la nature des appuis. Nous reviendrons plus loin, avec quelques détails, sur la vérification de la stabilité dont il a déjà été sommairement question au n° 19, et sur le calcul des dimensions d'une poutre à construire.

70. *Poutre reposant sur deux appuis simples.* — On admet que le support placé en A (fig. 33) est tellement disposé, qu'il



ne peut fournir qu'une réaction verticale passant par le point A;

Fig. 33



le support B est également assujéti à une condition analogue.

Dans ce cas la Statique élémentaire fait immédiatement connaître les réactions exercées sur la pièce en A et B.

Si, par exemple, on suspend un poids  $2R$  au milieu de la pièce, ces réactions consisteront en une force égale à  $R$  pour chaque appui. Elles seront de même exprimées par  $pa$ , dans le cas d'une répartition uniforme de la charge, en appelant  $a$  la demi-longueur de la poutre et  $p$  le poids par mètre courant qu'elle supporte, y compris son poids propre.

Déterminons maintenant la figure de la fibre moyenne, après la déformation produite par les charges. A cet effet il faut prendre la formule (9) du n° 47. En supprimant les indices, supposant d'ailleurs le cas de la charge unique  $2R$ , et prenant les axes de coordonnées indiqués sur la fig. 33, cette formule devient ici

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{R(a-x)}{er^2}.$$

Le moment de flexibilité  $er^2$  étant constant, il est facile d'effectuer l'intégration, et l'on trouve

$$\frac{dy}{dx} = \frac{R}{er^2} \left( -ax + \frac{x^2}{2} \right),$$

sans constante dans le second membre, attendu que pour  $x = 0$ ,  $\frac{dy}{dx}$  est nul à cause de la symétrie. Intégrant une seconde fois et remarquant que  $y$  doit s'annuler pour  $x = a$ , on aura

$$y = \frac{R}{er^2} \left( -\frac{ax^2}{2} + \frac{x^3}{6} \right) + \frac{R a^3}{3er^2} = \frac{R}{6er^2} (a-x)(2a^2 + 2ax - x^2),$$

équation qui est celle de la courbe AC'B. La flèche  $\overline{CC'} = f$  s'obtient en faisant  $x = 0$ , ce qui donne

$$f = \frac{R a^2}{3er^2}.$$

Quand la charge est uniformément répartie, on a, d'après la même formule (9) du n° 47 :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2} \frac{p}{er^2} (a-x)^2 - \frac{pa}{er^2} (a-x) = -\frac{1}{2} \frac{p}{er^2} (a^2 - x^2);$$

d'où l'on tirera de même

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{2} \frac{p}{er^2} \left( \frac{x^3}{3} - a^2 x \right), \\ y &= \frac{1}{2} \frac{p}{er^2} \left( \frac{x^4}{12} - \frac{a^2 x^2}{2} \right) + \frac{5}{24} \frac{pa^4}{er^2} \\ &= \frac{p}{24 er^2} (a^2 - x^2) (5a^2 - x^2). \end{aligned}$$

La courbe AC'B s'écarte alors assez peu de la parabole représentée par l'équation

$$y' = \frac{5pa^2}{24 er^2} (a^2 - x^2),$$

car la différence  $y' - y$  a son maximum répondant à  $x^2 = \frac{1}{2} a^2$ , qui donne,

$$y = \frac{pa^4}{24 er^2} \cdot \frac{9}{4}, \quad y' = \frac{pa^4}{24 er^2} \cdot \frac{5}{2},$$

d'où résulte

$$\frac{y' - y}{y} = \frac{1}{9}.$$

La valeur de la flèche devient

$$f = \frac{5}{24} \frac{pa^4}{er^2}.$$

Pour se rendre compte de la pression ou tension longitudinale en un point quelconque de la section répondant à l'abscisse  $x$ , on procédera comme il est dit au n° 19. Ici, le moment fléchissant  $X$  est donné par les équations

$$X = -R(a-x) \quad \text{dans le cas de la charge unique } 2R,$$

$$X = -\frac{1}{2} p (a^2 - x^2) \quad \text{dans le cas de la charge uniformément répartie;}$$

la quantité désignée par  $P/h$  au n° 19 n'est autre chose que la valeur absolue du moment  $X$ ;  $\sin \delta$  est d'ailleurs égal à 1 puisque la flexion est supposée plane (n° 45). Il sera donc facile de calculer la tension demandée. Si l'on veut avoir seulement son maximum, on voit que, d'une section à l'autre, les pressions et tensions ne varient qu'avec  $P/h$ , et que par suite ce maximum a lieu dans la section faite en C, car les deux expressions ci-dessus prennent leur plus grande valeur pour  $x = 0$ .

La tension transversale dans une section déterminée dépend de la force totale de glissement  $P$ , somme algébrique des forces verticales qui agissent depuis cette section jusqu'à une extrémité. Dans le cas actuel, on trouve facilement

$P = R$ , si la charge est concentrée au milieu de la pièce ;

$P = px$ , si la charge est uniformément répartie.

La première expression est constante; la seconde varie uniformément avec  $x$ ; elle est nulle en C et atteint son maximum  $pa$  pour  $x = a$ .

Quand on compare entre eux les effets des poids  $2pa$  et  $2R$ , on voit que pour avoir la même flèche il faudrait assujettir ces poids à la relation  $\frac{5}{8}pa = R$ , c'est-à-dire que : *au point de vue*

*de la flèche produite, un poids uniformément réparti sur la longueur entière de la poutre est l'équivalent des cinq huitièmes de ce poids condensés au milieu.* Si l'on voulait au contraire que la tension ou pression maximum fût la même, il faudrait poser le maximum de  $R(a - x)$  égal au maximum de

$\frac{1}{2}p(a^2 - x^2)$ , c'est-à-dire

$$Ra = \frac{1}{2}pa^2, \quad \text{ou bien} \quad R = \frac{1}{2}pa.$$

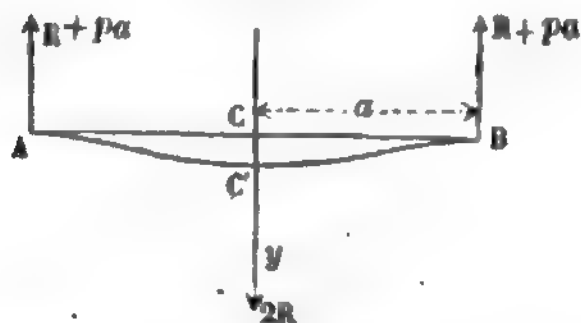
Donc, *au point de vue de la tension ou pression maximum produite suivant la longueur des fibres, le poids uniformément réparti sur la longueur entière de la pièce équivaut à la moitié de ce poids condensée au milieu.*

Dans le cas mixte où l'on aurait à la fois une charge  $2pa$  et

un poids isolé  $2R$ , on trouvera facilement ce qui se passe, en se reportant aux considérations exposées dans le § III du chapitre précédent. Il suffira d'ajouter algébriquement les effets dus à ces deux charges agissant isolément.

71. *Poutre droite encastrée à ses deux extrémités.* — Rien n'est modifié dans les données de la question précédente, si ce n'est que les appuis placés en A et B (fig. 34), au lieu d'être

Fig. 34.



de simples points fixes, sont des encastremements qui maintiennent la pièce horizontale en ces points. On peut imaginer que cet effet se produit au moyen de pressions verticales descendantes exer-

cées sur les prolongements de la pièce au delà des sections faites en A et B, où continueraient à se développer des forces verticales ascendantes. Si donc nous transportons au point B toutes les pressions exercées vers l'extrémité de droite, il faudra joindre un couple à ces forces transportées, et la même chose aura lieu pour l'appui de droite. Ainsi donc les réactions de chaque appui seront remplacées par une force verticale  $Y$  appliquée en A ou B, et par un couple dont nous appellerons  $\mu$  le moment. Pour déterminer  $Y$ , nous remarquerons que si la charge consiste en un poids  $2pa$  uniformément réparti sur la longueur  $2a$  de la pièce et en un poids  $2R$  concentré au milieu, chaque appui doit fournir une réaction verticale égale à  $R + pa$ . La réaction horizontale doit d'ailleurs être nulle, car sans cela la longueur de la pièce aurait dû varier entre A et B; ce qui n'est pas, puisque la différence  $AC'B - ACB$  n'est en quelque sorte qu'un infiniment petit du second ordre (\*). Il reste seulement à chercher la grandeur du couple  $\mu$ .

---

(\*) On a, en appelant  $\alpha$  l'angle de l'un des éléments de la courbe  $AC'B$  avec l'axe AB,  $\frac{dx}{ds} = \cos \alpha$ ; par conséquent, si l'on regarde  $\alpha$  comme un angle infiniment petit, le rapport  $\frac{dx}{ds}$  ne diffère de 1 que d'un infiniment petit du second ordre.

Pour cela nous prendrons encore, comme dans le problème précédent, l'expression de la seconde dérivée  $\frac{d^2 y}{dx^2}$ , en fonction des forces qui agissent depuis le point correspondant jusqu'à l'extrémité de la pièce. Nous aurons ainsi

$$\begin{aligned} er^2 \frac{d^2 y}{dx^2} &= -R(a-x) - pa(a-x) + \frac{1}{2} p(a-x)^2 + \mu, \\ &= -R(a-x) - \frac{1}{2} p(a^2 - x^2) + \mu. \end{aligned}$$

D'où l'on tire, par l'intégration depuis la limite  $x = 0$ ,

$$er^2 \frac{dy}{dx} = -R \left( ax - \frac{x^2}{2} \right) - \frac{1}{2} p \left( a^2 x - \frac{x^3}{3} \right) + \mu x.$$

Or  $\frac{dy}{dx}$  doit s'annuler pour  $x = a$  comme pour  $x = 0$ : donc on a

$$0 = -\frac{1}{2} Ra^2 - \frac{1}{3} pa^3 + \mu a,$$

ou bien

$$\mu = \frac{1}{2} Ra + \frac{1}{3} pa^2.$$

Le couple  $\mu$  étant maintenant déterminé, on peut facilement avoir la courbe affectée par la pièce, ainsi que la tension en un point quelconque. Ainsi l'on substituera  $\mu$  dans l'expression de  $\frac{dy}{dx}$ , et l'on aura

$$\begin{aligned} er^2 \frac{dy}{dx} &= -R \left( ax - \frac{x^2}{2} - \frac{ax}{2} \right) - \frac{1}{2} p \left( a^2 x - \frac{x^3}{3} - \frac{2}{3} a^2 x \right) \\ &= -\frac{1}{2} R(ax - x^2) - \frac{1}{6} p(a^2 x - x^3); \end{aligned}$$

intégrant ensuite et déterminant la constante par la condition que  $y$  soit nul pour  $x = a$ , on trouvera

$$er^2 y = \frac{1}{2} R \left( -\frac{ax^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{a^3}{6} \right) + \frac{1}{6} p \left( -\frac{a^2 x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{a^4}{4} \right),$$

et par conséquent l'expression de la flèche  $\overline{CC'}$ ,

$$f = \frac{a^3}{12 er^2} \left( R + \frac{pa}{2} \right).$$



Ici l'on voit que, pour la production de la flèche, la charge uniforme équivaut à sa moitié que l'on concentrerait au milieu. On voit aussi, en supposant successivement  $p = 0$ ,  $R = 0$ , que l'on a des flèches plus petites que dans le cas précédent, dans les rapports respectifs de 4 et de 5 à 1.

Il faut maintenant étudier comment varie, pour une section quelconque, le moment fléchissant  $X$  et l'effort tranchant  $P$ . Le moment  $X$ , qui a été égalé ci-dessus à  $er^2 \frac{d^2 y}{dx^2}$ , a pour expression, dans la section définie par l'abscisse  $x$ ,

$$X = -R(a - x) - \frac{1}{2} p(a^2 - x^2) + \mu;$$

où, en substituant la valeur de  $\mu$ ,

$$X = -\frac{R}{2}(a - 2x) - \frac{1}{6} p(a^2 - 3x^2).$$

Cette quantité, d'abord négative pour  $x = 0$ , est croissante, c'est-à-dire qu'elle diminue en valeur absolue et devient nulle pour une valeur  $x'$  de  $x$  facile à déterminer. On aurait à résoudre l'équation du second degré

$$\frac{R}{2}(a - 2x') + \frac{1}{6} p(a^2 - 3x'^2) = 0,$$

d'où l'on tirerait une seule racine positive, comprise entre

$\frac{a}{2}$  et  $\frac{a}{\sqrt{3}}$  ou entre  $0,500 a$  et  $0,577 a$ , valeurs qui correspondent

à  $p = 0$  et  $R = 0$ . Pour l'abscisse  $x'$ , le moment  $X$  serait nul ainsi que  $\frac{d^2 y}{dx^2}$ ; par suite la courbe présenterait une inflexion.

Au delà,  $X$  change de signe, mais reste toujours croissant. Ainsi ses plus grandes valeurs absolues, intéressantes à connaître pour calculer les pressions et tensions maximum (n° 19), répondront à  $x = 0$  et  $x = a$  : elles seront

$$\frac{Ra}{2} + \frac{1}{6} pa^2 \quad \text{et} \quad \frac{Ra}{2} + \frac{1}{3} pa^2.$$

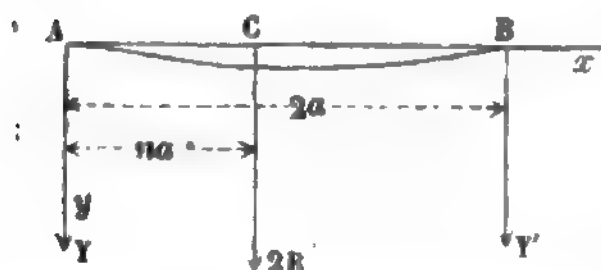
Le premier de ces moments est d'ailleurs négatif, c'est-à-dire

qu'il agit pour faire tourner de  $Cy$  vers  $Cx$ ; le second agit en sens contraire. Donc (n° 19) le premier comprimera les fibres du haut de la section faite en C, et étendra celles du bas; vers les appuis, c'est l'inverse qui aura lieu.

L'effort tranchant P ne donne lieu à aucune remarque particulière; sa détermination serait la même qu'au n° 70, puisque rien n'est changé aux forces extérieures, sauf l'introduction du couple  $\mu$ , qui n'influe pas sur la valeur de P.

72. *Poutre droite encastree à une extrémité et appuyée à l'autre. Recherche de la réaction des appuis.* — Soit AB (fig. 35) la fibre moyenne de la pièce, laquelle est supportée en A et B par deux appuis qui rendent invariable la position de ces points, et dont l'un, l'appui A par exemple,

Fig. 35.



maintient la section faite en A dans sa direction première. Supposons en premier lieu que la pièce n'est soumise qu'à une charge  $2R$ , devant laquelle on néglige son poids propre. Appelons  $2a$  la longueur AB, et  $h$  ou  $na$  l'abscisse

du point C où est appliquée la force  $2R$ . Il s'agit d'abord de déterminer les réactions des appuis, lesquelles consistent en deux forces verticales, Y, Y' appliquées en A et B, et en un couple  $\mu$  à joindre à la force Y pour tenir compte de l'encastrement, comme on l'a vu dans le problème précédent.

On aura les équations suivantes fournies par la statique des corps solides,

$$(1) \quad Y + Y' + 2R = 0,$$

$$(2) \quad 2aY' + 2Rna + \mu = 0.$$

Pour en avoir une troisième, on prendra l'équation (9) du n° 47, qui sera :

Entre A et C,

$$(3) \quad er^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = 2R(na - x) + Y'(2a - x);$$

Entre C et B,

$$(4) \quad er^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = Y'(2a - x).$$

On en conclut par l'intégration, en remarquant que  $\frac{dy}{dx}$  s'annule pour  $x = 0$ :

Entre A et C,

$$(5) \quad er^2 \frac{dy}{dx} = 2R \left( nax - \frac{x^2}{2} \right) + Y' \left( 2ax - \frac{x^2}{2} \right).$$

Entre C et B,

$$(6) \quad er^2 \frac{dy}{dx} = n^2 a^2 R + Y' \left( 2ax - \frac{x^2}{2} \right).$$

Une seconde intégration donne l'équation de la courbe :

Entre A et C,

$$(7) \quad er^2 y = 2R \left( \frac{nax^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + Y' \left( ax^2 - \frac{x^3}{6} \right);$$

Entre C et B,

$$(8) \quad \begin{cases} er^2 y = \frac{2}{3} R n^3 a^3 + n^2 a^2 R (x - na) + Y' \left( ax^2 - \frac{x^3}{6} \right) \\ \quad = n^2 a^2 R \left( x - \frac{1}{3} na \right) + Y' \left( ax^2 - \frac{x^3}{6} \right) \quad (*) \end{cases}$$

Or  $y$  doit s'annuler pour  $x = 2a$ ; donc on a

$$\frac{n^2 a^2 R}{3} (6 - n) + Y' a^3 \left( 4 - \frac{4}{3} \right) = 0;$$

d'où

$$Y' = - \frac{n^2 (6 - n)}{8} R.$$

$Y'$  étant connu, les équations (1) et (2) donnent sans peine  $Y$  et  $\mu$ :

$$Y = - 2R - Y',$$

$$\mu = - \frac{1}{4} n R a (8 - 6n + n^2).$$

(\*) Pour éviter l'introduction de constantes arbitraires, on a effectué toutes les intégrations à partir de la limite  $x = 0$ , pour laquelle  $x$  et  $y$  sont nuls; seulement quand la seconde limite dépasse le point C, il faut avoir égard au changement de forme des dérivées  $\frac{d^2 y}{dx^2}$ ,  $\frac{dy}{dx}$ . Par exemple, on a toujours

$$y = \int_0^x \frac{dy}{dx} dx;$$

mais en effectuant l'intégration, quand la limite  $x$  est plus grande que  $na$ , il faut écrire :

$$er^2 y = \int_0^{na} 2R \left( nax - \frac{x^2}{2} \right) dx + \int_{na}^x n^2 a^2 R dx + \int_0^x Y' \left( 2ax - \frac{x^2}{2} \right) dx.$$

Les réactions des appuis sont donc maintenant connues, dans le cas particulier où il n'y a sur la pièce qu'une charge isolée.

Lorsqu'il y a seulement une charge uniformément répartie  $2pa$ , on pourrait trouver ces réactions par un procédé tout à fait semblable, et même le calcul serait plus facile, car les expressions de  $\frac{d^2y}{dx^2}$  et de  $\frac{dy}{dx}$  conserveraient la même forme pour toute l'étendue de la pièce. Mais on peut, plus simplement encore, faire usage du théorème établi au n° 63. A cet effet, la charge  $2pa$  sera décomposée en une infinité de charges élémentaires  $padn$ ,  $n$  étant une variable comprise entre 0 et 2; chaque charge  $padn$  produirait dans les appuis des réactions infiniment petites exprimées par

$$\begin{aligned} dY' &= -\frac{1}{16} pa n^2 (6-n) dn, \\ dY &= -padn - dY', \\ d\mu &= -\frac{1}{8} pa^2 n (8-6n+n^2) dn, \end{aligned}$$

ainsi qu'il résulte des formules qu'on vient d'établir. En vertu du théorème cité, pour avoir les valeurs de  $Y$ ,  $Y'$ ,  $\mu$  qui répondent à la charge  $2pa$ , il faudrait faire la somme des valeurs que prennent ces expressions quand  $n$  varie par degrés insensibles de 0 à 2. On aura donc

$$\begin{aligned} Y' &= -\frac{1}{16} pa \int_0^2 n^2 (6-n) dn = -\frac{3}{4} pa, \\ Y &= -2pa - Y' = -\frac{5}{4} pa, \\ \mu &= -\frac{1}{8} pa^2 \int_0^2 n (8-6n+n^2) dn = -\frac{1}{2} pa^2. \end{aligned}$$

Il est clair qu'une méthode analogue serait applicable si les charges étaient distribuées sur la pièce suivant une loi quelconque, continue ou non.

73. *Suite du problème de la poutre encastree à une de ses extrémités et appuyée à l'autre. Figure de la fibre moyenne déformée. Loi suivant laquelle varient le moment fléchissant et l'effort tranchant.* — Supposons d'abord que la force isolée  $2R$  existe seule; les équations précédemment données (7) et (8) deviennent, en y substituant la valeur de  $Y'$ ,

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} er^2 y &= 2R \left( \frac{nax^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) - \frac{n^2}{8} (6-n) R \left( ax^2 - \frac{x^3}{6} \right) \\ &\quad - \frac{R}{48} [6nax^2 (n^2 - 6n + 8) - x^3 (n^3 - 6n^2 + 16)] \\ &\quad - \frac{R(2-n)}{48} [6nax^2 (4-n) - x^3 (8 + 4n - n^2)]; \end{aligned} \right.$$

$$(10) \quad \begin{cases} er^2 y = n^2 a^2 R \left( x - \frac{1}{3} na \right) - \frac{n^2}{8} (6 - n) R \left( ax^2 - \frac{x^3}{6} \right) \\ = \frac{R n^2}{48} [(6 - n) x^3 - 6(6 - n) ax^2 + 48 a^2 x - 16 na^3]. \end{cases}$$

L'équation (9) est celle de la courbe répondant à la partie AC de la fibre moyenne, et l'équation (10) celle de la courbe répondant à la partie CB.

Pour avoir la flèche maximum, cherchons en quel point  $\frac{dy}{dx}$  s'annule.

Or on a :

Entre A et C,

$$(11) \quad er^2 \frac{dy}{dx} = \frac{R(2-n)}{16} [4 na x (4-n) - x^2 (8 + 4n - n^2)];$$

Entre C et B,

$$(12) \quad er^2 \frac{dy}{dx} = \frac{R n^2}{16} [(6-n) x^2 - 4(6-n) ax + 16 a^2].$$

L'expression (11) devient nulle pour  $x = 0$  et pour  $x = \frac{4 na (4-n)}{8 + 4n - n^2}$ ; cette valeur fera réellement connaître la situation du point où la tangente à la courbe est horizontale si l'on a

$$\frac{4 na (4-n)}{8 + 4n - n^2} < na,$$

car autrement la valeur de  $x$  se rapporterait à un point auquel ne s'applique pas l'expression (11). Or l'inégalité précédente donne

$$16 - 4n < 8 + 4n - n^2,$$

ou bien

$$8 - 8n + n^2 < 0,$$

ou encore

$$(4-n)^2 - 8 < 0,$$

inégalité qui ne saurait être satisfaite par des valeurs positives de  $n$  comprises entre 0 et 2, à moins de poser

$$4 - n < \sqrt{8}, \quad \text{ou bien} \quad n > 1,172.$$

Ainsi la plus grande flèche produite par la charge isolée  $2R$  se trouvera ou ne se trouvera pas entre l'encastrement et le point d'application de cette charge, suivant qu'on aura  $n$  plus grand ou plus petit que 1,172. Si  $n$  est  $> 1,172$ , la flèche maximum s'obtiendra en faisant dans l'équation (9)

$$x = \frac{4 na (4-n)}{8 + 4n - n^2}.$$



Lorsque  $n$  sera au-dessous de 1,172, ce sera dans la partie CB qu'on devra chercher la flèche maximum. On fera donc  $\frac{dy}{dx} = 0$  dans l'équation (12), et on aura pour déterminer l'abscisse correspondante à ce maximum

$$(6-n)x^2 - 4(6-n)ax + 16a^2 = 0,$$

d'où l'on tire

$$x = 2a \left( 1 - \sqrt{\frac{2-n}{6-n}} \right).$$

Dans le cas particulier où la charge agirait à égale distance des points d'appui, il faudrait faire  $n = 1$ ; l'abscisse déterminée par cette relation serait

$$x = 2a \left( 1 - \sqrt{\frac{1}{5}} \right) = 1,106 a;$$

la flèche correspondante donnée par l'équation (10) serait

$$f = \frac{Ra^3}{3\sqrt{5}er^2}.$$

Le coefficient  $3\sqrt{5}$  est compris entre ceux qu'on a trouvés (n° 70 et 71) pour le cas de deux appuis simples et pour le cas de deux encastements.

Considérons maintenant le cas de la répartition uniforme de la charge, dont nous désignerons la valeur totale par  $2pa$ ,  $p$  étant toujours sa valeur par unité de longueur. Alors on a pour l'expression du moment fléchissant, dans une section quelconque,

$$(13) \quad er^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{2} p(2a-x)^2 + Y'(2a-x);$$

ou, en substituant la valeur de  $Y'$ ,

$$(14) \quad \begin{cases} er^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{2} p(2a-x)^2 - \frac{3}{4} pa(2a-x) \\ \quad \quad \quad = \frac{1}{4} p(2a^2 - 5ax + 2x^2). \end{cases}$$

On en conclut par l'intégration

$$er^2 \frac{dy}{dx} = \frac{1}{4} p \left( 2a^2 x - \frac{5}{2} ax^2 + \frac{2}{3} x^3 \right).$$

Pour avoir le point où  $y$  est le plus grand, il faut faire  $\frac{dy}{dx} = 0$ , ce qui, à part la solution étrangère  $x = 0$ , donne l'équation

$$4x^2 - 15ax + 12a^2 = 0,$$

d'où

$$x = a \left( \frac{15 - \sqrt{33}}{8} \right) = 1,156 a;$$

le signe + du radical doit être rejeté parce qu'il donnerait  $x > 2a$ . La flèche maximum se calculera en intégrant  $\frac{dy}{dx}$ , et substituant cette valeur de  $x$  dans l'expression de  $y$ . On aura ainsi

$$er^2 y = \frac{1}{4} p \left( a^2 x^2 - \frac{5}{6} a x^3 + \frac{1}{6} x^4 \right) = \frac{1}{24} p x^2 (2a - x) (3a - x),$$

$$f = \frac{pa^4}{12288 er^2} (117 + 165 \sqrt{33}) = 0,0867 \frac{pa^4}{er^2}.$$

La valeur de  $f$  est comprise aussi entre celles qu'on a obtenues précédemment (n° 70 et 71) quand on avait deux appuis simples ou deux encastresments aux points extrêmes.

Afin de compléter l'étude du problème actuel, il ne nous reste plus qu'à chercher comment varient le moment fléchissant et l'effort tranchant pour chaque section de la poutre, afin de pouvoir calculer les pressions et tensions. Le moment  $X$  étant, comme on le sait, égal à  $er^2 \frac{d^2 y}{dx^2}$  (n° 47) sera donné par les seconds membres des équations (3), (4) et (13) après qu'on y aura remplacé  $Y'$  par sa valeur connue. On voit de cette manière que si la charge isolée  $2R$  existe seule, le moment cherché sera représenté par deux fonctions du premier degré en  $x$ , applicables, l'une entre A et C, l'autre entre C et B; de telle sorte que les trois valeurs limites de ce moment répondront nécessairement à  $x = 0$ ,  $x = na$ ,  $x = 2a$ , et seront exprimées respectivement par

$$2Rna + 2aY' \quad \text{ou} \quad \frac{1}{4} n(4-n)(2-n)Ra, \quad \text{pour le point A.}$$

$$Y'a(2-n) \quad \text{ou} \quad -\frac{1}{8} n^2(2-n)(6-n)Ra, \quad \text{pour le point C,}$$

zéro, pour le point B.

Ainsi ce serait en A ou C que se trouveraient les plus grandes pressions ou tensions longitudinales.

Lorsqu'au contraire on suppose  $R = 0$  et que  $p$  subsiste seul, on a déjà trouvé la valeur du moment fléchissant, qui n'est autre que le second membre de l'équation (14). Il peut se mettre sous la forme

$$-\frac{1}{8} p(4a - 2x)(2x - a),$$

sous laquelle on reconnaît qu'il s'annule pour  $x = \frac{a}{2}$  et pour  $x = 2a$ , et

que ses limites de grandeur absolue répondent à  $x = 0$  ou à  $x = \frac{5a}{4}$ , cette dernière valeur de  $x$  étant celle qui rend égaux les deux facteurs  $4a - 2x$  et  $2x - a$ , dont la somme est constante. Les limites du moment fléchissant sont donc

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} pa^2, \quad \text{répondant à } x = 0, \\ & -\frac{9}{32} pa^2, \quad \text{répondant à } x = \frac{5}{4} a. \end{aligned}$$

Ce moment est d'ailleurs positif entre  $x = 0$  et  $x = \frac{a}{2}$ ; par suite  $\frac{d^2y}{dx^2}$  l'est aussi, et la courbe tourne sa concavité vers le bas. Dans le reste de la pièce, le fait contraire se produit. Entre  $x = 0$  et  $x = \frac{a}{2}$ , ce sont donc les fibres du dessus qui sont tendues et celles du dessous comprimées, tandis que l'inverse a lieu entre  $x = \frac{a}{2}$  et  $x = 2a$ .

Dans le cas mixte où  $p$  et  $R$  existent tous les deux, le moment fléchissant est exprimé par deux fonctions du second degré en  $x$ , aisées à trouver d'après ce qui précède. Nous laissons au lecteur le soin de les discuter. Nous donnerons seulement les expressions de l'effort tranchant, qui sont :

Entre A et C,

$$P = -2R - Y' - p(2a - x) = \frac{1}{8} R(-16 + 6n^2 - n^3) + \frac{1}{4} p(4x - 5a);$$

Entre C et B,

$$P = -Y' - p(2a - x) = \frac{1}{8} Rn^2(6 - n) + \frac{1}{4} p(4x - 5a).$$

$P$  est donc toujours une fonction du premier degré en  $x$ , dont les valeurs limites répondent par conséquent aux limites de  $x$ . On les obtient en faisant  $x = 0$  et  $x = na$  dans la première expression,  $x = na$  et  $x = 2a$  dans la seconde; on trouve ainsi les valeurs

$$\frac{1}{8} R(-16 + 6n^2 - n^3) - \frac{5}{4} pa, \quad \text{pour l'effort tranchant en A;}$$

$$\frac{1}{8} R(-16 + 6n^2 - n^3) + \frac{1}{4} pa(4n - 5); \quad \text{id.} \quad \text{en C;}$$

$$\frac{1}{8} Rn^2(6 - n) + \frac{1}{4} pa(4n - 5), \quad \text{id.} \quad \text{id.};$$

$$\frac{1}{8} Rn^2(6 - n) + \frac{3}{4} pa. \quad \text{id.} \quad \text{en B.}$$

$P$  varie uniformément dans chacune des deux parties AC et CB; mais il éprouve en C un changement brusque, par suite de la force  $2R$  qu'il faut cesser d'y faire entrer quand on a dépassé ce point.

§ II. — Pontres droites reposant sur plus de deux appuis et chargées perpendiculairement à la fibre moyenne.

74. *Généralités; position de la question.* — Les poutres droites reposant sur plus de deux appuis ont été assez fréquemment employées, dans ces dernières années, pour supporter des ponts à plusieurs travées construits sous des voies de chemin de fer. L'un des premiers exemples de cette espèce de travaux d'art a été, en France, le pont sur lequel le chemin de fer de l'Ouest traverse la Seine à Asnières; puis sont venus les ponts de Langon sur la Garonne, de la Quarantaine sur la Saône à Lyon, et beaucoup d'autres qu'il serait inutile d'énumérer ici. A l'occasion du pont d'Asnières, M. Clapeyron, ingénieur en chef des Mines, membre de l'Académie des Sciences, a beaucoup perfectionné les méthodes qui existaient avant lui pour vérifier la stabilité de la poutre, ou pour en fixer à priori les dimensions. Sans nous astreindre à suivre exactement la même marche, mais en profitant beaucoup des idées de M. Clapeyron, nous nous proposons d'indiquer dans le présent paragraphe les calculs préliminaires qu'exige la vérification ou détermination dont il s'agit; ces calculs consistent dans l'évaluation : 1<sup>o</sup> des limites extrêmes du moment fléchissant considéré soit algébriquement, soit en valeur absolue; 2<sup>o</sup> de la limite supérieure qu'atteint l'effort tranchant pris en valeur absolue. L'utilité pratique des résultats que nous aurons obtenus ressortira du § III, où la solution sera complétée.

Indiquons en premier lieu les hypothèses particulières qui servent de base au calcul. La poutre est soutenue à ses deux extrémités par les culées, et, dans l'intervalle, par les piles; les appuis ont donc une certaine longueur, dans la direction parallèle à la fibre moyenne, et on ne peut pas rigoureusement regarder chacun d'eux comme équivalent à la fixité d'un seul point de cette fibre. Néanmoins les calculs ci-après seront exécutés dans cette hypothèse, qu'il faut considérer comme défavorable à la résistance, puisque les supports constituent en réalité un encastrement partiel dont on négligera l'effet. On supposera en outre les appuis placés symétriquement par rapport au milieu de la construction : c'est une hypothèse dont

on ne devra pas évidemment s'écarter tant qu'on se préoccupera seulement de mettre la poutre dans les meilleures conditions de résistance, car les charges, tant passagères que permanentes, sont ordinairement symétriques, et s'il existe une raison pour adopter une certaine disposition sur une moitié de la poutre, la même raison existera pour adopter la disposition symétrique sur l'autre moitié. Cependant la symétrie des piles et culées pourrait quelquefois entraîner un surcroît de dépenses pour les fondations, et en conséquence on pourra être conduit à y renoncer. Mais nous n'étudierons point ce cas d'une manière complète : les indications que nous donnerons à son sujet seront conçues en termes généraux, et sans beaucoup de détails.

Les moments fléchissants  $X$  et efforts tranchants  $P$  qui se produisent dans les diverses sections transversales vont être déterminés en supposant la poutre prismatique, c'est-à-dire établie avec une section constante, bien qu'en fait les constructeurs aient cru devoir renforcer certaines sections plus exposées que d'autres à la rupture. Voici ce qu'on peut dire pour faire comprendre l'origine de ce procédé. Il est rationnel de fixer les dimensions de chaque section de manière à ce que la tension maximum par unité de surface  $y$  soit égale à une limite supérieure déterminée; car si la matière de la poutre résiste convenablement à une tension ayant cette valeur, il n'y a pas de raison pour descendre au-dessous dans une section quelconque; et, en l'atteignant toujours, on économisera le volume total de matière à mettre en œuvre. Dans le but d'y arriver, on conçoit qu'on emploie la méthode dite *de fausse position* ou *des approximations successives* : d'abord on suppose constante la section variable qu'on se propose de chercher, et on calcule en conséquence les  $X$  et  $P$ ; admettant ensuite ces valeurs de  $X$  et  $P$  comme étant celles qui se produiraient réellement dans la poutre à construire, on calcule les dimensions en travers de manière à obtenir la tension limite dans toutes les sections. Les résultats de cette opération devraient être considérés comme simplement approximatifs, et pour en avoir de plus exacts on devrait faire de nouveau la recherche des  $X$  et  $P$ , en attribuant à chaque section les di-

mensions qu'on aurait ainsi trouvées; puis déduire de ces nouvelles valeurs de  $X$  et  $P$  des dimensions plus ou moins différentes des premières, au moyen desquelles on recommencerait encore un essai analogue, jusqu'à ce que deux essais consécutifs donnassent à peu près le même résultat. Mais on s'est toujours borné jusqu'à présent au premier essai : au point de vue théorique c'est une hardiesse difficile à justifier complètement, et cependant la pratique l'a consacrée, puisque beaucoup de ponts construits sur les données qu'on en a déduites ont convenablement résisté à toutes les épreuves.

Enfin, la poutre sera soumise à des forces toutes perpendiculaires à la fibre moyenne et réductibles, sur une portion quelconque de sa longueur, à des forces situées dans un plan déterminé qui contient aussi cette fibre : pour fixer les idées, on supposera toujours la fibre moyenne horizontale et les forces verticales. La condition nécessaire de la déformation dans un plan sera supposée remplie (n° 45). Les charges seront censées uniformément réparties sur chaque travée, mais leur intensité par mètre courant pourra varier d'une travée à l'autre.

**75. Calcul direct des moments fléchissants pour les sections faites au-dessus des points d'appui.** — Quand il s'agit de vérifier la stabilité d'une poutre, dans les conditions ci-dessus définies (n° 74), l'idée qui se présente le plus naturellement est de déterminer les réactions des appuis, car, cela fait, on connaîtrait toutes les forces extérieures qui sollicitent la pièce. On poserait assez facilement les équations qui existent entre ces inconnues auxiliaires, au moyen de procédés analogues à ceux dont on a vu des exemples (nos 53 et suivants). Malheureusement, pour peu qu'il s'agisse d'une poutre à quatre ou cinq travées, on se trouve ainsi conduit à des calculs longs et pénibles. On arrive au but beaucoup plus simplement en prenant pour inconnues auxiliaires les moments fléchissants dans les sections faites au-dessus des points d'appui.

Afin d'en trouver la valeur, considérons d'abord deux travées contiguës, EF, FG (*fig. 36*) reposant sur trois appuis consécutifs E, F, G. Appelons :

I.

10



Fig. 36.



$a$  et  $a'$  les longueurs  $\overline{EF}$ ,  $\overline{FG}$ ;

$p$  et  $p'$  les poids par unité de longueur qui chargent respectivement les travées  $EF$ ,  $FG$ ;

$X'$ ,  $X''$ ,  $X'''$ , les moments fléchissants, pour les sections faites en  $E$ ,  $F$ ,  $G$ ;

$x$ ,  $y$  les coordonnées d'un point quelconque de la fibre moyenne déformée, relativement aux axes  $Ex$ ,  $Ey$ ;

$er^2$  le moment de flexibilité de la poutre.

Maintenant, prenons un point  $M$  de la fibre moyenne, dans la travée  $EF$ , à la distance  $x$  de l'origine, et cherchons, pour la section faite en  $M$ , la valeur du moment fléchissant : il faudra évaluer, relativement au point  $M$ , la somme des moments des forces appliquées à la poutre entre ce point et l'extrémité du côté des  $x$  positifs. Or toutes les forces appliquées dans la travée  $FG$  et les suivantes donneront chacune un moment qui aura une expression du premier degré en  $x$ ; la charge uniformément répartie sur  $MF$ , c'est-à-dire  $p(a-x)$ , produira le moment  $-\frac{1}{2}p(a-x)^2$ , puisque le sens positif est celui d'un moment qui tend à faire tourner de  $Ex$  vers  $Ey$  (n° 48); donc en définitive le moment fléchissant en  $M$  sera exprimé par une fonction de la forme  $A+Bx-\frac{1}{2}px^2$ ,  $A$  et  $B$  étant des constantes. On posera donc (n° 47)

$$(1) \quad er^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = A + Bx - \frac{1}{2} px^2.$$

Intégrant une première fois et désignant par  $K'$  et  $K''$  les valeurs de  $\frac{dy}{dx}$  pour les points  $E$  et  $F$ , on aura les deux équations

$$er^2 \left( \frac{dy}{dx} - K' \right) = Ax + \frac{1}{2} Bx^2 - \frac{1}{6} px^3,$$

$$er^2 (K'' - K') = Aa + \frac{1}{2} Ba^2 - \frac{1}{6} pa^3.$$

Si l'on intègre une seconde fois l'avant-dernière équation, entre les limites  $x = 0$  et  $x = a$ , on en tirera

$$(2) \quad -er^2 K' = \frac{1}{2} Aa + \frac{1}{6} Ba^2 - \frac{1}{24} pa^3,$$

attendu que l'intégrale de  $\frac{dy}{dx} dx$  est nulle entre ces limites.

Éliminant  $K'$ , nous trouverons

$$(3) \quad er^2 K'' = \frac{1}{2} Aa + \frac{1}{3} Ba^2 - \frac{1}{8} pa^3.$$

D'un autre côté, nous aurions pu placer l'origine des  $x$  en F, et représenter le moment fléchissant dans la travée FG par une fonction de la forme  $A' + B'x - \frac{1}{2} p'x^2$ . des calculs en tout point semblables aux précédents nous auraient alors fourni la relation analogue à (2) :

$$(4) \quad -er^2 K'' = \frac{1}{2} A'a' + \frac{1}{6} B'a'^2 - \frac{1}{24} p'a'^3.$$

L'élimination de  $K''$  entre (3) et (4) conduit au résultat

$$(5) \quad \frac{1}{2} Aa + \frac{1}{2} A'a' + \frac{1}{3} Ba^2 + \frac{1}{6} B'a'^2 - \frac{1}{8} pa^3 - \frac{1}{24} p'a'^3 = 0.$$

Maintenant, on exprimera  $A, B, A', B'$  en fonction de  $X', X'', X'''$  : en effet la fonction  $A + Bx - \frac{1}{2} px^2$  doit prendre les valeurs  $X'$  et  $X''$  pour  $x = 0$  et  $x = a$ , ce qui donne

$$A = X', \quad A + Ba - \frac{1}{2} pa^2 = X'',$$

c'est-à-dire

$$(6) \quad A = X', \quad B = \frac{1}{2} pa + \frac{X'' - X'}{a};$$

pareillement on trouverait

$$A' = X'', \quad B' = \frac{1}{2} p'a' + \frac{X''' - X''}{a'}.$$

Quand on substitue ces valeurs de  $A, B, A', B'$  dans l'équa-

tion (4) elle devient

$$\frac{1}{6} X' a + \frac{1}{3} X'' (a + a') + \frac{1}{6} X''' a' + \frac{1}{24} p a^3 + \frac{1}{24} p' a'^3 = 0,$$

soit, en multipliant par 6,

$$(7) \quad X' a + 2 X'' (a + a') + X''' a' + \frac{1}{4} (p a^3 + p' a'^3) = 0.$$

Telle est la relation remarquable qui existe entre les moments fléchissants sur trois points d'appui consécutifs. Elle conduit sans peine à la détermination des moments fléchissants pour les sections faites sur l'ensemble des points d'appui. Soient en effet  $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{i-1}, A_i, A_{i+1}, \dots, A_{n-2}, A_{n-1}, A_n$  les appuis, au nombre de  $n+1$ ;  $X_0, X_1, X_2$ , etc., les moments qui leur correspondent. Nous remarquerons de suite que si la pièce est librement posée sur ses appuis, les moments extrêmes  $X_0$  et  $X_n$  sont nécessairement nuls, car sans cela l'équilibre de la pièce ne pourrait pas exister. Il n'y a donc en réalité à déterminer que  $n-1$  inconnues, savoir  $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}$ . A cet effet on appliquera l'équation (7) successivement à tous les groupes de deux travées consécutives, et comme ces groupes sont au nombre de  $n-1$ , cela fournira des équations en nombre suffisant pour trouver les valeurs de ces inconnues.

**76. Détermination du moment fléchissant et de l'effort tranchant, pour une section quelconque; réactions des appuis.** — Quand les moments  $X_i$  auront été calculés, on cherchera, pour une travée quelconque, au moyen des formules (6) du numéro précédent, les quantités désignées tout à l'heure par A et B, et alors on connaîtra le moment fléchissant pour un point quelconque de cette travée. L'intégration de l'équation qui l'exprime donnera la nouvelle forme de la fibre moyenne.

Nous avons dit (n° 19) que souvent on se dispensait, dans les calculs sur la résistance des pièces droites chargées transversalement, de tenir compte de l'effort tranchant. Si l'on veut y avoir égard, on pourra le déduire du moment fléchissant, par un moyen bien simple. En effet, si  $Q'$  est l'une des forces appliquées à la poutre sur MF (*fig.* 36) ou sur son prolongement, et  $x'$  l'abscisse de son point d'application, le moment fléchis-

sant  $X$  en  $M$  sera une somme de termes tels que  $Q' (x' - x)$  : ainsi

$$X = \sum Q' (x' - x),$$

la somme  $\sum$  s'étendant depuis le point  $M$  jusqu'à la fin de la pièce, du côté des  $x$  positifs. Donc

$$-\frac{dX}{dx} = \sum Q';$$

or  $\sum Q'$  n'est autre chose que l'effort tranchant  $P$  en  $M$ , dont la valeur absolue est par conséquent la même que celle de la dérivée  $\frac{dX}{dx}$ ; donc puisque l'on connaît  $X$  en fonction de  $x$ , une dérivation donnera immédiatement  $P$ .

$P$  et  $X$  étant désormais considérés comme connus en un point quelconque de la pièce, on serait en mesure de faire tous les calculs relatifs à sa déformation et à sa résistance; à ce point de vue il n'y aurait donc aucune utilité à chercher les réactions des appuis. Il ne peut y en avoir que si l'on veut se rendre compte des déformations et actions moléculaires dans les appuis eux-mêmes, afin de leur donner une stabilité convenable. Voici comment on déterminerait ces réactions. En considérant deux sections infiniment voisines de l'appui  $F$ , l'une à gauche, l'autre à droite, on aurait dans ces deux sections deux efforts tranchants  $P'$  et  $P''$  différents l'un de l'autre, car la réaction  $Y$  de l'appui intermédiaire entre ou n'entre pas dans la somme  $\sum Q'$ , suivant qu'on prend la première section ou la seconde. Donc

$$Y = P' - P'',$$

et comme l'effort tranchant est connu dans toutes les sections, on déduira de cette relation les forces  $Y$ .

77. *Application de la théorie précédente.* — Soit donnée une poutre reposant sur quatre appuis  $A, B, C, D$  (fig. 37); on

fig. 37.

suppose  $\overline{AB} = \overline{CD} = a$ ,

et  $\overline{BC} = na$ ; les poids par mètre courant sur

$AB, BC, CD$  sont respectivement  $p_1, p_2, p_3$ ; on demande d'abord les moments fléchissants  $X_1, X_2$  sur les points  $B$  et  $C$ .

L'équation (6) du n° 75 appliquée successivement aux groupes de travées AB et BC, BC et CD deviendra

$$2X_1(1+n) + nX_2 + \frac{1}{4}a^2(p_1 + n^2p_2) = 0,$$

$$X_1n + 2X_2(1+n) + \frac{1}{4}a^2(n^2p_2 + p_3) = 0,$$

d'où l'on tire les valeurs

$$(1) \quad X_1 = \frac{a^2}{4(2+n)(2+3n)} [np_3 - n^2(2+n)p_2 - 2(1+n)p_1],$$

$$(2) \quad X_2 = \frac{a^2}{4(2+n)(2+3n)} [np_1 - n^2(2+n)p_2 - 2(1+n)p_3].$$

Maintenant, si l'on représente dans la travée CD le moment fléchissant  $X$  par une expression de la forme

$$X = \alpha + \beta x - \frac{1}{2}p_3x^2,$$

$x$  étant une distance comptée à partir de l'extrémité D, il faudra que pour  $x = 0$  et  $x = a$  on ait  $X = 0$  et  $X = X_2$ ; donc

$$\alpha = 0 \quad \text{et} \quad \beta a - \frac{1}{2}p_3a^2 = X_2,$$

et par suite

$$(3) \quad X = \left( \frac{X_2}{a} + \frac{1}{2}p_3a \right) x - \frac{1}{2}p_3x^2.$$

De même si pour la travée CB on compte les distances  $x_1$  à partir de C, on posera

$$X = \alpha' + \beta'x_1 - \frac{1}{2}p_2x_1^2;$$

puis la condition d'avoir  $X = X_2$  et  $X = X_1$ , respectivement pour  $x_1 = 0$  et  $X_1 = na$ , donnera

$$\alpha' = X_2, \quad X_2 + \beta'na - \frac{1}{2}p_2n^2a^2 = X_1,$$

et en éliminant  $\alpha'$  et  $\beta'$ ,

$$(4) \quad X = X_2 + \left( \frac{X_1 - X_2}{na} + \frac{1}{2}p_2na \right) x_1 - \frac{1}{2}p_2x_1^2.$$

Dans la travée AB, le moment pourrait être calculé par la formule établie pour CD, en faisant une permutation d'indices et comptant les distances  $x_2$  à partir de A, ce qui donnerait

$$(5) \quad X = \left( \frac{X_1}{a} + \frac{1}{2} p_1 a \right) x_2 - \frac{1}{2} p_1 x_2^2.$$

Quant à l'effort tranchant, on obtiendrait immédiatement en prenant la dérivée de X,

$$\text{Dans la travée CD} \dots \quad P = \frac{X_2}{a} + \frac{1}{2} p_2 a - p_2 x;$$

$$\text{Dans la travée BC} \dots \quad P = \frac{X_1 - X_2}{na} + \frac{1}{2} p_2 na - p_2 x_1;$$

$$\text{Dans la travée AB} \dots \quad P = \frac{X_1}{a} + \frac{1}{2} p_1 a - p_1 x_2.$$

**78 Effet de la charge d'une travée sur une travée éloignée.**  
 — Lorsqu'une charge est placée sur une travée, fait-elle sentir son action d'une manière notable dans toute l'étendue de la pièce? Telle est la question que nous allons examiner, en supposant, pour plus de simplicité, que les travées sont d'égale ouverture, condition dont on ne s'écarte pas beaucoup dans la pratique. En vertu des théorèmes démontrés sur la superposition des effets des forces (Chap. II, § III), il suffit de voir ce qui se passerait si la charge considérée agissait seule. Supposons donc une pièce reposant sur une série d'appuis  $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{m-1}, A_m, A_{m+1}, \dots$ ; les distances  $\overline{A_0 A_1}, \overline{A_1 A_2}, \dots, \overline{A_{m-1} A_m}, \dots$ , sont toutes égales à une même longueur  $a$ ; les travées comprises entre l'extrémité  $A_0$  et l'appui  $A_m$  ne sont soumises à aucune charge, mais il en existe une au delà de ce dernier appui : il s'agit de savoir suivant quelle loi varient les moments fléchissants et les efforts tranchants dans la partie non chargée  $A_0 A_m$ .

Nommons  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_m$ , les moments fléchissants sur les points d'appui de cette partie, et appliquons l'équation (7) du n° 75 à tous les groupes de deux travées consécutives entre



$A_0$  et  $A_m$ ; nous obtiendrons ainsi les relations

$$\begin{aligned} 4X_1 + X_2 &= 0, \\ X_1 + 4X_2 + X_3 &= 0, \\ X_2 + 4X_3 + X_4 &= 0, \\ X_3 + 4X_4 + X_5 &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ X_{m-2} + 4X_{m-1} + X_m &= 0. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} X_2 &= -4X_1, \\ X_3 &= 4 \cdot 4X_1 - X_1 = 15X_1, \\ X_4 &= -4 \cdot 15X_1 - X_2 = -56X_1, \\ X_5 &= 4 \cdot 56X_1 - X_3 = 209X_1, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

et ainsi de suite. Les moments  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_m$  prennent alternativement le signe  $+$  et le signe  $-$ ; leurs valeurs absolues s'obtiennent en multipliant le premier par des coefficients qui forment la série de nombres

$$1, \quad 4, \quad 15, \quad 56, \quad 209, \dots,$$

dont chacun égale quatre fois le précédent, moins celui qui est avant le précédent.

Lorsque la charge uniformément répartie sur une travée est nulle, l'expression générale du moment fléchissant

$$X = A + Bx - \frac{1}{2} px^2$$

employée au n° 75 se réduit à une fonction du premier degré  $A + Bx$ , qui varie uniformément dans l'étendue de la travée. Sa dérivée, qui fait connaître l'effort tranchant, devient donc constante et égale au quotient obtenu en divisant la variation totale du moment, d'un bout à l'autre de la travée, par la longueur correspondante. Ainsi, en nommant  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_m$  les efforts tranchants successifs dans les travées  $A_0A_1, A_1A_2,$

$\Lambda_2 \Lambda_3, \dots, \Lambda_{m-1} \Lambda_m$ , on aura

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{X_1}{a}, \\ P_2 &= \frac{X_2 - X_1}{a} = -\frac{5X_1}{a}, \\ P_3 &= \frac{X_3 - X_2}{a} = \frac{19X_1}{a}, \\ P_4 &= \frac{X_4 - X_3}{a} = -\frac{71X_1}{a}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Les valeurs absolues de l'effort tranchant s'obtiennent encore en multipliant la quantité  $\frac{X_1}{a}$  par les nombres de la série

$$1, 5, 19, 71, 265, \dots,$$

dont la loi de formation est la même que pour la série ci-dessus considérée.

Il n'est pas difficile d'exprimer algébriquement cette loi au moyen du calcul inverse des différences finies. Soient en effet

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \dots, u_m,$$

des nombres tels qu'entre trois d'entre eux consécutifs on ait la relation

$$(1) \quad u_{i+1} = 4u_i - u_{i-1}.$$

Si nous désignons par  $\Delta u_i$  en général la différence finie  $u_{i+1} - u_i$ , nous pourrons écrire

$$u_i = u_{i-1} + \Delta u_{i-1},$$

$$u_{i+1} = u_i + \Delta u_i = u_{i-1} + \Delta u_{i-1} + \Delta(u_{i-1} + \Delta u_{i-1}) = u_{i-1} + 2\Delta u_{i-1} + \Delta^2 u_{i-1}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (1), et réduisant, on trouvera

$$(2) \quad 2u_{i-1} + 2\Delta u_{i-1} - \Delta^2 u_{i-1} = 0,$$

équation du second ordre aux différences finies. On peut d'abord en chercher des solutions particulières de la forme

$$u_{i-1} = c^{i-1},$$

$c$  désignant un nombre constant; on tire de là, par la différentiation,

$$\Delta u_{i-1} = c^i - c^{i-1} = c^{i-1}(c - 1),$$

$$\Delta^2 u_{i-1} = c^i - 2c^{i-1} + c^{i-2} = c^{i-2}(c^2 - 2c + 1),$$

valeurs qui, substituées dans l'équation (2), donneront

$$c^{i-1} [2 + 2(c-1) - (c-1)^2] = 0,$$

ou bien

$$c^{i-1} (c^2 - 4c + 1) = 0.$$

L'équation (2) sera donc satisfaite si l'on prend pour  $c$  les racines de l'équation

$$c^2 - 4c + 1 = 0,$$

soit les deux valeurs

$$d = 2 + \sqrt{3} \quad \text{et} \quad f = 2 - \sqrt{3} = \frac{1}{d}.$$

Par suite, on aura deux solutions particulières

$$u'_{i-1} = d^{i-1}, \quad u''_{i-1} = f^{i-1} = d^{-(i-1)};$$

d'où il résulte que l'intégrale générale de l'équation (2) peut se mettre sous la forme

$$u_{i-1} = C d^{i-1} + D d^{-(i-1)},$$

C et D étant des constantes pour toutes les valeurs entières et positives de l'indice  $i-1$ ; ou bien encore en augmentant l'indice d'une unité, on a

$$(3) \quad u_i = C d^i + D d^{-i}.$$

Il ne s'agit plus que de déterminer convenablement C et D pour que la série des  $u_i$  donne les coefficients, soit des  $X_i$ , soit des  $P_i$ . Dans le premier cas, il faut que pour  $i=1$  et  $i=2$  on ait respectivement  $u_1 = 1$ ,  $u_2 = 4$ , ce qui permet de poser

$$\begin{aligned} C(2 + \sqrt{3}) + D(2 - \sqrt{3}) &= 1, \\ C(2 + \sqrt{3})^2 + D(2 - \sqrt{3})^2 &= 4; \end{aligned}$$

on en tire sans peine

$$C = \frac{1}{2\sqrt{3}}, \quad D = -\frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Si l'on veut les coefficients des  $P_i$ , il faudra poser  $u_1 = 1$  et  $u_2 = 5$ , soit

$$\begin{aligned} C(2 + \sqrt{3}) + D(2 - \sqrt{3}) &= 1, \\ C(2 + \sqrt{3})^2 + D(2 - \sqrt{3})^2 &= 5; \end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$C = \frac{1 + \sqrt{3}}{2(2 + \sqrt{3})}, \quad D = \frac{1 - \sqrt{3}}{2(2 - \sqrt{3})}.$$

Les expressions cherchées seraient donc finalement :

Pour les moments  $X_i$ ,

$$(4) \quad u_i = \frac{1}{2\sqrt{3}} [(2 + \sqrt{3})^i - (2 + \sqrt{3})^{-i}];$$

Pour les efforts tranchants  $P_i$ ,

$$(5) \quad u_i = \frac{1}{2} [(1 + \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})^{i-1} + (1 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})^{-i-1}].$$

Les résultats numériques obtenus ci-dessus mettent en évidence la loi suivant laquelle croissent les moments fléchissants et les efforts tranchants quand on parcourt la pièce depuis l'extrémité libre  $A_0$  jusqu'à la travée chargée. En calculant le rapport de deux moments  $X_i$  ou de deux efforts  $P_i$  consécutifs, on constate qu'il converge très-rapidement vers 3,73 ou environ  $\frac{15}{4}$  (\*). Donc si au-dessus de l'appui  $A_m$ , qui touche à la travée chargée, le moment fléchissant est représenté par 1, il ne sera plus que  $\frac{4}{15}$  sur l'appui  $A_{m-1}$ ,  $\left(\frac{4}{15}\right)^2$  ou à peu près  $\frac{1}{14}$  sur  $A_{m-2}$ ,  $\frac{4}{15} \cdot \frac{1}{14}$  ou moins de  $\frac{1}{52}$  sur  $A_{m-3}$ ; l'effort tranchant décroîtrait avec la même rapidité. D'ailleurs on a vu plus haut que dans une travée sans charge le moment fléchissant a une variation uniforme et que l'effort tranchant ne change pas. Donc on peut conclure ce qui suit :

*L'influence de la charge qui agit sur une travée est encore relativement sensible dans la travée contiguë; elle est très-notablement affaiblie dans la travée qui succède à celle-ci; enfin elle est à peu près relativement nulle dans la travée suivante.*

Si l'on admet, d'après cette considération, que dans la pratique il est suffisant de se préoccuper de l'influence qu'exerce une charge dans la travée voisine, il n'y aura plus beaucoup

---

(\*) C'est ce que montrent directement les formules (4) et (5), car pourvu que l'exposant  $i$  ou  $i - 1$  atteigne 3 (ou même seulement 2), la puissance négative de  $2 + \sqrt{3}$  peut être négligée devant la puissance positive, et les  $u_i$  deviennent égaux aux termes d'une progression géométrique ayant pour raison  $2 + \sqrt{3}$  ou 3,732.

d'intérêt à étudier ce qui se passe dans des poutres à plus de trois travées. En effet, quand une poutre aura plus de quatre appuis, pour résoudre tous les problèmes de la Résistance des Matériaux relatifs à une travée intermédiaire, on sera en droit de supposer la poutre terminée aux deux travées qui touchent celle-là, puisque les forces exercées sur les autres n'ont pas d'influence sensible sur celle que nous avons à considérer. S'il s'agissait d'une travée de rive, on pourrait même, à la rigueur, se borner à lui joindre celle qui la suit, et on rentrerait ainsi dans le cas d'une poutre à deux travées. A plus forte raison les résultats seront-ils suffisamment exacts si l'on conserve trois travées au lieu de deux. On voit ainsi toute l'importance que présente l'étude de la résistance d'une poutre à trois travées : c'est cette étude que nous allons maintenant entreprendre, en commençant par le cas d'un égal espacement des appuis.

*79: Limites du moment fléchissant dans une poutre à trois travées égales.* — Les poutres que les ingénieurs des Ponts et Chaussées peuvent avoir à établir sont généralement destinées à supporter :

1°. Une charge permanente uniformément répartie sur leur longueur entière, charge dont nous nommerons  $p$  l'intensité rapportée à l'unité de longueur;

2°. Une surcharge couvrant entièrement une ou plusieurs travées contiguës ou non, mais ayant toujours sur les travées qu'elle embrasse une répartition uniforme, à raison de  $p'$  kilogrammes par mètre courant.

Si l'on prend, par exemple, un pont destiné au passage d'un chemin de fer, le poids propre de la construction formera la charge permanente ; des convois qui peuvent s'étendre soit sur une travée, soit sur deux, soit sur la longueur totale, formeront la surcharge, susceptible d'ailleurs d'être remplacée par le poids d'épreuve avant que le pont soit ouvert à la circulation. Les convois et le poids d'épreuve ont toujours une répartition sensiblement uniforme. Ainsi donc, quels que soient les rangs occupés par les travées surchargées, il y aura toujours sur chaque travée une charge constante par mètre courant, comme le supposent les calculs des n<sup>os</sup> 75, 76 et 77.

Soient A, B, C, D les quatre appuis (*fig. 37*). La surcharge pourra se distribuer de sept manières différentes, qui feront autant de cas particuliers à examiner, savoir :

La surcharge existe :

- 1°. Sur la travée AB;
- 2°. Sur la travée BC;
- 3°. Sur la travée CD;
- 4°. Sur les travées AB, BC;
- 5°. Sur les travées AB, CD;
- 6°. Sur les travées BC, CD;
- 7°. Sur la poutre entière.

Chacune des distributions de la surcharge (à laquelle on doit toujours joindre la charge permanente) donne lieu, dans une section quelconque de la poutre, à un certain moment fléchissant X; ce moment a donc, pour la section dont il s'agit, sept valeurs différentes. Nous nous proposerons ici un problème, qui est en quelque sorte le premier pas à faire pour vérifier la résistance de la poutre, et qui consiste à chercher les limites extrêmes entre lesquelles varient les sept valeurs algébriques de X, relatives à une même section. Afin de procéder le plus sûrement et le plus simplement possible, nous supposerons d'abord la surcharge nulle, puis nous annulerons au contraire le poids permanent, et enfin nous verrons ce qui arrive quand on les fait agir ensemble.

*Effet spécial de la charge permanente.* — Le moment fléchissant produit par cette charge a deux expressions, que donnent immédiatement les formules du n° 77, en y faisant  $n = 1$ ,  $p = p_1 = p_2 = p_3$ ; on trouve ainsi :

$$\text{Dans la travée de rive... } X = \frac{2}{5} p a x - \frac{1}{2} p x^2 ;$$

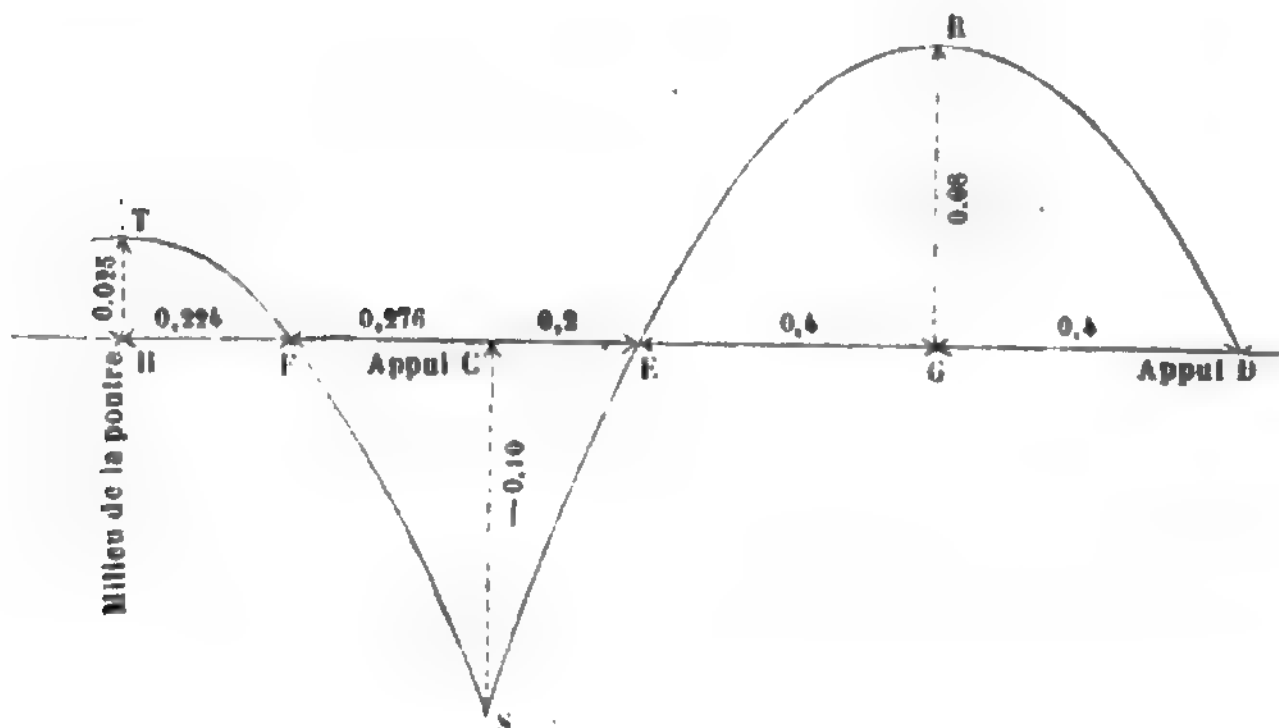
$$\text{Dans la travée centrale.. } X = -\frac{1}{10} p a^2 + \frac{1}{2} p a x_1 - \frac{1}{2} p x_1^2 ;$$

$a$ ,  $x$  et  $x_1$  conservent la signification indiquée au n° 77. Si l'on représente X par une ordonnée menée au point correspondant de la fibre moyenne, le sens positif étant de bas en



haut, on obtient dans une moitié de la poutre deux portions de paraboles à axes verticaux et d'égal paramètre; c'est ce que représente la *fig. 38* ci-dessous. Dans l'autre moitié, il y aurait évidemment symétrie.

Fig. 38.



Les cotes affectant les distances horizontales  $\overline{DG}$ ,  $\overline{GE}$ ,  $\overline{CE}$ , etc., indiquent les rapports de ces distances à la longueur  $a$ ; de même les cotes placées auprès des ordonnées font connaître leurs rapports à  $pa^2$ . Comme on le voit, dans la travée de la rive CD, la parabole passe par l'appui D, s'élève progressivement jusqu'à un maximum positif  $0,08 pa^2$ , dont la distance horizontale au point D est  $x = \frac{2}{5} a$ ; elle décroît ensuite symétriquement par rapport à l'ordonnée maximum, s'annule pour  $x = \frac{4}{5} a$ , puis devient négative et croît en valeur absolue jusqu'à  $-0,10 pa^2$ , valeur répondant à l'appui intermédiaire C. Entre ce dernier point et le milieu de la poutre, l'ordonnée négative décroît d'abord en valeur absolue, s'annule un peu plus loin que le quart de la travée, et croît ensuite jusqu'à un maximum positif  $0,025 pa^2$  répondant au milieu de la pièce. Le point où l'ordonnée s'annule dans cette partie de la poutre est donné par l'équation du second degré

$$x^2 - ax + \frac{1}{5} a^2 = 0;$$

d'où l'on tire

$$x_1 = \frac{1}{2}a \left( 1 \pm \sqrt{\frac{1}{5}} \right),$$

ou bien

$$x_1 = 0,276a \quad \text{et} \quad x_1 = 0,724a.$$

Ces valeurs se rapportent à deux points symétriquement placés par rapport au milieu.

*Effet spécial de la surcharge.*—Les deux moitiés de la poutre étant dans des conditions identiques, il suffira d'étudier ce qui se passe dans l'une d'elles. Nous prendrons la travée de rive CD et la moitié adjacente de la travée centrale. Quel que soit, parmi les sept cas de surcharge énumérés tout à l'heure, celui que l'on ait à considérer, les formules (1), (2), (3) et (4) du n° 77 permettront aisément de trouver le moment fléchissant pour tout point de la demi-pièce dont il s'agit. Par exemple, dans le premier cas, où AB est seul surchargé, on ferait  $p_1 = p'$ ,  $p_2 = 0$ ,  $p_3 = 0$ ;  $n$  étant de plus égal à 1, les formules citées deviendraient

$$X_1 = -\frac{1}{15}p'a^2, \quad X_2 = \frac{1}{60}p'a^2,$$

$$X = \frac{1}{60}p'ax, \quad X = \frac{1}{60}p'a^2 - \frac{1}{12}p'ax_1.$$

Dans le second cas, la surcharge ne portant que sur BC, il faudrait faire  $p_1 = 0$ ,  $p_2 = p'$ ,  $p_3 = 0$ ,  $n = 1$  : on trouverait

$$X_1 = X_2 = -\frac{1}{20}p'a^2,$$

$$X = -\frac{1}{20}p'ax,$$

$$X = -\frac{1}{20}p'a^2 + \frac{1}{2}p'ax_1 - \frac{1}{2}p'x_1^2.$$

Le même procédé s'appliquerait à tous les cas, et l'on obtiendrait les quatorze expressions ci-dessous.

1°. Dans la travée de rive CD, pour la section faite à la distance  $x$  de l'appui extrême D :

$$\text{Cas n° 1... } X = \frac{1}{60} p' ax,$$

$$2... X = -\frac{1}{20} p' ax,$$

$$3... X = \frac{13}{30} p' ax - \frac{1}{2} p' x^2,$$

$$4... X = -\frac{1}{30} p' ax,$$

$$5... X = \frac{9}{20} p' ax - \frac{1}{2} p' x^2,$$

$$6... X = \frac{23}{60} p' ax - \frac{1}{2} p' x^2,$$

$$7... X = \frac{2}{5} p' ax - \frac{1}{2} p' x^2;$$

2°. Dans la travée centrale BC, pour la section faite à la distance  $x_1$  de l'appui intermédiaire C :

$$\text{Cas n° 1... } X = \frac{1}{60} p' a^2 - \frac{1}{12} p' ax_1,$$

$$2... X = -\frac{1}{20} p' a^2 + \frac{1}{2} p' ax_1 - \frac{1}{2} p' x_1^2,$$

$$3... X = -\frac{1}{15} p' a^2 + \frac{1}{12} p' ax_1,$$

$$4... X = -\frac{1}{30} p' a^2 + \frac{5}{12} p' ax_1 - \frac{1}{2} p' x_1^2,$$

$$5... X = -\frac{1}{20} p' a^2,$$

$$6... X = -\frac{7}{60} p' a^2 + \frac{7}{12} p' ax_1 - \frac{1}{2} p' x_1^2,$$

$$7... X = -\frac{1}{10} p' a^2 + \frac{1}{2} p' ax_1 - \frac{1}{2} p' x_1^2.$$

Imaginons que toutes ces expressions de  $X$  soient représentées par des courbes, comme nous l'avons fait tout à l'heure quand il s'agissait de la charge permanente, et cherchons quel

sera en chaque point de la fibre moyenne la limite inférieure algébrique des ordonnées de ces courbes, c'est-à-dire des sept valeurs que prend  $X$ ; nous en déduirons facilement, comme on le verra, la limite supérieure. En premier lieu, on constate que dans la travée extrême les lignes représentatives ont toutes une ordonnée nulle pour  $x = 0$ ; celle qui, aux environs du point D, donnera la limite inférieure cherchée, sera par conséquent la ligne droite 2 (\*), qui a le plus petit coefficient d'inclinaison sur l'axe des  $x$ , c'est-à-dire la plus petite valeur algébrique de  $\frac{dX}{dx}$ . D'un autre côté, aucune des lignes représentatives ne coupe la droite 2 dans l'étendue comprise entre  $x = 0$  et  $x = \frac{13}{15}a = 0,867a$ , comme on s'en assure au moyen des équations de ces lignes; donc, sur toute cette étendue, la droite 2 fournit toujours la limite inférieure du moment fléchissant. A l'abscisse  $x = \frac{13}{15}a$  répond l'intersection de la droite 2 avec la parabole 6, qui ne coupe plus aucune ligne jusqu'à  $x = a$ , et devient par conséquent la limite inférieure cherchée sur le restant de la travée CD.

Quant à ce qui concerne la travée du milieu, on reconnaît qu'en partant de l'appui C, c'est-à-dire en faisant  $x_1 = 0$  dans les expressions de  $X$ , la parabole 6 représente d'abord la limite inférieure, parce que c'est l'équation de cette parabole où le terme indépendant de  $x$ , est algébriquement le plus petit. Si l'on cherche l'intersection de cette ligne avec les autres, on voit que la rencontre la plus voisine a lieu avec la droite 3 et que l'abscisse correspondante est racine de l'équation

$$x_1^2 - ax_1 + \frac{1}{10}a^2 = 0;$$

d'où résulte

$$x_1 = \frac{1}{2}a \left( 1 - \sqrt{\frac{3}{5}} \right) = 0,113a.$$

---

(\*) Afin d'abréger, nous désignons une droite ou une parabole par le numéro d'ordre du cas correspondant.

A partir du point où l'abscisse  $x_1$  est  $0,113a$ , la droite 3 remplace la parabole 6; aucune intersection de la droite 3 avec les autres lignes représentatives n'a lieu avant qu'on ait  $x_1 = \frac{1}{5}a = 0,200a$ , valeur pour laquelle se produit la rencontre avec la droite 5. La droite 5 ne coupant plus les autres lignes jusqu'au milieu de la travée, c'est elle qui donne la limite inférieure des valeurs algébriques de  $X$  dans l'étendue comprise entre  $x_1 = \frac{1}{5}a$  et  $x_1 = \frac{1}{2}a$ . Ainsi qu'on l'a fait remarquer tout à l'heure, il est inutile d'aller plus loin.

On pourrait par un procédé tout à fait semblable indiquer les lignes qui représentent les limites supérieures; mais le raisonnement suivant réunit à l'avantage de la brièveté celui de mettre en évidence une propriété intéressante et utile de ces limites. Appelons *cas complémentaires* ceux dont les surcharges réunies formeraient la surcharge sur la longueur entière de la poutre: en se reportant à la définition des divers cas, on voit que le n° 1 est complémentaire du n° 6, le n° 2 du n° 5 et le n° 3 du n° 4, ce qu'on se rappellera aisément si l'on observe que la somme des numéros d'ordre de deux cas complémentaires est égale à 7. Or, en vertu des théorèmes démontrés au § III du chapitre deuxième, sur la superposition des effets des forces, il est clair que les deux valeurs de  $X$  en un certain point, pour un groupe quelconque de deux cas complémentaires, doivent former une somme algébrique constante et égale au moment fléchissant que la surcharge complète produirait au même point. Si donc la limite inférieure des sept valeurs de  $X$  répond à un certain cas, il est démontré par cela même que la limite supérieure répond au cas complémentaire. Donc enfin la limite supérieure sera représentée par les lignes suivantes:

1°. Dans la travée de rive CD,

Par la parabole 5, entre  $x = 0$  et  $x = \frac{13}{15}a$ ;

Par la droite 1, entre  $x = \frac{13}{15}a$  et  $x = a$ .

2°. Dans la demi-travée contiguë à la précédente,

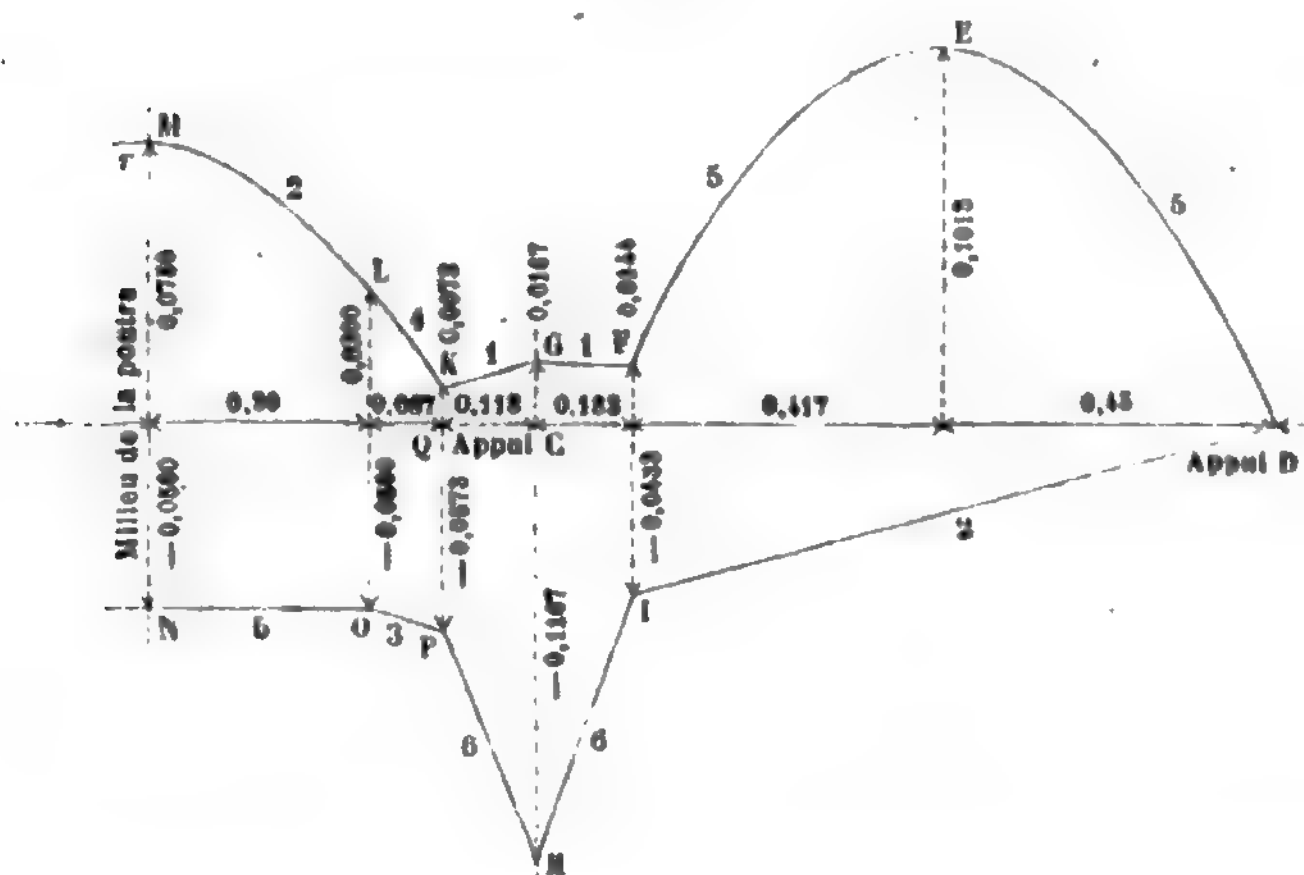
Par la droite 1, entre  $x_1 = 0$  et  $x_1 = 0,113a$ ;

Par la parabole 4, entre  $x_1 = 0,113a$  et  $x_1 = \frac{1}{5}a$ ;

Par la parabole 2, entre  $x_1 = \frac{1}{5}a$  et  $x_1 = \frac{1}{2}a$ .

Les résultats de cette discussion sont rendus sensibles par la figure ci-après. Les ordonnées, mesurées relativement à l'axe CD, et positivement dans le sens ascendant, représentent, à une certaine échelle, les moments limites dans la moitié de la poutre; en outre, conformément à ce qui a déjà été fait pour la *fig.* 38, les cotes des ordonnées indiquent leurs rapports à  $p'a^2$ , et les cotes des distances horizontales sont les rapports de ces distances à l'écartement  $a$  de deux appuis consécutifs.

Fig. 39.



Voici d'ailleurs un tableau des indications les plus utiles pour tracer les diverses lignes limitatives dans les deux travées



NUMÉROS des cas.	DISTANCE à l'extrémité D		VALEURS du moment fléchissant		OBSERVATIONS.
	des sommets des paraboles.	des points où l'ordonnée s'annule	au point C.	aux sommets des paraboles.	
5	$0,450 a$	$0$ $0,900 a$	$-0,0500 p' a^2$	$0,1013 p' a^2$	Travée de rive CD.
1	"	$0$	$0,0167 p' a^2$	"	
2	"	$0$	$-0,0500 p' a^2$	"	
6	$0,383 a$	$0$ $0,767 a$	$-0,1167 p' a^2$	$0,0735 p' a^2$	
1	"	$1,200 a$	$0,0167 p' a^2$	"	Moitié de la travée du mi- lieu contiguë à la précé- dente.
4	$1,417 a$	$1,090 a$ $1,744 a$	$-0,0333 p' a^2$	$0,0535 p' a^2$	
2	$1,500 a$	$1,113 a$ $1,887 a$	$-0,0500 p' a^2$	$0,0750 p' a^2$	
6	$1,583 a$	$1,256 a$ $1,910 a$	$-0,1167 p' a^2$	$0,0535 p' a^2$	
3	"	$1,800 a$	$-0,0667 p' a^2$	"	
5	"	"	$-0,0500 p' a^2$	"	

Pour compléter les renseignements contenus dans le tableau ci-dessus, voici encore le tableau des intersections mutuelles des lignes droites ou courbes dont se compose le contour limitatif dans la moitié de la poutre :

INDICATION des lignes qui se coupent.	DISTANCE horizontale du point d'intersection à l'extrémité D.	ORDONNÉE commune.	OBSERVATIONS.
5 et 1 2 et 6	$0,867 a$ Id.	$0,0144 p' a^2$ $-0,0433 p' a^2$	Travée de rive CD.
1 et 4 6 et 3 4 et 2 3 et 5	$1,113 a$ Id. $1,200 a$ Id.	$0,0073 p' a^2$ $-0,0573 p' a^2$ $0,0300 p' a^2$ $-0,0500 p' a^2$	Moitié de la travée du milieu contiguë à la précédente.

Ainsi donc nous sommes actuellement en mesure : 1° de donner la valeur du moment fléchissant dans chaque section lorsque la charge permanente agit seule ; 2° d'indiquer entre quelles limites extrêmes varie ce moment dans une même section, lorsqu'on prend successivement les sept modes de surcharge et qu'on suppose la charge permanente nulle. Mais afin d'être dans les conditions réellement pratiques, il faut supposer qu'il y a tout à la fois charge permanente et surcharge, et déterminer, dans cette hypothèse, les limites supérieure et inférieure du moment fléchissant pour une section quelconque. Or le problème ainsi posé se résout sans peine au moyen des résultats déjà obtenus.

*Effet de la charge permanente et de la surcharge agissant simultanément.* — S'il y a tout à la fois une charge permanente et une surcharge dont les intensités par mètre courant sont  $p$  et  $p'$ , on sait que le moment fléchissant, dans une section quelconque, est la somme algébrique des deux valeurs particulières obtenues en faisant successivement  $p = 0$ ,  $p' = 0$ . Donc les sept valeurs de  $X$  qui se produiront dans cette section seront celles qu'on vient d'étudier à l'instant, augmentées algébriquement d'une même quantité, et, par suite, elles ont entre elles les mêmes différences que si  $p$  n'existait pas ; donc la plus grande et la plus petite (en considérant les valeurs algébriques) répondront aux deux mêmes distributions de surcharge. En conséquence, pour construire les nouvelles lignes limitatives devant remplacer celles de la *fig. 39*, il suffira de reporter sur le même axe des abscisses : 1° les ordonnées des courbes et droites de la *fig. 39* ; 2° les ordonnées des paraboles de la *fig. 38*, et de les cumuler algébriquement en chaque point. Il est bien entendu que les deux *fig. 38* et *39* sont censées construites à la même échelle, c'est-à-dire qu'une même longueur représente, dans ces deux figures, l'ouverture  $a$  des travées, et qu'une même ligne verticale représente aussi un moment de même intensité.

Afin d'effectuer plus commodément le cumul dont il s'agit, on tracera sur un même axe (*fig. 40*), d'abord le contour mixtiligne DEFGKLMNOPHIID de la *fig. 39*, et, en second lieu, la courbe des moments dus à la charge permanente (*fig. 38*), en ayant



(en valeur absolue) des moments fléchissants qui peuvent se produire en ce point, sous les différentes surcharges.  $X'$  ne sera autre chose que la plus grande des deux limites qui viennent d'être indiquées, abstraction faite du signe. La figure précédente la fait connaître encore immédiatement, au moins pour toutes les portions de la pièce dans lesquelles la courbe  $DRST$  ne passe pas entre les contours mixtilignes  $DEFGKLM$  et  $DIHPON$ ; ainsi en  $U$ , il est clair que  $X'$  a pour valeur  $\overline{uU''}$ ; de même en  $C$  on a  $X' = \overline{SH}$ . Il ne pourrait y avoir, à priori, de l'incertitude que pour les portions où  $DRST$  passe entre les deux contours mixtilignes. Mais on la fait cesser en remarquant que les deux limites deviennent égales en valeur absolue, précisément aux points où  $DRST$  coupe l'axe des abscisses. En effet les lignes  $DEFGKLM$  et  $DIHPON$  se rapportent à des cas complémentaires; il s'ensuit que la somme algébrique des ordonnées en un point arbitraire  $U$ , c'est-à-dire  $\overline{UU''} - \overline{UU'}$ , serait l'ordonnée de la courbe des moments dans le cas d'une surcharge complète. Or cette courbe ne doit différer de  $DRST$  que par l'échelle et le renversement des ordonnées, puisqu'avec la surcharge complète aussi bien qu'avec le poids permanent, on aurait toujours un poids uniformément réparti sur la longueur entière de la pièce : donc elle doit couper l'axe des abscisses aux mêmes points  $\beta$  et  $\gamma$ ; donc enfin on a

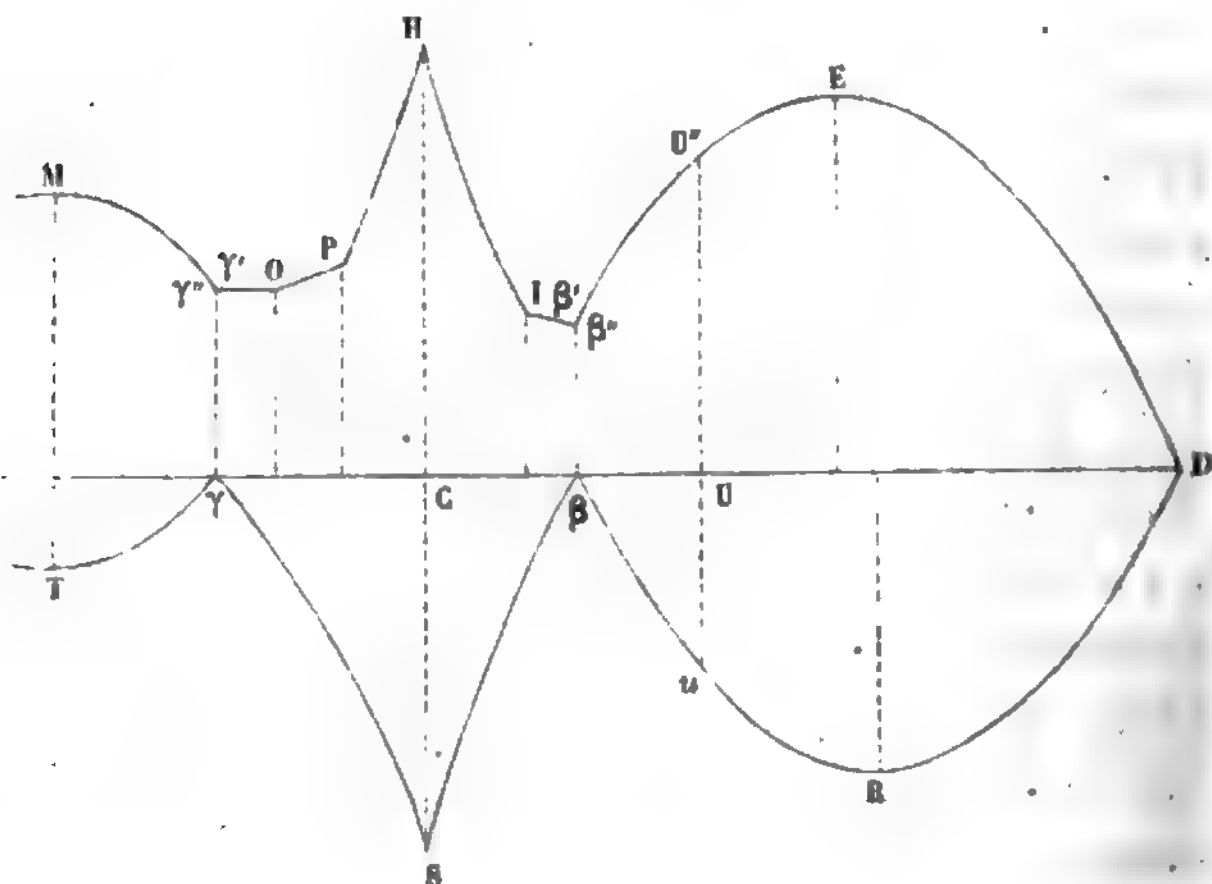
$$\overline{\beta\beta''} - \overline{\beta\beta'} = 0 \quad \text{et} \quad \overline{\gamma\gamma''} - \overline{\gamma\gamma'} = 0.$$

Cela étant, on voit que sur l'étendue  $D\beta$  la courbe  $DR\beta$  sera plus loin de  $DE\beta''$  que de  $D\beta'$ , et par conséquent  $X'$  est représenté par l'écart vertical entre  $DR\beta$  et  $DE\beta''$ ; sur la portion  $\beta\gamma$ , c'est le contour inférieur qui devient le plus éloigné de  $\beta S\gamma$ , et l'on doit mesurer l'écart vertical entre  $\beta S\gamma$  et  $\beta' IHPO\gamma'$ ; enfin à partir de  $\gamma$  et jusqu'au milieu de la poutre, on doit reprendre le contour supérieur  $\gamma'' M$ .

Comme le montre cette discussion, les portions  $\beta'' FGKL\gamma''$ ,  $D\beta'$ ,  $\gamma' N$  du contour limitatif (*fig. 40*) deviennent inutiles pour la recherche dont nous nous occupons : on peut donc les supprimer lorsqu'on ne se propose pas d'autre but que de trouver  $X'$ , ce qui permet de simplifier un peu la construction de

la figure. On remplacera la partie supprimée  $\beta''FGKL\gamma''$  par la partie  $\beta'IIIPO\gamma'$  qu'on reportera au-dessus de l'axe des abscisses (*fig. 41*); ensuite on reproduira la ligne parabolique

Fig. 41.



DRST, telle qu'elle existe dans la *fig. 40*, sauf que les branches  $\beta S$  et  $\gamma S$  seront reportées en dessous de l'axe, du côté des ordonnées négatives. Avec cette disposition, il est clair que la limite supérieure  $X'$  sera toujours l'écart vertical entre les deux contours tracés au-dessus et au-dessous de l'axe; en U par exemple, la distance  $\overline{uU''}$  représenterait cette limite supérieure.

Imaginons que la longueur  $\overline{DU}$  (*fig. 41*) exprime, non pas la longueur  $x$ , mais le rapport  $\frac{x}{a}$ , et que les ordonnées, au lieu de représenter les moments fléchissants, représentent leurs rapports à  $pa^3$  ou à  $p'a^3$ , suivant qu'il s'agit du contour inférieur ou du supérieur. En réalité la *fig. 41* a été ainsi construite, avec les échelles de  $0^m,05$  pour  $\frac{x}{a} = 1$  et  $0^m,0025$  pour le moment  $0,01pa^3$  ou  $0,01p'a^3$ . L'avantage qui en résulte, c'est que la figure peut rester toujours la même quelles que soient les quantités  $a, p, p'$ . Dans la section répondant au

point quelconque U,  $X'$  aurait pour valeur

$$X' = pa^3 \cdot \overline{Uu} + p'a^3 \cdot \overline{UU''};$$

la distance de la section à l'extrémité D serait  $a \cdot \overline{D\bar{U}}$ . Voici un exemple numérique : on donne  $a = 50^m$ ,  $p = 3000^{kl}$ ,  $p' = 4000^{kl}$ , et on demande la limite supérieure  $X'$  des moments fléchissants dans la section faite à  $31^m,80$  de l'extrémité.

On a ici  $\frac{x}{a} = \frac{31^m,80}{50^m} = 0,636$ , ce qui, à l'échelle convenue,

donne la longueur  $\overline{D\bar{U}} = 0^m,0318$ . Le point U de la figure se trouvant ainsi déterminé, on mesurera les longueurs  $\overline{Uu}$  et  $\overline{UU''}$ , qui sont respectivement  $0^m,013$  et  $0^m,021$ ; on écrira donc

$$X' = 0,052 \cdot pa^3 + 0,084 \cdot p'a^3 = 123000,$$

avec l'approximation que comportent, bien entendu, les constructions graphiques à petite échelle.

Enfin, comme on connaît les équations des différentes courbes ou lignes droites qui composent la *fig. 41*, on peut en déduire les expressions analytiques de  $X'$ . On obtient ainsi les résultats suivants :

1°. Travée de rive :

$$\text{Entre } x = 0 \text{ et } x = \frac{4}{5}a = 0,800a,$$

$$X' = \frac{1}{20} (8p + 9p') ax - \frac{1}{2} (p + p') x^2;$$

$$\text{Entre } x = \frac{4}{5}a \text{ et } x = \frac{13}{15}a = 0,867a,$$

$$X' = \frac{1}{20} (-8p + p') ax + \frac{1}{2} px^2;$$

$$\text{Entre } x = \frac{13}{15}a \text{ et } x = a,$$

$$X' = -\frac{1}{60} (24p + 23p') ax + \frac{1}{2} (p + p') x^2.$$



2°. Travée du milieu :

Entre  $x_1 = 0$  et  $x_1 = 0,113a$ ,

$$X' = \frac{1}{60} (6p + 7p') (a^2 - 5ax_1) + \frac{1}{2} (p + p') x_1^2;$$

Entre  $x_1 = 0,113a$  et  $x_1 = \frac{1}{5}a = 0,200a$ ,

$$X' = \frac{1}{30} (3p + 2p') a^2 - \frac{1}{12} (6p + p') ax_1 + \frac{1}{2} px_1^2;$$

Entre  $x_1 = \frac{1}{5}a$  et  $x_1 = 0,276a$ ,

$$X' = \frac{1}{20} (2p + p') a^2 - \frac{1}{2} p (ax_1 - x_1^2);$$

Entre  $x_1 = 0,276a$  et  $x_1 = \frac{1}{2}a = 0,500a$ ,

$$X' = -\frac{1}{20} (2p + p') a^2 + \frac{1}{2} (p + p') (ax_1 - x_1^2).$$

Ainsi se trouve complètement résolu le problème qui faisait l'objet du n° 79. Mais il faut encore, pour être parfaitement en mesure de vérifier la stabilité, connaître la limite extrême, en valeur absolue, des efforts tranchants qui se produisent dans une section quelconque. C'est cette limite que nous allons maintenant rechercher.

**80. Limite de l'effort tranchant dans chaque section d'une poutre à trois travées égales.** — Quand on veut, pour plus de rigueur, tenir compte de l'effort tranchant (n° 19), il faut en connaître la valeur limite en tout point de la pièce, sous l'action de la charge permanente et de diverses surcharges. Nous procéderons dans la solution de ce problème comme au n° 79, en étudiant d'abord l'effet isolé de la charge permanente, puis celui des surcharges seules, et enfin celui qui résulte de leur réunion.

On a démontré (n° 76) la relation qui existe entre l'effort tranchant  $P$  et le moment fléchissant  $X$  dans une même sec-

tion, quand la poutre n'est soumise qu'à des forces extérieures transversales.  $X$  étant considéré comme une fonction de la distance  $x$  de la section à une origine quelconque, on a en valeur absolue

$$P = \frac{dX}{dx},$$

de sorte qu'une dérivation conduit à l'expression de  $P$ , quand on connaît celle de  $X$ . Or c'est ce qui arrive ici, et nous pouvons dans un cas quelconque écrire de suite la valeur de  $P$ , puisque  $X$  a été donné au numéro précédent.

Si d'abord on ne considère que la charge permanente, on aura, en conservant les notations du n° 79,

$$\text{Dans la travée de rive..... } P = \frac{3}{5} pa - px;$$

$$\text{Dans la travée du milieu..... } P = \frac{1}{2} pa - px_1.$$

Ces expressions seraient représentées par les ordonnées de deux droites parallèles; la première aurait pour ordonnées,  $\frac{3}{5} pa$  au point extrême D (*fig. 41*),  $-\frac{3}{5} pa$  au point d'appui C; la seconde,  $\frac{1}{2} pa$  au même point C, et 0 au milieu de la pièce.

Il est inutile d'aller plus loin, comme on l'a déjà dit.

Si la surcharge agit seule, en reprenant les sept cas particuliers définis au n° 79 on aura les expressions ci-après :

1°. Dans la travée de rive CD, les distances  $x$  étant comptées à partir de l'appui extrême :

$$\text{Cas n° 1} \dots P = \frac{1}{60} p' a;$$

$$2 \dots P = -\frac{1}{20} p' a;$$

$$3 \dots P = \frac{13}{30} p' a - p' x;$$

$$4 \dots P = -\frac{1}{30} p' a;$$

$$5 \dots P = \frac{9}{20} p' a - p' x;$$

$$6 \dots P = \frac{23}{60} p' a - p' x;$$

$$7 \dots P = \frac{2}{5} p' a - p' x.$$

2°. Dans la travée du milieu, les distances  $x$ , se comptant à partir de l'appui intermédiaire :

$$\text{Cas n° 1} \dots P = -\frac{1}{12} p' a;$$

$$2 \dots P = \frac{1}{2} p' a - p' x_1;$$

$$3 \dots P = \frac{1}{12} p' a;$$

$$4 \dots P = \frac{5}{12} p' a - p' x_1;$$

$$5 \dots P = 0;$$

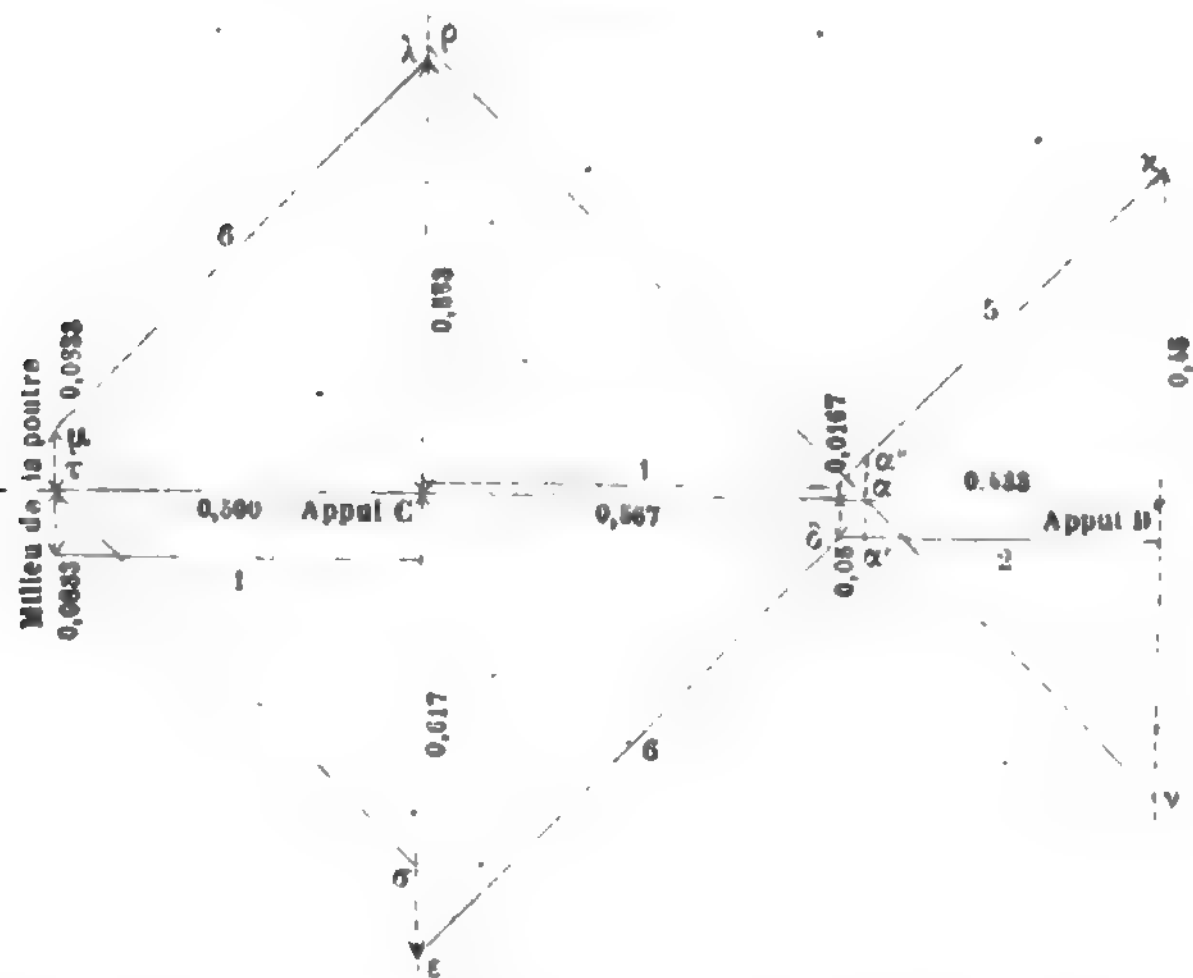
$$6 \dots P = \frac{7}{12} p' a - p' x_1;$$

$$7 \dots P = \frac{1}{2} p' a - p' x_1.$$

Dans la travée extrême, le cinquième cas donne la plus grande limite de  $P$  et le deuxième cas la plus petite, entre  $x = 0$  et  $x = \frac{13}{30} a = 0,433 a$ ; entre cette valeur de  $x$  et  $x = a$ ,

il faut prendre les expressions se rapportant au premier et au sixième cas. Dans la travée intermédiaire, depuis son commencement jusqu'au milieu, c'est le sixième cas qui fournit la limite supérieure de P et le premier la limite inférieure. La figure ci-dessous, dans laquelle on a tracé les lignes représen-

**Fig. 42.**



tatives des limites de  $P$ , rend ces résultats sensibles pour les yeux. Les cotes des lignes horizontales ont la même signification que dans les *fig.* 38 à 41; les cotes des lignes verticales marquent les rapports des efforts tranchants à  $p'a$ .

Afin d'étudier le cas où la charge permanente et les surcharges se trouvent réunies, on a également tracé les deux droites ponctuées qui représentent les valeurs de  $P$  dues à la charge permanente seule, en changeant le sens positif des ordonnées; la *fig. 42* est donc l'analogue de la *fig. 40* et servirait à la recherche du plus grand effort tranchant dans une section, comme la *fig. 40* servait à la recherche du plus grand moment fléchissant.

Les calculs pratiques sur la stabilité de la poutre n'exigent jamais que l'on connaisse les deux limites entre lesquelles varie l'effort tranchant  $P$  dans une section déterminée : il suffit d'avoir la plus grande des deux, en valeur absolue. Nous



1°. Travée de rive :

Entre  $x = 0$  et  $x = \frac{2}{5}a = 0,400a$ ,

$$P' = \frac{1}{20} (8p + 9p') a - (p + p') x;$$

Entre  $x = \frac{2}{5}a$  et  $x = \frac{13}{30}a = 0,433a$ ,

$$P' = \frac{1}{20} (-8p + p') a + px;$$

Entre  $x = \frac{13}{30}a$  et  $x = a$ ,

$$P' = -\frac{1}{60} (24p + 23p') a + (p + p') x.$$

2°. Travée du milieu .

Dans toute la demi-travée,

$$P' = \frac{1}{12} (6p + 7p') a - (p + p') x.$$

81. *Formules pour le calcul des limites X' et P' dans une poutre à trois travées symétriques, mais non égales.* — La discussion présentée aux n° 79 et 80 montre suffisamment ce qu'il y aurait à faire si l'on avait besoin de chercher les limites des moments fléchissants et des efforts tranchants dans une poutre à trois travées inégales, ou dans une poutre à un nombre quelconque de travées. Nous ne croyons pas devoir en donner d'exemple; seulement nous indiquerons quelques formules toutes faites pour divers cas particuliers, et nous prendrons d'abord celui d'une poutre qui serait composée: 1° de deux travées de rive égales entre elles; 2° d'une travée centrale ayant une ouverture plus grande dans le rapport de 5 à 4. Il s'agit de trouver, pour une section quelconque, la plus grande limite X' du moment fléchissant pris en valeur absolue, et la limite analogue P' de l'effort tranchant, quand la poutre sera soumise à la charge permanente et aux surcharges définies plus haut (n° 79).

Si l'on nomme :

$a$  l'ouverture d'une travée de rive;

$b = \frac{5}{4}a$  celle de la travée centrale;

$x$  la distance entre une section faite dans une des travées de rive et l'extrémité (de la pièce) la plus voisine;



$x_1$ , la distance entre une section de la travée centrale et l'appui le plus voisin ;

$p$  et  $p'$  les poids par unité de longueur, de la charge permanente et de la surcharge ;

On trouvera les résultats suivants :

1°. Moments fléchissants limites dans une travée de rive :

Entre  $x = 0$  et  $x = 0,7432 a$ ,

$$X' = (0,3716 p + 0,4565 p') ax - \frac{1}{2} (p + p') x^2 ;$$

Entre  $x = 0,7432 a$  et  $x = 0,8796 a$ ,

$$X' = (-0,3716 p + 0,0849 p') ax + \frac{1}{2} p x^2 ;$$

Entre  $x = 0,8796 a$  et  $x = a$ ,

$$X' = - (0,3716 p + 0,3549 p') ax + \frac{1}{2} (p + p') x^2 .$$

2°. Moments fléchissants limites dans la travée centrale :

Entre  $x_1 = 0$  et  $x_1 = 0,1241 b$ ,

$$X' = (0,08217 p + 0,09288 p') b^2 - \frac{1}{2} (p + 1,09846 p') b x_1 + \frac{1}{2} (p + p') x_1^2 ;$$

Entre  $x_1 = 0,1241 b$  et  $x_1 = 0,2073 b$ ,

$$X' = (0,08217 p + 0,03853 p') b^2 - \frac{1}{2} (p + 0,09846 p') b x_1 + \frac{1}{2} p x_1^2 ;$$

Entre  $x_1 = 0,2073 b$  et  $x_1 = 0,2174 b$ ,

$$X' = - (0,08217 p + 0,04365 p') b^2 + \frac{1}{2} (p + 0,90154 p') b x_1 - \frac{1}{2} (p + p') x_1^2 ;$$

Entre  $x_1 = 0,2174 b$  et  $x_1 = 0,5000 b$ ,

$$X' = - (0,08217 p + 0,05435 p') b^2 + \frac{1}{2} (p + p') (b x_1 - x_1^2) .$$

3°. Efforts tranchants limites dans une travée de rive :

Entre  $x = 0$  et  $x = 0,3716 a$ ,

$$P' = (0,3716 p + 0,4565 p') a - (p + p') x ;$$

Entre  $x = 0,3716 a$  et  $x = 0,4398 a$ ,

$$P' = (-0,3716 p + 0,0849 p') a + p x ;$$

Entre  $x = 0,4398 a$  et  $x = a$ ,

$$P' = - (0,3716 p + 0,3549 p') a + (p + p') x .$$

4°. Efforts tranchants limites dans la travée centrale :

Entre  $x_1 = 0$  et  $x_1 = 0,5000 b$ ,

$$P' = \frac{1}{2}(p + 1,0985 p')b - (p + p')x_1.$$

Lorsqu'on veut construire les contours limitatifs analogues à ceux qu'on a tracés précédemment, pour le cas particulier des travées égales (*fig.* 40 et 42), on trouve que les paraboles et lignes droites de ces nouveaux contours se rapportent encore aux mêmes distributions de la surcharge. Par exemple, si les cas de surcharge sont toujours rangés par ordre comme au n° 79, dans le voisinage d'une extrémité la parabole 5 et la droite 2 donnent les limites supérieure et inférieure du moment fléchissant, sous la seule action de la surcharge; près d'un appui intermédiaire, la droite 1 succède à la parabole 5, et la parabole 6 à la droite 2; et ainsi de suite.

82. *Formules pour le calcul des limites X' et P' dans une poutre à deux ou à quatre travées égales.* — En conservant aux lettres  $a$ ,  $p$ ,  $p'$ ,  $x$ ,  $x_1$  la signification qu'elles avaient au n° 79, nous trouvons les résultats ci-après.

1°. Moments fléchissants limites dans une poutre à deux travées égales :

Entre  $x = 0$  et  $x = \frac{3}{4}a = 0,750 a$ ,

$$X' = \frac{1}{16}(6p + 7p')ax - \frac{1}{2}(p + p')x^2;$$

Entre  $x = \frac{3}{4}a$  et  $x = \frac{7}{8}a = 0,875 a$ ,

$$X' = \frac{1}{16}(-6p + p')ax + \frac{1}{2}p x^2;$$

Entre  $x = \frac{7}{8}a$  et  $x = a$ ,

$$X' = \frac{1}{8}(p + p')(4x^2 - 3ax).$$

2°. Efforts tranchants limites dans une poutre à deux travées égales :

Entre  $x = 0$  et  $x = \frac{3}{8}a = 0,375 a$ ,

$$P' = \frac{1}{16}(6p + 7p')a - (p + p')x;$$

Entre  $x = \frac{3}{8}a$  et  $x = \frac{7}{16}a = 0,4375 a$ ,

$$P' = \frac{1}{16}(-6p + p')a + p x;$$

Entre  $x = \frac{7}{16}a$  et  $x = a$ ,

$$P' = \frac{1}{8}(p + p')(8x - 3a).$$

3°. Moments fléchissants limites dans une travée de rive d'une poutre à quatre travées égales:

Entre  $x = 0$  et  $x = \frac{11}{14}a = 0,786a$ ,

$$X' = \frac{1}{56}(22p + 25p')ax - \frac{1}{2}(p + p')x^2;$$

Entre  $x = \frac{11}{14}a$  et  $x = \frac{97}{112}a = 0,866a$ ,

$$X' = \frac{1}{56}(-22p + 3p')ax + \frac{1}{2}px^2;$$

Entre  $x = \frac{97}{112}a$  et  $x = a$ ,

$$X' = -\frac{1}{224}(88p + 85p')ax^2 + \frac{1}{2}(p + p')x^2.$$

4°. Moments fléchissants limites dans une travée intermédiaire de la même poutre:

Entre  $x_1 = 0$  et  $x_1 = 0,112a$ ,

$$X' = \frac{3}{224}(8p + 9p')(a^2 - 5ax_1) + \frac{1}{2}(p + p')x_1^2;$$

Entre  $x_1 = 0,112a$  et  $x_1 = \frac{1}{5}a = 0,200a$ ,

$$X' = \frac{1}{28}(3p + 2p')a^2 - \frac{3}{28}(5p + p')ax_1 + \frac{1}{2}px_1^2;$$

Entre  $x_1 = \frac{1}{5}a$  et  $x_1 = 0,266a$ ,

$$X' = \frac{3}{56}(2p + p')a^2 - \frac{1}{56}(30p + p')ax_1 + \frac{1}{2}px_1^2;$$

Entre  $x_1 = 0,266a$  et  $x_1 = \frac{15}{19}a = 0,789a$ ,

$$X' = -\frac{3}{56}(2p + p')a^2 + \frac{1}{56}(30p + 29p')ax_1 - \frac{1}{2}(p + p')x_1^2;$$

Entre  $x_1 = \frac{15}{19}a$  et  $x_1 = 0,805a$ ,

$$X' = -\frac{3}{224}(8p + 9p')(a^2 - 5ax_1) - \frac{1}{2}(p + p')x_1^2;$$

Entre  $x_1 = 0,805a$  et  $x_1 = 0,879a$ ,

$$X' = \frac{3}{224}(8p - p')(a^2 - 5ax_1) + \frac{1}{2}px_1^2;$$

Entre  $x_1 = 0,879a$  et  $x = a$ ,

$$X' = \frac{1}{28}(3p + p')a^2 - \frac{3}{28}(5p + 4p')ax_1 + \frac{1}{2}(p + p')x_1^2.$$

5°. Efforts tranchants limites dans une travée de rive de la même poutre :

Entre  $x = 0$  et  $x = \frac{11}{28}a = 0,393a$ ,

$$P' = \frac{1}{56}(22p + 25p')a - (p + p')x;$$

Entre  $x = \frac{11}{28}a$  et  $x = \frac{97}{224}a = 0,433a$ ,

$$P' = \frac{1}{56}(-22p + 3p')a + px;$$

Entre  $x = \frac{97}{224}a$  et  $x = a$ ,

$$P' = -\frac{1}{224}(88p + 85p')a + (p + p')x.$$

6°. Efforts tranchants limites dans une travée intermédiaire de la même poutre :

Entre  $x_1 = 0$  et  $x_1 = \frac{111}{224}a = 0,496a$ ,

$$P' = \frac{15}{224}(8p + 9p')a - (p + p')x_1;$$

Entre  $x_1 = \frac{111}{224}a$  et  $x_1 = \frac{15}{28}a = 0,536a$ ,

$$P' = \frac{3}{28}(5p + p')a - px_1;$$

Entre  $x_1 = \frac{15}{28}a$  et  $x_1 = a$ ,

$$P' = -\frac{3}{28}(5p + 4p')a + (p + p')x_1.$$

La construction graphique de toutes ces expressions et leur représentation par des figures analogues aux *fig. 41* et *43* vient confirmer ce qui a été dit à la fin du n° 78, en montrant que dans des poutres à trois et à quatre travées égales les travées de rive sont éprouvées sensiblement d'une manière identique par la charge permanente jointe aux diverses surcharges, et que la même propriété a lieu pour les travées intermédiaires.

83. *Du rapport le plus convenable entre l'ouverture des travées de rive et celle de la travée centrale, dans une poutre reposant sur quatre appuis.*

— Considérons une poutre supportée par quatre appuis symétriquement disposés par rapport à son milieu : nous aurons ainsi deux travées extrêmes avec une même ouverture  $a$ , et une travée centrale d'ouverture  $b$ . La poutre est soumise à la charge permanente et aux surcharges définies plus haut (n° 79); sa longueur totale  $2a + b$  étant de plus supposée constante, il s'agit de déterminer la valeur la plus convenable du rapport  $\frac{b}{a}$ .

Or on peut pour cela s'imposer diverses conditions à remplir. D'après ce qu'on a dit au n° 19 sur le peu d'influence qu'ont en général les efforts tranchants, on peut d'abord demander que le maximum de tension ou pression dans le sens longitudinal soit le plus petit possible, toutes choses égales d'ailleurs. Ce maximum est proportionnel à celui du moment fléchissant (n° 19), et par conséquent c'est cette dernière quantité qu'il faudrait diminuer autant que possible par le choix du rapport  $\frac{b}{a}$ , que nous nomme-

rons  $n$ . Déterminons donc le plus grand moment fléchissant produit par la charge permanente ou les surcharges, et voyons comment il varie avec  $n$ .

Si l'on a seulement la charge uniforme de  $p$  kilogrammes par unité de longueur sur toute la poutre, le moment  $X$  en un point quelconque se calcule par les formules du n° 77, en y faisant  $p = p_1 = p_2 = p_3$ , ce qui donne successivement

$$(1) \quad X_1 = X_2 = -\frac{1}{4} pa^2 \frac{n^3 + 1}{2 + 3n},$$

$$(2) \quad X = \frac{1}{4} pa \left( \frac{3 + 6n - n^3}{2 + 3n} \right) x - \frac{1}{2} px^2,$$

dans une travée de rive;

$$(3) \quad X = -\frac{1}{4} \frac{n^3 + 1}{2 + 3n} pa^2 + \frac{1}{2} pna x_1 - \frac{1}{2} px_1^2,$$

dans la travée centrale.

L'expression (2) a pour dérivée

$$\frac{dX}{dx} = \frac{1}{4} pa \frac{3 + 6n - n^3}{2 + 3n} - px,$$

quantité positive, nulle ou négative, suivant que l'on prend  $x$  inférieur, égal ou supérieur à la valeur particulière

$$x' = \frac{1}{4} a \frac{3 + 6n - n^3}{2 + 3n};$$

donc le moment  $X$  dans la travée de rive, nul d'abord pour  $x = 0$ , va en croissant jusqu'à un maximum positif  $X'$  répondant à  $x = x'$  et dont la valeur est

$$(4) \quad X' = \frac{1}{4} pa \left( \frac{3 + 6n - n^3}{2 + 3n} \right) x' - \frac{1}{2} px'^2 = \frac{1}{32} pa^2 \left( \frac{3 + 6n - n^3}{2 + 3n} \right)^2;$$

puis il décroît algébriquement jusqu'à  $x = a$ , où il devient négatif et égal à  $X_2$ ; ses valeurs extrêmes, abstraction faite du signe, dans l'étendue de la travée, sont donc  $X'$  et  $X_2$ . Quant à l'expression (3), on peut lui donner la forme

$$\begin{aligned} X &= -\frac{1}{4} \frac{n^3 + 1}{2 + 3n} pa^2 + \frac{1}{8} pn^2 a^2 - \frac{1}{2} p \left( x_1 - \frac{1}{2} na \right)^2 \\ &= \frac{1}{8} pa^2 \left( \frac{n^3 + 2n^2 - 2}{2 + 3n} \right) - \frac{1}{2} p \left( x_1 - \frac{1}{2} na \right)^2, \end{aligned}$$

sous laquelle on reconnaît qu'elle croît constamment à partir de  $x_1 = 0$ , jusqu'à  $x_1 = \frac{1}{2} na$ ; ses valeurs extrêmes sont donc, dans la demi-travée,  $X_1$  et

$$(5) \quad X'' = \frac{1}{8} pa^2 \frac{n^3 + 2n^2 - 2}{2 + 3n},$$

valeur répondant à  $x_1 = \frac{1}{2} na$ , ou au milieu de la poutre. Ainsi le maximum absolu du moment fléchissant dans la demi-poutre (et par conséquent dans la poutre entière, puisqu'il y a symétrie), sera l'une des trois valeurs  $X'$ ,  $X_2$  et  $X''$ , toujours prises avec le signe +. Afin d'exprimer ces moments en fonction de la seule variable  $n$ , soit  $2L$  la longueur totale de la pièce, on aura

$$2L = 2a + na = a(2 + n),$$

d'où résulte

$$a = \frac{2L}{2 + n}.$$

Substituant cette valeur dans les formules (1), (4) et (5), elles deviendront

$$(6) \quad X_2 = -pL^2 \frac{n^3 + 1}{(2 + n)^2 (2 + 3n)},$$

$$(7) \quad X' = \frac{1}{8} pL^2 \left[ \frac{3 + 6n - n^3}{(2 + n)(2 + 3n)} \right]^2,$$

$$(8) \quad X'' = \frac{1}{8} pL^2 \frac{n^3 + 2n^2 - 2}{(2 + n)^2 (2 + 3n)}.$$



Voici le tableau des résultats que donnent diverses substitutions de nombres à la place de  $n$  dans ces dernières formules.

VALEURS DE $n$ .	$-\frac{X_2}{pL^3}$	$\frac{X'}{pL^3}$	$\frac{X''}{pL^3}$	MAXIMUM absolu de $\frac{X}{pL^3}$
0,70	0,04493	0,04796	-0,01133	0,04796
0,80	0,04383	0,04374	-0,00301	0,04383
0,90	0,04374	0,03959	0,00441	0,04374
1,00	0,04444	0,03556	0,01111	0,04444
1,10	0,04577	0,03166	0,01719	0,04577
1,20	0,04757	0,02794	0,02274	0,04757
1,25	0,04862	0,02615	0,02534	0,04862
1,30	0,04976	0,02440	0,02784	0,04976

On voit par ce tableau : 1° que  $X''$  est toujours inférieur en valeur absolue aux autres moments  $X'$  et  $X_2$  tant que  $n$  varie de 0,7 à 1,3 ; 2° que  $X'$  est supérieur à  $-X_2$  seulement pour  $n < 0,8$  ; 3° que  $-X_2$  décroissant encore au delà de  $n = 0,8$ , la valeur de  $n$  à laquelle répondra le plus petit maximum absolu du moment fléchissant sera celle qui rendra  $-X_2$  minimum.

Pour la trouver, on posera l'équation

$$\frac{dX_2}{dn} = 0,$$

ou bien

$$3n^2(2+n)^2(2+3n) - (n^2+1)[3(2+n)^2 + 2(2+n)(2+3n)] = 0,$$

ou encore, en supprimant le facteur  $2+n$  et réduisant,

$$14n^3 + 12n^2 - 9n - 10 = 0.$$

Cette équation se résout par tâtonnement ; elle n'a qu'une racine positive

$$n = 0,859,$$

qui est le nombre cherché.

Ainsi donc, si la poutre ne devait jamais être soumise qu'à une charge uniforme sur toute sa longueur, et si l'on avait seulement en vue de diminuer autant que possible la plus grande tension ou pression longitudinale de la matière, il faudrait donner moins d'ouverture à la travée centrale qu'aux travées de rive et prendre pour le rapport  $n$  la valeur 0,859. Comparativement à ce qui a lieu pour  $n = 1$ , l'avantage ne serait pas d'ailleurs bien grand, car le maximum absolu du moment  $X$ , égal

à  $0,04444pL^2$  pour  $n=1$ , s'abaisserait seulement à  $0,04367pL^2$  pour  $n=0,859$ ; on aurait donc une diminution relative de 1,75 pour 100 environ.

La considération des surcharges peut conduire à modifier ce rapport de 0,859. Supposons une surcharge  $p'$  par unité de longueur, agissant, abstraction faite de la charge permanente, sur deux ou trois travées, suivant l'un quelconque des sept modes indiqués au n° 79. Les formules du n° 77 permettent encore d'avoir immédiatement le moment fléchissant  $X_1$  au point d'appui C (fig. 37). Voici les résultats qu'on trouve pour les sept cas de surcharge :

$$\text{Cas n° 1... } X_1 = \frac{1}{4} p' a^2 \frac{n}{(2+n)(2+3n)},$$

$$2... X_1 = -\frac{1}{4} p' a^2 \frac{n^3}{2+3n},$$

$$3... X_1 = -\frac{1}{2} p' a^2 \frac{1+n}{(2+n)(2+3n)},$$

$$4... X_1 = -\frac{1}{4} p' a^2 \frac{n(n^3+2n^2-1)}{(2+n)(2+3n)},$$

$$5... X_1 = -\frac{1}{4} p' a^2 \frac{1}{2+3n},$$

$$6... X_1 = -\frac{1}{4} p' a^2 \frac{n^4+2n^3+2n+2}{(2+n)(2+3n)},$$

$$7... X_1 = -\frac{1}{4} p' a^2 \frac{n^3+1}{2+3n}.$$

On obtient de la même manière :

Dans les cas n° 2, 5, 7,

$$X_1 - X_2 = 0;$$

Dans les cas n° 3 et 6,

$$X_1 - X_2 = \frac{1}{4} p' a^2 \frac{1}{2+n};$$

Dans les cas n° 1 et 4,

$$X_1 - X_2 = -\frac{1}{4} p' a^2 \frac{1}{2+n}.$$

On aurait ainsi les éléments nécessaires pour appliquer les formules (3) et (4) du n° 77 et connaître les moments fléchissants en un point quelconque des travées BC ou CD, ce qui suffit, puisque AB est dans les mêmes conditions que CD.

Si nous imaginons que les expressions de ces divers moments sont re-

présentées par des lignes, comme on l'a vu au n° 79, on aura dans chaque travée trois lignes droites et quatre paraboles; ces dernières auront leur axe vertical et un même paramètre, car leur équation pourrait toujours se ramener à  $y = \frac{1}{2} p' x^2$  par une transformation de coordonnées. Les ordonnées maxima des lignes droites ne peuvent nécessairement se trouver qu'à leurs points extrêmes, c'est-à-dire en B ou C; on les aura donc parmi les sept valeurs de  $X_2$  ci-dessus données, car les valeurs de  $X_1$  seraient les mêmes, reproduites dans un autre ordre, à cause de la symétrie. Pour les paraboles, outre les valeurs répondant aux points d'appui, et également comprises parmi celles de  $X_2$ , il faut encore chercher celles qui répondent aux sommets. Dans la travée de rive, les paraboles ont des équations de la forme (n° 77)

$$X = \left( \frac{X_2}{a} + \frac{1}{2} p' a \right) x - \frac{1}{2} p' x^2;$$

celle pour laquelle  $X_2$  sera le plus grand enveloppera les autres et donnera la plus grande ordonnée au sommet. Or ces paraboles se produisent pour les cas n° 3, 5, 6, 7; en comparant par des soustractions les moments  $X_2$  qui s'y rapportent, on reconnaît que le cas n° 5 est celui pour lequel  $X_2$  est le plus grand algébriquement. Donc la plus grande ordonnée au sommet des paraboles, dans la travée de rive CD, sera celle de la parabole n° 5 représentée par l'équation

$$X = \left[ -\frac{1}{4(2+3n)} + \frac{1}{2} \right] p' ax - \frac{1}{2} p' x^2 = \frac{3}{4} \left( \frac{1+2n}{2+3n} \right) p' ax - \frac{1}{2} p' x^2.$$

Ce maximum répond à

$$x = \frac{3}{4} \left( \frac{1+2n}{2+3n} \right) a,$$

et a pour grandeur

$$(9) \quad X'' = \frac{9}{32} p' a^2 \left( \frac{1+2n}{2+3n} \right)^2 = \frac{9}{8} p' L^2 \frac{(1+2n)^2}{(2+n)^2 (2+3n)^2}.$$

Dans la travée centrale, les paraboles se produisent pour les cas n° 2, 4, 6, 7; leur équation est (n° 77)

$$X = X_2 + \left( \frac{X_1 - X_2}{na} + \frac{1}{2} p' na \right) x_1 - \frac{1}{2} p' x_1^2.$$

$X_2$  étant plus grand algébriquement pour le cas n° 2 que pour le cas n° 7, et  $X_1 - X_2$  étant nul dans les deux, la parabole 2 enveloppe l'autre; quant aux paraboles 4 et 6, elles se rapportent à des surcharges symétriques, et, par conséquent, leur sommet se trouve à la même hauteur. Il suffit donc de chercher les ordonnées au sommet des paraboles 2 et 6, repré-

sentées par les équations

$$X = -\frac{1}{4} p' a^2 \frac{n^3}{2+3n} + \frac{1}{2} p' n a x_1 - \frac{1}{2} p' x_1^2,$$

$$X = -\frac{1}{4} p' a^2 \frac{n^4 + 2n^3 + 2n + 2}{(2+n)(2+3n)} + \frac{1}{4} \left[ 2n + \frac{1}{n(2+n)} \right] p' a x_1 - \frac{1}{2} p' x_1^2.$$

La seconde expression étant retranchée de la première, on obtient leur différence

$$\frac{1}{2} p' a^2 \frac{1+n}{(2+n)(2+3n)} - \frac{1}{4} p' a x_1 \frac{1}{n(2+n)} - \delta,$$

quantité positive si l'on remplit la condition

$$(10) \quad x_1 < 2a \frac{n(1+n)}{2+3n}.$$

Or le sommet de la parabole 6 répond à l'abscisse

$$x'_1 = \frac{1}{4} a \left[ 2n + \frac{1}{n(2+n)} \right],$$

et l'on peut vérifier que cette valeur satisfait à l'inégalité (10) tant que  $n$  ne s'écarte pas des valeurs usuelles. En effet, si l'on pose

$$\frac{1}{4} a \left[ 2n + \frac{1}{n(2+n)} \right] < 2a \frac{n(1+n)}{2+3n},$$

on en tirera, en faisant disparaître les dénominateurs et réduisant,

$$2n^4 + 8n^3 + 8n^2 - 3n - 2 > 0,$$

condition qui sera satisfaite pourvu que  $n$  atteigne seulement 0.530. Si nous admettons cela, le sommet de la parabole 6 aura une abscisse qui rendra  $\delta$  positif; par conséquent il sera en dessous du point de la parabole 2 situé sur la même ordonnée, et, à fortiori, en dessous du sommet de cette parabole, qui se trouvera ainsi le plus élevé dans la travée centrale.

Ce sommet répond à  $x_1 = \frac{1}{2} na$ , et l'ordonnée correspondante a pour valeur

$$(11) \quad X'' = \frac{1}{8} p' a^2 n^2 \frac{2+n}{2+3n} - \frac{1}{2} p' L^2 \frac{n^2}{(2+n)(2+3n)}.$$

On voit donc, en définitive, que le maximum absolu des moments dus à la surcharge seule est la plus grande des expressions (9) et (11) et des sept valeurs de  $X$ , données tout à l'heure, en les prenant toujours avec le signe +. On peut encore mettre de côté six de ces dernières valeurs, car on reconnaît sans peine, en cherchant leurs différences mutuelles, que celle du sixième cas dépasse les autres en grandeur absolue. Il suffit donc de

prendre avec  $X'''$  et  $X^{IV}$  le moment  $X^V$ , égal et de signe contraire au moment  $X$ , du sixième cas, c'est-à-dire

$$(12) \quad X^V = p' L^2 \frac{n^4 + 2n^3 + 2n + 2}{(2+n)^3(2+3n)}.$$

Le tableau ci-dessous fait connaître les résultats fournis par des substitutions de nombres à la place de  $n$  dans les formules (9), (11) et (12).

VALEURS DE $n$ .	$\frac{X'''}{p' L^2}$	$\frac{X^{IV}}{p' L^2}$	$\frac{X^V}{p' L^2}$
0,70	0,05289	0,02213	0,05361
0,80	0,05011	0,02597	0,05211
0,90	0,04747	0,02971	0,05159
1,00	0,04500	0,03333	0,05185
1,10	0,04267	0,03682	0,05273
1,20	0,04050	0,04018	0,05414
1,25	0,03946	0,04181	0,05496
1,30	0,03846	0,04340	0,05589

Ce tableau montre que  $X^V$  est constamment supérieur aux deux autres moments, tant que  $n$  varie de 0,7 à 1,3; et comme dans cet intervalle  $X^V$  passe par un minimum, aux environs de  $n = 0,9$ , c'est ce minimum qui donnera la plus grande réduction possible du maximum de  $X$ . Pour trouver la valeur correspondante de  $n$ , on posera l'équation

$$\frac{dX^V}{dn} = 0,$$

qui, toutes réductions et simplifications faites, devient

$$7n^4 + 20n^3 + 3n^2 - 16n - 8 = 0.$$

On en tire  $n = 0,913$ ; cette valeur substituée dans (12) donne le minimum de  $X^V$  égal à  $0,05159p' L^2$ . Pour  $n = 1$ ,  $X^V$  a pour valeur  $0,05185p' L^2$ ; la diminution relative obtenue en prenant  $n = 0,913$  est donc de 0,50 pour 100 environ.

Il résulte de cette discussion que si l'on déterminait les dimensions transversales de la poutre uniquement d'après le maximum de tension longitudinale, il y aurait avantage à faire en sorte que l'ouverture d'une travée de rive fût à celle de la travée centrale dans un rapport peu différent de 0,9. Il convient d'ajouter que, comparativement avec ce qui se passerait dans le cas d'un égal espacement des appuis, l'avantage obtenu serait très-faible; il consisterait dans une réduction du maximum absolu

de tension ou pression longitudinale, variable entre 1,75 et 0,50 pour 100, suivant l'importance comparative de la charge permanente et des surcharges.

Mais, ainsi qu'on l'a déjà dit au n° 74, les constructeurs ont habituellement égard aux valeurs du moment fléchissant  $X$  dans toutes les sections, et non pas seulement au maximum. En se plaçant à ce point de vue, il convient de chercher à réduire autant que possible, non le maximum, mais bien la moyenne des valeurs absolues du moment fléchissant. C'est ce que nous allons faire, dans l'hypothèse où il n'y a qu'une charge uniforme, dont le poids est  $p$  par unité de longueur.

Soit d'abord  $n = 1$ ; le moment  $X$  est alors représenté par les ordonnées de la courbe DRESFT (fig. 38). Pour en avoir l'ordonnée moyenne en grandeur absolue, il faut calculer la somme des aires DRE + ESF + FTII et la diviser par DII. Or on a

$$\text{Aire DRE} = \frac{2}{3} \overline{DE} \cdot \overline{GR} = 0,04267 pa^2;$$

$$\text{Aire SCE} = \frac{1}{3} \overline{CG} (\overline{CS} + \overline{GR}) + \frac{2}{3} \overline{GE} \cdot \overline{GR} - \overline{CG} \cdot \overline{GR} = 0,00933 pa^2;$$

$$\text{Aire SCF} = \frac{1}{3} \overline{CH} (\overline{CS} + \overline{IT}) + \frac{2}{3} \overline{HF} \cdot \overline{IT} - \overline{CH} \cdot \overline{IT} = 0,01207 pa^2;$$

$$\text{Aire FTII} = \frac{2}{3} \overline{IF} \cdot \overline{IT} = 0,00373 pa^2.$$

Donc les ordonnées moyennes seraient :

Dans une travée de rive...  $(0,04267 + 0,00933) pa^2$  ou  $0,05200 pa^2$ ;

Dans la travée centrale...  $2(0,01207 + 0,00373) pa^2$  ou  $0,03160 pa^2$ ;

Dans la poutre entière...  $\frac{1}{3}(0,10400 + 0,03160) pa^2$  ou  $0,04520 pa^2$ ;

et comme  $n = \frac{2}{3} L$ , la moyenne pour la poutre entière pourrait encore se mettre sous la forme

$$\frac{4}{9} \cdot 0,04520 p L^2 = 0,02009 p L^2.$$

Lorsque  $n$  prendra une valeur différente de 1, on conçoit sans peine par cet exemple comment on pourra calculer l'ordonnée moyenne de la courbe représentative des moments. Ce calcul ne saurait présenter aucune difficulté analytique, puisqu'il se réduit à la quadrature d'aires paraboliques dans les conditions les plus simples. Sans entrer dans aucun détail à cet égard, nous nous bornerons à indiquer, dans le tableau ci-après, les ré-



sultats relatifs à un certain nombre de valeurs particulières de  $n$ . Nous désignerons par  $y$ ,  $y'$ ,  $y''$  les trois moyennes respectivement calculées pour la travée de rive, la travée centrale et la poutre entière.

VALEURS DE $n$ .	$\frac{y}{pa^2}$	$\frac{y'}{pb^2}$	$\frac{y''}{pL^2}$
0,00	0,04948	$\infty$	0,04948
0,90	0,05322	0,03483	0,02162
1,00	0,05200	0,03160	0,02009
1,10	0,05077	0,03132	0,01923
1,20	0,04969	0,03190	0,01886
1,25	0,04929	0,03226	0,01883
1,30	0,04899	0,03265	0,01888
2,00	0,06987	0,03523	0,02634
$\infty$	$\infty$	0,03207	0,03207

On voit par ce tableau que la valeur  $n = 1,25$  est celle qui rend minimum la moyenne  $y''$ ; en comparant entre elles les moyennes  $y''$  relatives à  $n = 1,25$  et  $n = 1$ , on reconnaît qu'elles sont dans le rapport de 93,7 à 100. La diminution obtenue quand on passe de  $n = 1$  à  $n = 1,25$  est donc à peu près de 6,3 pour 100.

Nous pouvons encore nous demander si la valeur  $n = 1,25$  produit aussi une certaine réduction dans l'aire du contour mixtiligne  $DE\beta'HHPO\gamma'M$  (*fig. 41*), qui représente les limites en grandeur absolue des moments fléchissants dus à la surcharge seule. L'aire dont il s'agit peut être exprimée algébriquement, puisque, dans les deux cas particuliers de  $n = 1$  et de  $n = 1,25$ , nous avons donné (n° 79 et 81) les équations des diverses lignes qui composent le contour enveloppe et les abscisses extrêmes entre lesquelles s'appliquent ces équations. Le calcul numérique nous a donné pour résultats :

Dans le cas de  $n = 1,00 \dots \dots 0,03192 p'L^3$ ,

Dans le cas de  $n = 1,25 \dots \dots 0,03080 p'L^3$ ;

le rapport des ordonnées moyennes à  $pL^2$  devient donc respectivement 0,3192 et 0,03080; par suite, la diminution en faveur de  $n = 1,25$  est de 3,5 pour 100.

L'aire  $DR\beta S\gamma T$  (*fig. 41*) étant exprimée par  $L^3$ , c'est-à-dire par  $0,02009 pL^3$  quand  $n = 1$ , et par  $0,01883 pL^3$  quand  $n = 1,25$ , s'il y a tout à la fois charge et surcharge, la moyenne des limites absolues des

moments dans les diverses sections sera :

$$\text{Pour } n = 1,00 \dots \dots (0,02009p + 0,03192p')L^2,$$

$$\text{Pour } n = 1,25 \dots \dots (0,01883p + 0,03080p')L^2;$$

la diminution relative, quand on passe du premier cas au second, deviendrait  $\frac{0,00126p + 0,00112p'}{0,02009p + 0,03192p'}$ , rapport variable avec  $\frac{p}{p'}$ , mais différant peu de  $0,035 \left(1 + \frac{4p}{5p + 8p'}\right)$ ; il serait de  $0,046$  si l'on avait  $\frac{p}{p'} = 1$ .

En résumé, à quelque point de vue qu'on se place, on doit reconnaître qu'il n'y a pas de raison bien péremptoire pour s'écarter de la valeur  $n = 1$ , c'est-à-dire pour ne pas donner la même ouverture aux trois travées. Sous certains rapports, nous avons en effet trouvé avantage à prendre  $n$  un peu supérieur à  $1$ , tandis que d'autres considérations conduiraient à le porter, au contraire, un peu au-dessous de ce nombre. Dans tous les cas le bénéfice est représenté par une réduction de quelques centièmes sur un moment fléchissant maximum ou moyen. Or les moments fléchissants ne sont pas connus très-rigoureusement, puisque nous les avons calculés comme si la section était constante, tandis qu'en pratique on la fait généralement variable. D'ailleurs les calculs de ce genre sont toujours affectés par l'incertitude des hypothèses fondamentales de la théorie : on ne peut donc pas raisonnablement attacher beaucoup d'importance à une diminution aussi faible, peut être notablement inférieure aux erreurs commises dans les évaluations des moments. Ajoutons encore qu'on pourrait la contre-balancer en pratique sans augmenter les frais d'établissement de la poutre, soit par un léger accroissement des coefficients numériques admis dans les calculs de résistance (coefficients que l'expérience ne saurait indiquer avec précision), soit par un accroissement plus faible encore dans la hauteur des sections transversales. (Voir le § suivant.)

84. *Même question pour une poutre à un nombre quelconque de travées.* — Nous ne donnons pas la solution ci-après comme rigoureuse; ce n'est qu'un simple aperçu théorique. Afin d'éviter des calculs trop longs et trop compliqués, nous admettrons : 1° qu'on doit s'occuper seulement des effets produits par une charge uniforme sur toute la longueur de la pièce; 2° qu'avec une telle charge les travées de rive sont dans le même état qu'une poutre encastree à une extrémité et simplement appuyée à l'autre; 3° que les travées intermédiaires peuvent être considérées comme des poutres encastrees à leurs deux extrémités. Nommons toujours  $a$  l'ouverture d'une travée de rive,  $b$  celle d'une travée intermédiaire,  $n$  le rapport  $\frac{b}{a}$ ,  $2L$  la longueur totale de la poutre, et  $p$  le poids qui charge chaque unité de longueur; soit de plus  $m$  le nombre des travées.

Ceci posé, lorsque dans une poutre à trois travées on suppose  $n = 0$ , les deux points d'appuis intermédiaires se confondent en un seul, sur lequel la tangente à la fibre moyenne devient forcément horizontale; ce double appui constitue alors un encastrement, et les travées extrêmes se trouvent dans la condition qu'on vient de supposer. Lorsqu'on suppose, au contraire,  $n = \infty$ , les deux points d'appui situés d'un même côté de la travée centrale se confondent en un seul, qui doit être considéré comme un encastrement; la même chose ayant lieu des deux côtés, la travée centrale devient encastree aux deux extrémités, comme nous l'avons admis tout à l'heure. Le tableau de la page 188 fait donc connaître les valeurs moyennes du moment fléchissant pour chaque travée, dans les hypothèses où l'on s'est placé en commençant; ces moyennes sont:

Dans une travée de rive.....  $0,04948 pa^2$ , ou à peu près  $0,050 pa^2$ ,

Dans une travée du milieu....  $0,03207 pb^2$ , ou à peu près  $0,032 pb^2$ .

Si nous n'avions pas déjà donné ces résultats dans le tableau cité, on aurait pu les déduire facilement des formules établies aux n<sup>os</sup> 71 et 73.

La poutre se composant de deux travées d'ouverture  $a$ , et de  $m - 2$  travées d'ouverture  $b$ , le moment fléchissant moyen sur toute son étendue sera

$$y = \frac{2 \cdot 0,05 pa^2 + (m - 2) \cdot 0,032 pb^2}{2a + (m - 2)b};$$

c'est la quantité qu'il faut rendre minimum, en satisfaisant à la relation

$$2a + (m - 2)b = 2L.$$

On a

$$b = na;$$

et, par suite,

$$[2 + (m - 2)n]a = 2L,$$

$$a = \frac{2L}{2 + (m - 2)n}, \quad b = \frac{2Ln}{2 + (m - 2)n}.$$

La substitution de ces valeurs de  $a$  et de  $b$  dans  $y$  donne l'expression

$$y = pL^2 \frac{0,4 + (m - 2) \cdot 0,128 n^2}{[2 + (m - 2)n]^3} = 0,4pL^2 \frac{1 + 0,32(m - 2)n^2}{[2 + (m - 2)n]^3},$$

où n'entre plus que la variable  $n$ . En égalant à zéro la dérivée  $\frac{dy}{dn}$ , on trouvera la condition de minimum,

$$\begin{aligned} & 0,32(m - 2)n^2 [2 + (m - 2)n]^3 \\ & - (m - 2) [2 + (m - 2)n]^2 [1 + 0,32(m - 2)n^2] = 0, \end{aligned}$$

soit après réduction et suppression du facteur commun  $(m-2)[2+4m-2+n]^2$ ,

$$0,64 n^2 - 1 = 0,$$

ou enfin

$$n = \sqrt{\frac{1}{0,64}} = 1,25.$$

Ce résultat concorde très-bien avec celui que nous avons obtenu au n° 83, pour le cas d'une poutre à trois travées; il est remarquable en ce qu'il est indépendant du nombre  $m$  des travées.

Quand on fait  $n = 1$  et  $n = 1,25$ , les valeurs correspondantes de  $y$  sont respectivement

$$0,4 p L^2 \frac{0,36 + 0,32 m}{m^3} \quad \text{et} \quad 0,4 p L^2 \frac{8}{(5m-2)^2};$$

le rapport de la seconde à la première sera donc

$$\frac{m^3}{(5m-2)^2(0,045+0,04m)} = \frac{1}{\left(1-\frac{2}{5m}\right)^2\left(1+\frac{9}{8m}\right)}.$$

La substitution des nombres 3, 4, 5, 6, 7, ...,  $\infty$ , à la place de  $m$ , conduit aux valeurs suivantes de ce rapport:

$$0,968, \quad 0,964, \quad 0,965, \quad 0,967, \quad 0,969, \dots, 1,000.$$

Il semble résulter de là que l'économie serait toujours de  $\frac{1}{30}$  environ, pour les poutres de 3 à 7 travées: cela tient à ce que le rapport dont nous nous occupons passe par un minimum lorsque  $m = 4,15$ , et, par suite, il varie lentement aux environs de cette valeur de  $m$ . Mais le chiffre de  $\frac{1}{30}$  ne peut être considéré comme exact, puisqu'une méthode plus certaine nous a donné à peu près le double, dans le cas de la poutre à trois travées (n° 83).

### § III. — Observations sur la vérification de la stabilité et sur le calcul des dimensions d'une poutre chargée transversalement.

**85. Vérification de la stabilité.** — On a vu au n° 19 que lorsqu'une poutre supporte des charges perpendiculaires à la fibre moyenne et toutes contenues dans le même plan, il se développe trois genres d'actions moléculaires, savoir: 1° des tensions transversales produites par l'effort tranchant et qui, suivant l'expression technique, mettent en jeu la résistance au

cisaillement; 2° des tensions ou pressions parallèles aux fibres, qui sont produites par le moment de flexion, et mettent en jeu la résistance longitudinale. En chaque point il y a généralement une action du premier genre et une action du second, cette dernière étant ou une tension ou une pression, ce qui fait bien, comme nous l'avons dit, trois genres distincts. On a également vu (n° 19) comment il était possible de calculer les intensités de ces forces moléculaires rapportées à l'unité de surface.

D'un autre côté, l'expérience indique certaines limites que ne doivent pas dépasser les tensions transversales ou longitudinales par unité de surface, dans toute construction présentant des garanties suffisantes de conservation indéfinie. La détermination de ces limites et l'étude des faits qui s'y rapportent seront, dans une autre partie du cours, l'objet d'un chapitre spécial. Quant à présent, nous les supposerons connues et nous les nommerons:

$R$  pour les tensions transversales;

$R'$  pour les tensions longitudinales positives, ou tensions proprement dites;

$R''$  pour les tensions longitudinales négatives ou pressions.

Il conviendra donc de s'assurer que les maximums des trois genres d'actions moléculaires, dans la pièce considérée, sont respectivement inférieurs, ou tout au plus égaux à  $R$ ,  $R'$ ,  $R''$ . Or dans cette vérification nous distinguerons trois cas: en outre, pour plus de simplicité, nous supposerons la poutre homogène et la déformation plane (n° 45).

**PREMIER CAS.** *Section constante et symétrique relativement à l'axe de flexion.* — Suivant les procédés employés aux deux §§ précédents, ou d'autres plus ou moins analogues, on cherchera d'abord comment varient les efforts tranchants  $P$  et moments fléchissants  $X$ , d'une section à l'autre, et avec tous les systèmes de charges que la pièce peut avoir à supporter. On obtiendra les plus grandes valeurs absolues  $X'$  et  $P'$  de ces quantités, dans toute l'étendue de la pièce, sous l'action des charges les plus défavorables. Alors, si l'on nomme  $\Omega$  l'aire constante de la section transversale, et  $h$  sa hauteur mesurée

perpendiculairement à l'axe de flexion, les maximums des trois genres de tension par unité de surface seront, d'après les formules du n° 19,

$$\frac{P'}{\Omega}, \quad \frac{1}{2} \frac{X'h}{I}, \quad \frac{1}{2} \frac{X'h}{I}.$$

En effet, l'expression  $\frac{PG}{\Sigma G\omega}$  se réduit d'abord à  $\frac{P}{\Omega}$ , par suite de l'invariabilité de  $G$ , et comme  $\Omega$  est aussi constant, elle ne varie qu'avec  $P$ ; de même dans l'expression  $\frac{Phu}{I}$ ,  $I$  est une constante, et  $u$  a pour valeurs extrêmes  $\frac{1}{2}h$  et  $-\frac{1}{2}h$ , dans toutes les sections, d'où il résulte que  $\frac{Phu}{I}$  prend sa plus grande valeur pour  $u = \pm \frac{1}{2}h$  et  $Ph = X'$ . On devra donc, en appelant  $R_1$  la plus petite des limites  $R'$  et  $R''$ , poser les conditions de stabilité

$$(1) \quad \frac{P'}{\Omega} \leq R, \quad \frac{1}{2} \frac{X'h}{I} \leq R_1.$$

**DEUXIÈME CAS.** *Section constante, mais non symétrique relativement à l'axe de flexion.* — En ce qui concerne l'effort tranchant, la condition de stabilité reste la même que dans le cas précédent; mais il en est différemment pour les conditions relatives aux tensions ou pressions longitudinales. Concevons que la fibre moyenne soit prise pour axe des  $x$ , qu'une perpendiculaire menée dans le plan des forces soit l'axe des  $y$ , et appelons:

$X'$  le plus grand moment fléchissant positif, le sens positif étant (suivant la convention du n° 48) celui d'un moment qui tend à coucher l'axe des  $x$  positifs sur les  $y$  positifs;

$X''$  la plus grande valeur absolue des moments négatifs;

$u'$  la plus grande distance des divers éléments de la section à l'axe autour duquel se produit la flexion, ces éléments n'étant pris que du côté des  $y$  positifs;

$u''$  la distance maximum analogue du côté des  $y$  négatifs.

Le moment  $X'$  produira une extension du côté des  $y$  négatifs



et une compression de l'autre côté: il fait donc naître

une tension maximum  $\frac{X' u''}{I}$  par unité de surface,

une pression maximum  $\frac{X' u'}{I}$  par unité de surface,

et ce seront là les plus grandes actions longitudinales dues aux moments fléchissants positifs. Pareillement les plus grandes actions dues aux moments négatifs seront

la tension  $\frac{X'' u'}{I}$ ,

la pression  $\frac{X'' u''}{I}$ .

Donc la plus grande tension par unité superficielle, dans toute la pièce, sera la plus forte des deux valeurs  $\frac{X' u''}{I}$  et  $\frac{X'' u'}{I}$ ; la plus grande pression sera la plus forte des deux valeurs  $\frac{X' u'}{I}$  et  $\frac{X'' u''}{I}$ . Nommant  $\frac{X_1 u_1}{I}$  et  $\frac{X_2 u_2}{I}$  ces deux maximums, on aura donc les conditions

$$(2) \quad \frac{P'}{\Omega} \leq R, \quad \frac{X_1 u_1}{I} \leq R', \quad \frac{X_2 u_2}{I} \leq R''.$$

Dans le cas où  $R'$  égalerait  $R''$ , il suffirait évidemment de vérifier que  $R'$  est supérieur à la plus grande des deux quantités  $\frac{X_1 u_1}{I}$ ,  $\frac{X_2 u_2}{I}$ , ou (ce qui revient au même) à la plus grande des quatre quantités  $\frac{X' u''}{I}$ ,  $\frac{X' u'}{I}$ ,  $\frac{X'' u'}{I}$ ,  $\frac{X'' u''}{I}$ .

**TROISIÈME CAS. Section variable.** — Quand la pièce a une section constante, on se guide nécessairement, pour en fixer les dimensions, sur les plus grands efforts tranchants et sur les plus grands moments de flexion qui ont lieu dans toute l'étendue de la pièce. Or comme ces valeurs maxima ne se produisent que dans certaines sections déterminées, il en résulte que toutes les autres ont des dimensions plus que suffisantes pour résister

convenablement aux forces qui s'exercent sur elles; par suite on aurait pu employer une moindre quantité de matière. C'est afin d'éviter cet inconvénient et de réaliser ainsi une économie plus ou moins notable, qu'on établit souvent des pièces dont la section change d'un point à l'autre de la fibre moyenne.

Dans ce cas, suivant que la section a une forme symétrique ou non, il faut encore employer les conditions (1) ou (2); seulement les maxima  $P'$ ,  $X'$ ,  $X''$ , ainsi que les hauteurs  $h$ ,  $u'$ ,  $u''$ , ne doivent pas être déterminés pour la pièce considérée dans toute son étendue, mais bien pour la section dont on s'occupe, prise à l'exclusion de toutes les autres. La vérification des conditions (1) ou (2) doit d'ailleurs se répéter pour toutes les sections, ou du moins pour un certain nombre d'entre elles, assez peu distantes les unes des autres.

86. *Calcul des dimensions nécessaires pour résister à des charges données.* — Lorsqu'il s'agit, non pas de vérifier si une pièce donnée, avec des dimensions parfaitement définies, est en état de résister à un système de forces également connu, mais bien de calculer les dimensions de manière à ce que la pièce supporte, sans altération, des charges fixées d'avance, alors le problème peut devenir beaucoup plus difficile. D'abord il est possible que les forces extérieures finalement appliquées à la poutre dépendent en partie des dimensions inconnues. Cela aurait lieu, par exemple, pour une poutre reposant sur plus de deux appuis en ligne droite, puisque la Statique ne donnerait que deux équations entre les réactions de ses appuis, et que les autres équations nécessaires à leur détermination devraient être posées en ayant égard à la flexibilité de la poutre. Si l'application de procédés rigoureux entraînait à des calculs inadmissibles en pratique, on éluderait cette première difficulté en cherchant les efforts tranchants  $P$  et moments de flexion  $X$  dans une section quelconque, comme si la poutre avait une section constante: c'est ce que nous avons fait au § II de ce chapitre. Nous regarderons donc encore comme connues les limites extrêmes de  $P$  et de  $X$ , soit dans la poutre entière, soit dans une section prise arbitrairement.

Les choses étant amenées à ce point, il est aisé de voir que le problème reste encore indéterminé. En effet, suivant que l'on se placera dans l'un ou l'autre des trois cas particuliers examinés au numéro précédent, on devra poser pour la poutre entière ou pour chaque section isolément, les inégalités de condition (1) et (2) du n° 85, dans lesquelles tout sera connu, sauf les quantités  $\Omega$ ,  $I$ ,  $h$ ,  $u'$ ,  $u''$ . On saura donc que les dimensions cherchées doivent vérifier certaines inégalités, susceptibles, si l'on veut, de se convertir en équations; mais il est visible que cela ne suffirait pas pour définir tout à fait une aire plane, sur laquelle on ne connaîtrait rien d'avance. Par exemple, dans le cas d'une section constante et symétrique, les conditions (1) devant être observées, on saurait que l'aire  $\Omega$  doit être supérieure ou tout au plus égale à  $\frac{P}{R}$ , et de même  $\frac{I}{h}$  aurait une limite inférieure, mais on n'en saurait conclure toutes les dimensions de l'aire  $\Omega$ , sans ajouter d'autres conditions qu'on se donnerait arbitrairement.

Les conditions de résistance se présentant sous forme d'inégalités, il est assez naturel de les convertir en égalités, pour ne pas augmenter inutilement les dimensions que l'on cherche; en d'autres termes, il semble convenable de faire en sorte que la matière supporte les tensions les plus fortes que l'expérience permet dans chaque genre d'efforts moléculaires. Mais cela ne sera pas toujours possible. Soit en effet proposé d'établir une pièce en tôle, à section rectangulaire constante, pour laquelle les quantités  $P'$ ,  $X'$ ,  $R$  et  $R'$  (n° 85) auraient les valeurs

$$P' = 12000^{ks},$$

$$X' = 50000^{ks \cdot m},$$

$$R = R' = 6000000^{ks};$$

nommons  $h$  la hauteur de la section mesurée parallèlement à  $P'$ , et  $b$  l'épaisseur dans le sens perpendiculaire. On aurait (n° 6)

$$I = \frac{1}{12} b h^3,$$

et, par suite, les inégalités (1) prises comme égalités devien-

draient

$$(3) \quad \frac{12000}{bh} = 6000000, \quad \text{ou} \quad bh = 0,002,$$

$$(4) \quad \frac{6.50000}{bh^2} = 6000000, \quad \text{ou} \quad bh^2 = 0,050.$$

En divisant la seconde par la première, on trouverait

$$h = 25^m;$$

la première donnerait ensuite

$$b = 0^m,00008.$$

Or il est évident pour toute personne ayant le moindre sentiment de l'art des constructions qu'un équarrissage de 25 mètres de hauteur sur  $\frac{1}{12}$  de millimètre d'épaisseur ne saurait être admis. Aussi faudrait-il, dans cet exemple, renoncer à l'une des équations (3) et (4); les efforts tranchants étant moins à craindre que les actions produites par la flexion, comme nous l'avons déjà dit plusieurs fois, on se préoccuperait d'abord de ces dernières, et on poserait

$$bh^2 = 0,050,$$

équation à laquelle on pourrait satisfaire en prenant  $b = 0^m,025$ ,  $h = 1^m,414$ ; comme d'ailleurs le produit  $bh$  serait ainsi supérieur à 0,002, on serait assuré de la stabilité.

Cet exemple et les explications qui le précèdent suffisent sans doute pour montrer ce qu'il y aurait à faire en général. On considérerait comme connues les dimensions cherchées, et on poserait les inégalités exprimant les conditions de résistance (n° 85). On tâtonnerait ensuite de manière à satisfaire à toutes ces inégalités, en s'écartant le moins possible de l'égalité; on disposerait pour cela des dimensions transversales, ou au moins d'une partie, si des considérations d'un autre ordre en avaient déjà fait arrêter quelques-unes. Enfin, tous les résultats fournis par le calcul devraient être contrôlés et examinés au point de vue de l'art de l'ingénieur, en se fondant sur des notions que nous n'avons point à exposer ici, mais qu'on puise dans les exemples de constructions analogues à celles qu'on projette,

dans l'expérience acquise et le sentiment de praticien. En un mot, l'ingénieur ne doit considérer les formules que comme un guide à consulter et non à suivre aveuglément. La vérité de la théorie d'où elles découlent est toujours subordonnée à la réalisation plus ou moins complète de quelques hypothèses primitives, et la pratique seule peut apprendre les cas où ces hypothèses se trouvent suffisamment d'accord avec les faits.

**87. Influence de la forme attribuée à la section transversale d'une poutre.** — Quand il s'agit de résister à un effort tranchant, la tension par unité de surface reste toujours la même, quelle que soit la forme de la section, si toutefois celle-ci est homogène et conserve une aire constante : la forme a donc une influence nulle sur la résistance. Il n'en est pas de même quand on considère la résistance aux moments fléchissants. Supposons, pour plus de simplicité, une section homogène symétrique relativement à l'axe de flexion ; suivant les notations du n° 85, la tension longitudinale maximum, dans cette section, serait proportionnelle au quotient  $\frac{h}{I}$ . L'inverse  $\frac{I}{h}$  donnerait donc une mesure de la résistance de la section aux moments fléchissants, car plus  $\frac{I}{h}$  sera grand, moindre sera le maximum de tension dû à un même moment. Or  $\frac{I}{h}$ , à égalité de l'aire  $\Omega$ , dépend de la forme de cette aire.

Par exemple, si l'aire  $\Omega$  était rectangulaire, on aurait (n° 6)

$$I = \frac{1}{12} \Omega h^3,$$

et, par suite,

$$\frac{I}{h} = \frac{1}{12} \Omega h,$$

quantité proportionnelle à  $h$ , quand  $\Omega$  conserve la même valeur. On en conclut ce fait bien connu qu'une pièce méplate résiste mieux aux poids qui tendent à la fléchir, lorsqu'elle est posée sur champ que lorsqu'elle est posée dans l'autre sens. Aussi donne-t-on aux poutres rectangulaires en bois ou en métal, destinées à supporter des poids, des équarrissages

plus forts suivant la verticale que suivant l'horizontale. S'il s'agit du bois, en nommant  $b$  l'épaisseur horizontale de la section, on fait habituellement

$$b = 0,7 h;$$

pour les poutres métalliques le rapport  $\frac{b}{h}$  peut devenir beaucoup plus petit : il descend souvent à quelques millièmes. En le diminuant sans changer  $\Omega$ , on augmenterait la hauteur  $h$  et, par suite, la résistance à la flexion; mais à cet égard nous renvoyons le lecteur aux considérations qui terminent le numéro précédent.

Si l'aire  $\Omega$  est une ellipse, ayant pour axes  $b$  et  $h$ , l'un parallèle et l'autre perpendiculaire à l'axe de flexion, on a (n° 6)

$$I = \frac{1}{16} \Omega h^3,$$

d'où résulte

$$\frac{I}{h} = \frac{1}{16} \Omega h.$$

Nous avons donc encore les mêmes choses à dire relativement aux variations de la résistance à la flexion avec  $h$ . De plus on voit que l'ellipse est désavantageuse en comparaison du rectangle, à égalité d'aire et de hauteur, car le coefficient  $\frac{1}{12}$  relatif au rectangle est remplacé par  $\frac{1}{16}$ .

Afin d'augmenter autant que possible le rapport  $\frac{I}{h}$ , on a imaginé les sections en forme de double T (fig. 44). Elles sont

Fig. 44.



composées de deux rectangles à côtés parallèles, réunis par un troisième rectangle perpendiculaire, comme l'indique la figure. La partie verticale de la poutre, qui a pour section ce troisième rectangle, s'appelle souvent *âme* de la poutre. Les forces agissent perpendiculairement à la ligne

AB, et aussi, bien entendu, à la fibre moyenne. Si l'âme a une section petite relativement à celle des branches horizontales;



si celles-ci sont très-minces, et en outre égales, on pourrait poser, sans très-grande erreur,

$$I = \frac{1}{4} \Omega h^3, \quad \frac{I}{h} = \frac{1}{4} \Omega h,$$

ce qui montre l'avantage de cette forme relativement au rectangle et à l'ellipse, puisque le coefficient  $\frac{1}{4}$  a remplacé  $\frac{1}{12}$  et  $\frac{1}{16}$ .

Au reste, quelque forme que l'on adopte, il est clair que rigoureusement on a toujours

$$I < \frac{1}{4} \Omega h^3,$$

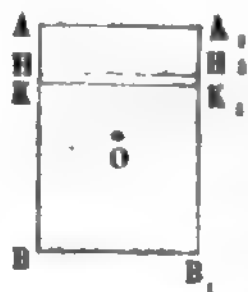
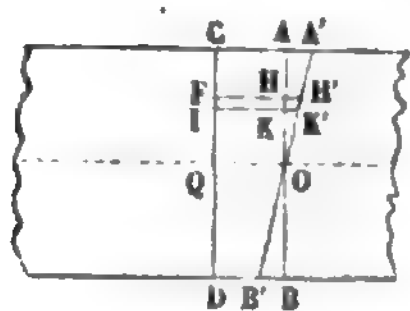
pourvu que la surface soit homogène. En effet, si l'axe de flexion divise la hauteur  $h$  en deux parties égales, on augmentera le moment d'inertie  $I$  en portant tous les éléments superficiels à la distance maximum  $\frac{h}{2}$  de l'axe; il deviendrait alors  $\frac{1}{4} \Omega h^3$ : donc il était primitivement plus petit. Il en est de même, à plus forte raison, si l'axe de flexion ne passe pas au milieu de  $h$ ; car puisque cet axe contient le centre de gravité de la section, en le déplaçant parallèlement à lui-même, pour le mettre au milieu de la hauteur, on augmenterait déjà le moment d'inertie (n° 2). Ainsi l'expression  $\frac{1}{4} \Omega h$  est pour  $\frac{I}{h}$  une limite qu'on ne peut pas atteindre tout à fait; mais on s'en rapproche avec la forme en double T à branches égales.

La quantité  $\frac{I}{h}$  étant, dans les trois exemples qu'on vient d'indiquer, proportionnelle à  $h$  et à  $\Omega$ , on pourrait, quand même  $\Omega$  serait très-petit, la rendre aussi grande qu'on le voudrait, au moyen d'un choix convenable de  $h$ . On conçoit donc théoriquement des pièces dont la section transversale aurait une aire nulle, et qui cependant résisteraient bien à la flexion: mais ce n'est là qu'une conception non réalisable. Indépendamment

des conditions pratiques non exprimées par la théorie, l'existence des efforts tranchants impose une limite inférieure à l'aire  $\Omega$ , et l'on va voir au numéro suivant un autre genre de considérations qui conduisent également à ne pas diminuer indéfiniment aucune des épaisseurs de cette aire, dans le sens perpendiculaire à la hauteur  $h$ .

88. *Du glissement longitudinal des fibres les unes sur les autres.* — Soit donnée d'abord une poutre à section rectangulaire  $ABA_1B_1$  (fig. 45), sou-

Fig. 45.



● mise à une série de charges parallèles au côté  $AB$ , par l'action desquelles il se produit des mouvements de flexion autour d'axes parallèles à  $BB_1$ . Nommons :

$X$  le moment fléchissant et  $P$  l'effort tranchant dans la section  $AB$ ;

$dx = \overline{OQ}$  la longueur d'un élément de la fibre moyenne, terminé à la section  $AB$  et à la section infiniment voisine  $CD$ ;

$b = \overline{BB_1}$  et  $h = \overline{AB}$  les deux dimensions transversales;

$u$  la distance comprise entre le centre d'élasticité  $O$  et une parallèle quelconque  $KK_1$  à l'axe de flexion;

$I$  le moment d'inertie de la surface  $AB$ , supposée homogène, relativement au même axe.

La tension longitudinale par unité de surface sur la bande infiniment mince  $KK_1$   $HH_1$  sera  $\frac{Xu}{I}$  (n° 19); et, comme cette bande a pour surface  $bdu$ , elle supporte une tension totale  $\frac{bXu}{I}$ . La somme de ces tensions, pour la partie  $AO$  de la section  $AB$ , sera donc

$$\theta = \int_0^{\frac{1}{2}h} \frac{bXu}{I} u du = \frac{1}{8} \frac{bXh^2}{I}$$

ou bien, à cause de  $I = \frac{1}{12} bh^3$  (n° 6),

$$\theta = \frac{3}{2} \frac{X}{h}.$$

Dans la section CD, la somme analogue prendrait la valeur

$$\theta + \frac{d\theta}{dx} dx = \frac{3}{2h} \left( X + \frac{dX}{dx} dx \right);$$

il y a donc une différence  $\frac{3}{2h} \frac{dX}{dx} dx$  qui tend à faire glisser le prisme OQCA parallèlement à la direction OQ. Cette force ne peut être tenue en équilibre que par la résistance que le plan projeté sur OQ vient opposer au glissement. Si donc nous appelons  $R'''$  la limite que ne doit pas dépasser cette force rapportée au mètre carré, pour la surface OQ ou  $b dx$  elle aura l'intensité maximum  $R''' b dx$ , et l'on devra poser

$$\frac{3}{2h} \frac{dX}{dx} dx \leq R''' b dx;$$

soit en remplaçant  $\frac{dX}{dx}$  par  $P$  (n° 76), et isolant le facteur  $R'''$ ,

$$\frac{3P}{2bh} \leq R'''.$$

On se trouve ainsi conduit à considérer une nouvelle résistance, celle qui est opposée au glissement mutuel de plans menés parallèlement aux fibres de la pièce. Cette résistance, dans les pièces de bois, est ordinairement inférieure à la résistance  $R$  au glissement transversal des sections ou cisaillement; aussi la limite inférieure de l'aire  $bh$ , qu'on tirera de la dernière équation, sera-t-elle plus grande que celle qu'aurait fournie la condition  $\frac{P}{\Omega} < R$  du n° 85. Le même fait se produirait encore pour toute poutre rectangulaire construite avec une autre matière que le bois, pourvu qu'on eût  $R > \frac{2}{3} R'''$ .

Le glissement longitudinal des fibres explique pourquoi deux poutres superposées de manière à se toucher par un

plan, mais non invariablement liées l'une à l'autre, ne fléchissent pas comme une poutre unique égale en dimensions à leur ensemble. C'est parce que le plan de contact ne fournirait pas la résistance nécessaire au glissement longitudinal. Pour former une pièce unique avec la réunion de deux pièces, on a soin de les lier fortement avec des étriers, et de disposer la surface de séparation en redans qui engrènent les uns dans les autres.

On aurait pu exécuter des calculs analogues aux précédents, avec des formes de section différentes : nous nous bornerons à donner encore les résultats relatifs à la forme en double T à branches égales. On supposera, comme au n° 87, que l'âme occupe seulement une faible partie de la section, et que les branches ont une petite épaisseur, relativement à la hauteur totale. Les notations restant celles du n° 87, la tension totale  $\theta$  sur une moitié de la section sera exprimée par

$$\theta = \frac{1}{2} \Omega \cdot \frac{1}{2} \frac{Xh}{I},$$

ou bien, puisque  $I = \frac{1}{4} \Omega h^3$ ,

$$\theta = \frac{X}{h}.$$

Par suite, si  $b$  désigne l'épaisseur de l'âme, on devra poser

$$\frac{1}{h} \frac{dX}{dx} dx \leq R''' b dx,$$

c'est-à-dire

$$\frac{P}{bh} \leq R'''. \quad \bullet$$

On trouve ainsi une limite inférieure de section  $bh$  de l'âme : dans le cas où  $R'''$  égalerait  $R$ , on pourrait énoncer la dernière inégalité en disant que l'âme doit être, à elle seule et abstraction faite des branches, capable de résister à l'effort tranchant.

Mais il convient de faire remarquer que tous les calculs du présent numéro s'appliquent exclusivement au cas où la hauteur  $h$  ne varie pas d'une section à l'autre. Montrons par un exemple qu'ils seraient sensiblement modifiés dans le cas d'une section variable. A cet effet, supposons une poutre d'égale résistance (n° 20), encastree par un bout et supportant à

l'autre une force transversale unique  $P$ . La section est un rectangle d'épaisseur  $b$  constante, dans le sens perpendiculaire au plan qui contient  $P$  et la fibre moyenne; la hauteur  $h$  varie proportionnellement à la racine carrée de la distance  $x$ , entre la section considérée et le point où agit  $P$ , de sorte qu'on a

$$h^2 = Cx \quad \text{et} \quad \frac{dh}{dx} = \frac{h}{2x},$$

$C$  désignant une constante. La somme  $\theta$  des tensions sur la moitié de l'aire  $bh$  s'exprimera encore, comme tout à l'heure par l'équation

$$\theta = \frac{3}{2} \frac{X}{h};$$

mais en différentiant pour obtenir la force de glissement dans le sens longitudinal, il faudra considérer  $h$  comme variable en fonction de  $x$  et poser

$$\frac{d\theta}{dx} dx = \frac{3}{2h} \frac{dX}{dx} dx - \frac{3X}{2h^2} \frac{dh}{dx} dx = \left( \frac{3P}{2h} - \frac{3X}{4hx} \right) dx,$$

ou encore, attendu que  $X = Px$ ,

$$\frac{d\theta}{dx} dx = \frac{3P}{4h} dx.$$

La valeur de  $\frac{d\theta}{dx} dx$ , et, par suite, la tendance au glissement longitudinal, seraient donc ici deux fois plus petites qu'avec une hauteur invariable.

Dans les exemples particuliers qui précèdent, nous n'avons cherché la tendance au glissement longitudinal que sur le plan qui contient les axes de flexion successifs. On aurait pu la chercher par un procédé semblable sur tout autre plan parallèle; et c'est même ce qu'il y aurait à faire si, parmi ces sections longitudinales, il s'en trouvait une très-étroite et conséquemment plus exposée que les autres au genre de rupture que nous venons d'étudier (\*).

---

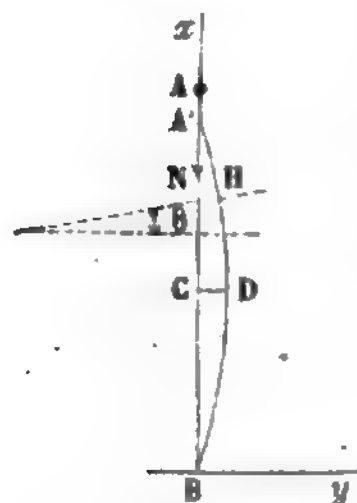
(\*) L'idée d'avoir égard au glissement longitudinal des fibres est empruntée à un Mémoire de M. Jourawski, colonel du génie russe. Voir les *Annales des Ponts et Chaussées*, 1856, 2<sup>e</sup> semestre.

## § IV. — Des pièces droites chargées debout.

89. *Prisme vertical chargé d'un poids agissant suivant son axe.*

— Nous supposons un prisme vertical dont la fibre moyenne, dans son état primitif, est AB; le point B est fixe; au point A, suivant la ligne AB, est appliquée une force N devant laquelle le poids propre de la pièce est supposé négligeable. Le point A

Fig. 46.



est assujéti par des moyens quelconques à se déplacer sur AB. Dans ces conditions, si la pièce était composée de fibres parfaitement homogènes, et si la force agissait rigoureusement suivant la fibre moyenne, il ne pourrait se produire aucune flexion, car le moment de N par rapport à un quelconque des centres d'élasticité des sections successives serait nul; par conséquent la pièce resterait droite. Mais si une

cause accidentelle quelconque a fait commencer la flexion, on comprend que la pièce puisse rester courbée et se maintenir en équilibre sous l'action de la force N. C'est la forme qu'elle a dans l'état d'équilibre qu'il s'agit d'étudier ici.

Soit A' la position du point A après la flexion. La déformation étant supposée plane (n° 45), appliquons à la pièce A'B l'équation (9) du n° 47; si l'on prend pour axes des coordonnées les lignes Bx et By, le moment fléchissant sera exprimé par  $-Ny$ ; par suite, on posera

$$er^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = -Ny,$$

équation dans laquelle  $er^2$  représente, comme d'habitude, le moment de flexibilité constant de la poutre relativement aux axes perpendiculaires au plan de la figure et passant par les centres d'élasticité des sections. On connaît l'intégrale de cette équation linéaire du second ordre: en désignant par C et D deux constantes arbitraires, on aura

$$y = C \sin \frac{x}{r} \sqrt{\frac{N}{e}} + D \cos \frac{x}{r} \sqrt{\frac{N}{e}}.$$



La constante  $D$  doit être nulle, attendu qu'on a  $y=0$  pour  $x=0$ ; donc

$$y = C \sin \frac{x}{r} \sqrt{\frac{N}{e}}.$$

Il faut, de plus, que  $y$  soit encore nul pour  $x = \overline{A'B}$ , quantité peu différente de  $\overline{AB}$  ou  $2a$ , longueur primitive de la pièce. Il faudra donc que  $\frac{2a}{r} \sqrt{\frac{N}{e}}$  soit un multiple de la demi-circonférence, ou bien, en désignant par  $i$  un nombre entier quelconque, que l'on ait

$$\frac{2a}{r} \sqrt{\frac{N}{e}} = i\pi,$$

d'où nous tirons

$$N = er^2 \frac{i^2 \pi^2}{4a^2}.$$

La moindre force  $N$  déduite de cette équation est  $er^2 \frac{\pi^2}{4a^2}$ , correspondante à  $i=1$ ; en faisant  $i=2$ ,  $i=3$ , etc., on aurait des valeurs de  $N$  qui seraient égales à la première multipliée par 4, 9, etc. Donc la pièce ne pourra pas rester fléchie si  $N$  n'atteint pas au moins la limite  $er^2 \frac{\pi^2}{4a^2}$ .

Quand on attribue à  $N$  la valeur générale  $er^2 \frac{i^2 \pi^2}{4a^2}$ , l'expression  $\frac{1}{r} \sqrt{\frac{N}{e}}$  est égale à  $\frac{i\pi}{2a}$ , et, par suite,

$$y = C \sin \frac{i\pi x}{2a}.$$

On voit alors que pour les valeurs de  $x$

$$x = \frac{2a}{i}, \quad x = 2 \frac{2a}{i}, \quad x = 3 \frac{2a}{i}, \dots, \quad x = (i-1) \frac{2a}{i}, \quad x = 2a,$$

$\frac{i\pi x}{2a}$  devient un multiple de la demi-circonférence, et, par conséquent,  $y$  devient nul. La courbe affectée par la fibre moyenne présente alors une forme analogue à celle qui est

dessinée ci-contre, pour le cas particulier de  $i=3$ . Cette courbe

Fig. 47.



est toujours une sinusoïde. Il est clair qu'une portion de la courbe comprise entre deux points consécutifs où  $y$  s'annule, HK par exemple, représente la courbe qu'on aurait, dans l'hypothèse de  $i=1$ ,

avec une longueur de pièce  $\frac{2a}{i}$ . En effet, en cha-

cun des points H et K, la partie HK doit recevoir des réactions moléculaires dont les résultantes, égales et contraires entre elles, ont N pour valeur commune : donc HK se trouve dans les mêmes

conditions que A'B dans la fig. 46, à part cette différence que

la longueur est  $\frac{2a}{i}$  au lieu de  $2a$ .

Le maximum de l'ordonnée  $y$ , ou la flèche, se produit quand on a  $\frac{i\pi x}{2a}$  égal à l'une des valeurs  $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$ , ce qui donne pour  $x$  les valeurs correspondantes  $\frac{a}{i}, \frac{3a}{i}, \frac{5a}{i}, \dots$

Ce maximum est d'ailleurs égal à la constante C, qui reste encore indéterminée, bien que nous ayons employé toutes les conditions du problème.

D'après l'analyse précédente, il semble au premier abord que l'équilibre n'est compatible qu'avec certaines valeurs de N croissantes d'une manière discontinue ; de sorte que si la pièce était fléchie par une force N égale à  $er^2 \frac{\pi^2}{4a^2}$ , l'addition

d'une très-petite force entraînerait la rupture. Or cela est contraire à une expérience qu'on peut à chaque instant répéter avec des règles en bois de faibles dimensions : la règle étant courbée par deux pressions en sens contraire qu'on exerce avec les mains aux extrémités, on voit la flèche varier d'une manière continue avec la force. Toutefois cette objection, que nous citons parce qu'elle se présente naturellement à l'esprit, n'est pas bien fondée : car, à la rigueur, dans la formule

$N = \frac{er^2\pi^2}{4a^2}$ , on devrait regarder  $2a$  comme représentant la distance

$\overline{AA'}$  des deux extrémités de la pièce déformée, quantité

variable avec  $N$ ; cette force pourrait donc varier un peu, et à chaque valeur correspondrait une courbe particulière d'équilibre. Seulement il y a toujours dans cet équilibre quelque chose que nous n'avons pas pu déterminer : c'est la constante  $C$  ou la flèche maximum de la courbe. Cela tient à ce que, en établissant les formules de la déformation, dont l'équation (9) du n° 47 est une conséquence, nous avons toujours supposé les déplacements infiniment petits, et, par conséquent, nous avons confondu la forme primitive d'une pièce et sa forme définitive, en ce qui concerne l'évaluation des moments ou projections des forces et le calcul des déplacements correspondants. Ici cela nous empêcherait de résoudre la question, car nous devrions partout supposer  $X = 0$ , ce qui nous conduirait à dire que la pièce est restée droite. Aussi, en

écrivant  $er^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = -Ny$ , avons-nous déjà tenu compte en partie de la différence de forme qui altère le moment de  $N$ ; mais ce que nous avons fait pour ce moment, il aurait fallu le faire aussi pour les actions moléculaires qui le tiennent en équilibre.

Reprenons donc la question à son origine. La pièce  $AB$  ayant pris la forme  $A'B$  (*fig. 46*) sous l'action de la force  $N$ , exprimons l'équilibre entre cette force et les actions moléculaires développées dans une section quelconque faite en  $H$ . Nous appellerons  $ds$  la longueur primitive d'un élément de fibre moyenne qui part de  $H$ ,  $\theta$  l'inclinaison de la section qui passe en ce point par rapport à sa direction primitive. La section infiniment voisine de celle-là, et qui en était primitivement à la distance  $ds$ , fait maintenant avec elle un angle  $d\theta$ , tandis que le parallélisme existait d'abord entre les deux sections. Donc  $\frac{d\theta}{ds}$  représente l'angle de flexion rapporté à l'unité de longueur,

c'est-à-dire la quantité nommée  $\frac{\psi}{L}$  au n° 16; par suite, la somme des moments des actions moléculaires relativement à l'axe projeté en  $H$  aura pour valeur  $er^2 \frac{d\theta}{ds}$ , et, puisqu'il y a

équilibre entre ces actions et la force  $N$ , on posera

$$(1) \quad er^2 \frac{d\theta}{ds} = Ny.$$

L'élément qui avait primitivement une longueur  $ds$  a pris une longueur différente  $ds'$ , par suite de la compression due à la force  $N$ . En vertu des formules élémentaires relatives à l'extension et à la compression simples, on aura très-approximativement

$$(2) \quad ds' = ds \left( 1 - \frac{N}{e} \right),$$

en négligeant la faible inclinaison de  $N$  sur la normale à la section. Enfin, puisque la composante de  $N$  parallèlement à la section est aussi très-faible, il est permis de négliger le glissement transversal et de regarder une section primitivement normale comme l'étant encore après la déformation. On écrit en conséquence l'équation

$$(3) \quad -ds' \sin \theta = dy.$$

Des équations (2) et (3) on tire

$$\frac{dy}{ds} = -\sin \theta \left( 1 - \frac{N}{e} \right),$$

valeur qui, substituée dans l'équation (1), après avoir différencié celle-ci par rapport à  $s$ , donne

$$er^2 \frac{d^2 \theta}{ds^2} = -N \left( 1 - \frac{N}{e} \right) \sin \theta;$$

multipliant par  $2d\theta$  et intégrant, on aura

$$er^2 \left( \frac{d\theta}{ds} \right)^2 = 2N \left( 1 - \frac{N}{e} \right) \cos \theta + \text{const.}$$

La constante peut s'exprimer en fonction de la valeur  $\theta_0$  que prend  $\theta$  au point  $A'$ ; car en ce point  $y = 0$ , et, par suite, en vertu de (1),  $\frac{d\theta}{ds} = 0$ . Donc on pourra poser

$$(4) \quad er^2 \left( \frac{d\theta}{ds} \right)^2 = 2N \left( 1 - \frac{N}{e} \right) (\cos \theta - \cos \theta_0),$$

soit, sous une autre forme,

$$\frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos\theta_0)}} = \frac{ds}{r} \sqrt{\frac{N}{e} \left(1 - \frac{N}{e}\right)}.$$

L'intégrale du second membre de cette équation entre les limites  $s=0$  et  $s=2a$  est  $\frac{2a}{r} \sqrt{\frac{N}{e} \left(1 - \frac{N}{e}\right)}$ ; l'intégrale du premier entre les mêmes limites est connue par la théorie du pendule simple. Si  $\theta$  s'annule  $i$  fois entre B et A', cette intégrale serait le temps de  $i$  oscillations d'un pendule simple ayant pour longueur le nombre  $g$ , accélération des corps pesants dans le vide; on aurait donc approximativement pour sa valeur  $i\pi \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right)$ , en négligeant dans l'expression différentielle les puissances de  $\theta_0$  supérieures à la quatrième; par suite, on posera

$$(5) \quad i\pi \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right) = \frac{2a}{r} \sqrt{\frac{N}{e} \left(1 - \frac{N}{e}\right)}.$$

Or les équations (1) et (4), appliquées aux points tels que C, pour lesquels  $\theta$  s'annule, en même temps que  $y$  prend une valeur maximum  $f$ , donnent

$$er^2 \frac{d\theta}{ds} = Nf,$$

$$er^2 \left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 = 2N \left(1 - \frac{N}{e}\right) (1 - \cos\theta_0);$$

d'où l'on tire

$$\frac{Nf^2}{er^2} = 2 \left(1 - \frac{N}{e}\right) (1 - \cos\theta_0),$$

ou bien, à cause de la petitesse de  $\theta_0$ ,

$$(6) \quad \frac{Nf^2}{er^2} = \left(1 - \frac{N}{e}\right) \theta_0^2.$$

En éliminant  $\theta_0$  entre les équations (5) et (6), on aura définitivement, pour déterminer la flèche,

$$\frac{Nf^2}{er^2 \left(1 - \frac{N}{e}\right)} = 16 \left[ -1 + \frac{2a}{i\pi r} \sqrt{\frac{N}{e} \left(1 - \frac{N}{e}\right)} \right].$$

La quantité  $\frac{N}{e}$  représente à très-peu près le rapport du raccourcissement de la pièce à sa longueur primitive quand on suppose que la compression se fait sans entraîner de flexion (n° 13); ce rapport est nécessairement petit, car l'expérience prouve qu'il ne saurait acquérir une valeur notable, même en se rapprochant de la valeur de  $N$ , qui produirait l'écrasement (\*). On pourrait donc, sans avoir à craindre une erreur notable sur  $f$ , poser l'équation

$$(7) \quad \frac{Nf^2}{er^2} = 16 \left[ -1 + \frac{2a}{i\pi r} \sqrt{\frac{N}{e} \left( 1 - \frac{N}{e} \right)} \right].$$

Voyons les conséquences qui résultent de cette expression. D'abord, pour que  $f$  soit réel, il faut que l'on ait

$$-1 + \frac{2a}{i\pi r} \sqrt{\frac{N}{e} \left( 1 - \frac{N}{e} \right)} > 0,$$

ou bien

$$(8) \quad \frac{N}{e} \left( 1 - \frac{N}{e} \right) > \frac{i^2 \pi^2 r^2}{4a^2};$$

si l'on négligeait  $\frac{N}{e}$  devant l'unité, cette inégalité donnerait

$$(9) \quad N > er^2 \frac{i^2 \pi^2}{4a^2},$$

ce qui est la limite inférieure de  $N$  fournie par notre première analyse. On en a une autre un peu plus faible en remarquant qu'on a, d'après l'inégalité (8),

$$\frac{N}{e} > \frac{i^2 \pi^2 r^2}{4a^2 \left( 1 - \frac{N}{e} \right)},$$

ou à fortiori, en remplaçant dans le second membre  $\frac{N}{e}$  par la

(\*) Par exemple, une pression de 25 kilogrammes par millimètre carré produit la rupture par écrasement d'un prisme en fer, et cependant le raccourcissement correspondant n'est guère que 0,002 de la longueur primitive. Pour la fonte et le bois, ce dernier nombre serait un peu plus fort, mais il atteindrait rarement une valeur maximum supérieure ou même égale à 1 centième.



valeur trop faible  $\frac{i^2 \pi^2 r^2}{4 a^2}$  déduite de (9),

$$(10) \quad N > e r^2 \frac{i^2 \pi^2}{4 a^2 - i^2 \pi^2 r^2}.$$

La valeur de  $N$  doit donc être tant soit peu supérieure à la limite  $e r^2 \frac{i^2 \pi^2}{4 a^2 - i^2 \pi^2 r^2}$ ; mais elle ne doit la dépasser que très-peu. En effet, si le contraire avait lieu, on aurait, d'après l'équation (7),  $\frac{N f^2}{e r^2} = K$ ,  $K$  désignant une quantité de grandeur sensible; donc on aurait aussi  $f^2 = K r^2 \frac{e}{N}$ , et attendu que  $\frac{e}{N}$  doit être un rapport assez grand, la flèche serait grande, ce qui est contraire aux données que nous admettons toujours dans nos calculs, et exposerait la pièce à la rupture. Les pièces chargées debout et fléchies doivent donc être considérées comme étant dans un état d'équilibre instable, puisqu'un faible supplément de compression les met en danger de se rompre : et par conséquent on doit s'arranger, dans les constructions, pour rendre impossible la flexion de ces pièces.

En vertu de ce que  $N$  dépasse très-peu la limite inférieure, l'équation (7) pourrait encore recevoir une autre forme. Soit  $N_0$

la valeur de  $N$  qui satisfait à la relation  $1 = \frac{2a}{i\pi r} \sqrt{\frac{N_0}{e} \left(1 - \frac{N_0}{e}\right)}$ ,

on aura

$$\frac{N f^2}{e r^2} = \left[ \sqrt{\frac{N}{e} \left(1 - \frac{N}{e}\right)} - \sqrt{\frac{N_0}{e} \left(1 - \frac{N_0}{e}\right)} \right] \frac{32 a}{i \pi r};$$

la quantité entre parenthèses sera considérée comme la différentielle de la fonction  $\sqrt{\frac{N}{e} \left(1 - \frac{N}{e}\right)}$  et remplacée en consé-

quence par  $\frac{N - N_0}{e} \frac{\left(1 - \frac{2N}{e}\right)}{2 \sqrt{\frac{N}{e} \left(1 - \frac{N}{e}\right)}}$ , soit, avec une petite er-

reur relative, par  $\frac{N - N_0}{2e\sqrt{\frac{N}{e}}}$ ; donc on aura

$$f^2 = \frac{16ar}{ei\pi} \cdot \frac{N - N_0}{\left(\frac{N}{e}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Or  $\frac{N}{e}$  est encore peu différent de  $\frac{i^2\pi^2r^2}{4a^2}$ ; donc enfin, en posant  $N - N_0 = \Delta N_0$ , on aura

$$f^2 = \frac{128}{i^4\pi^4} \cdot \frac{\Delta N_0}{e} \cdot \frac{a^4}{r^2},$$

soit, en extrayant la racine carrée,

$$(11) \quad f = \frac{8\sqrt{2}}{i^2\pi^2} \sqrt{\frac{\Delta N_0}{e}} \cdot \frac{a^2}{r}.$$

Ainsi donc, pour que la poutre fléchisse, il faut que la force  $N$  atteigne une certaine limite  $N_0$ , pour laquelle la flèche est encore nulle, mais est sur le point de se produire; quand la force  $N$  dépasse cette limite, la flèche qui se produit est proportionnelle au carré de la longueur primitive et à la racine carrée du supplément de force; elle est en raison inverse de la racine carrée du moment de flexibilité.

Nous venons de voir qu'il y avait une limite inférieure de  $N$ , en dessous de laquelle la flexion est impossible; il en existe pareillement une pour la longueur  $2a$ . En effet,  $\frac{N}{e} \left(1 - \frac{N}{e}\right)$  étant le produit de deux facteurs dont la somme est constante, on a nécessairement  $\sqrt{\frac{N}{e} \left(1 - \frac{N}{e}\right)} < \frac{1}{2}$ ; et comme pour rendre possible l'équation (7) il faut que cette quantité multipliée par  $\frac{2a}{i\pi r}$  devienne plus grande que 1, on aura la condition

$$2a > 2i\pi r.$$

Mais, pratiquement, la longueur  $2i\pi r$  serait encore insuffi-

sante pour rendre la flexion possible; car la valeur correspondante de  $\frac{N}{e}$  serait  $\frac{1}{2}$ , ce qui entraînerait bien certainement l'écrasement du prisme.

Pour exprimer la limite que donne cette considération de la résistance à l'écrasement, appelons  $E_1$  la plus grande valeur du coefficient d'élasticité longitudinale dans la section de la poutre,  $R_2$  la compression longitudinale par unité de surface qui produirait la rupture. On aura

$$\frac{NE_1}{e} < R_2 \quad \text{et} \quad \frac{N}{e} > \frac{i^2 \pi^2 r^2}{4a^2 - i^2 \pi^2 r^2};$$

d'où l'on déduit

$$\frac{R_2}{E_1} > \frac{i^2 \pi^2 r^2}{4a^2 - i^2 \pi^2 r^2},$$

ou bien

$$2a > i\pi r \sqrt{1 + \frac{E_1}{R_2}}.$$

Si l'on veut que la flexion puisse commencer sans compromettre la pièce, il faut, dans cette inégalité, remplacer  $R_2$  par la limite  $R''$  de la compression par mètre carré, que l'on peut exercer avec sécurité. Voici, en nombres ronds, les valeurs de  $\pi \sqrt{1 + \frac{E_1}{R_2}}$  pour quelques matières prises avec leurs qualités physiques moyennes :

Fer.....	90
Fonte.....	40
Bois de chêne.....	50

Si l'on avait remplacé  $R_2$  par  $R''$ , les résultats seraient devenus deux fois et demie ou trois fois plus forts.

Quant à ce qui concerne la vérification de la stabilité, on a déjà dit qu'il fallait éviter dans les constructions d'avoir des pièces chargées debout et qui pourraient fléchir. Cette précaution prise, la charge suivant l'axe donnerait lieu à une compression simple, et à des pressions par unité de surface, faciles à calculer en chaque point (nos 13 et 18). Il suffirait ensuite de

s'assurer que le maximum de ces pressions n'atteint pas la limite  $R''$ .

90. *Prisme vertical chargé suivant son axe et encastré à ses deux extrémités.* — Dans ce cas, si l'on se contente de l'analyse approximative donnée en commençant le n° 89, on écrira l'équation

$$er^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = -Ny + \mu,$$

dans laquelle  $\mu$  désigne le moment du couple produit par l'encastrement. En posant  $y' = y - \frac{\mu}{N}$  et désignant par C et D deux constantes, on aura successivement

$$er^2 \frac{d^2 y'}{dx^2} = -Ny',$$

$$y' = C \sin \frac{x}{r} \sqrt{\frac{N}{e}} + D \cos \frac{x}{r} \sqrt{\frac{N}{e}},$$

$$y = \frac{\mu}{N} + C \sin \frac{x}{r} \sqrt{\frac{N}{e}} + D \cos \frac{x}{r} \sqrt{\frac{N}{e}}.$$

Or,  $y$  doit s'annuler pour  $x = 0$  et  $x = 2a$ , ce qui donne

$$\frac{\mu}{N} + D = 0,$$

$$\frac{\mu}{N} + C \sin \frac{2a}{r} \sqrt{\frac{N}{e}} + D \cos \frac{2a}{r} \sqrt{\frac{N}{e}} = 0.$$

$\frac{dy}{dx}$  doit aussi être nul pour les mêmes valeurs de  $x$ , et, par suite, on a

$$C = 0, \quad D \sin \frac{2a}{r} \sqrt{\frac{N}{e}} = 0.$$

En faisant dans la seconde de ces quatre conditions  $\frac{\mu}{N} = -D$  et  $C = 0$ , on trouve

$$\cos \frac{2a}{r} \sqrt{\frac{N}{e}} = 1,$$

équation qui, jointe à  $\sin \frac{2a}{r} \sqrt{\frac{N}{e}} = 0$ , exige que l'on ait

$$\frac{a}{r} \sqrt{\frac{N}{e}} = i\pi,$$

ou bien

$$N = er^2 \frac{i^2 \pi^2}{a^2}.$$

La valeur de  $y$  prend alors la forme

$$y = -D \left( 1 - \cos \frac{i\pi x}{a} \right).$$

Ainsi, la moindre valeur de la force  $N$ , nécessaire pour produire la flexion dans ce cas, répond à  $i = 1$  et a pour expression  $\frac{er^2 \pi^2}{a^2}$ ; elle est donc quatre fois plus grande que dans le cas précédent. La courbe affectée par la fibre moyenne est encore une sinusoïde; mais elle est tout entière d'un même côté de l'axe des  $x$ . La flèche maximum, égale à  $-2D$ , se produit pour  $x = \frac{a}{i}, 3\frac{a}{i}, 5\frac{a}{i}, \dots, (2i-1)\frac{a}{i}$ , tandis qu'il y aurait des ordonnées nulles pour  $x = 2\frac{a}{i}, 4\frac{a}{i}, 6\frac{a}{i}, \dots, 2a$ . Cette flèche reste encore indéterminée, et par conséquent il y a aussi danger de rupture quand la flexion commence.

La considération suivante met bien en évidence l'effet de l'encastrement. Prenons une pièce  $AB$  (fig. 48) maintenue à

Fig. 48.



l'état de flexion par deux forces  $N$  égales et contraires, appliquées à ses extrémités suivant son axe primitif. La courbe produite par la flexion sera, par exemple,  $AGCHD \dots B$ , coupant un nombre pair de fois la ligne  $AB$  entre les points  $A$  et  $B$ , de telle sorte que le nombre des portions telles que  $AGC$ , comprises entre deux ordonnées nulles consécutives, sera au contraire impair. Nous le désignerons par  $2n+1$ ,  $n$  étant un nombre entier positif. L'équilibre existant, il est clair que dans la section normale faite en  $G$ , la pièce  $GCH \dots$  supporte l'action d'une force verticale  $N$  dirigée suivant  $AN$ , qu'on peut remplacer par la même force appliquée en  $G$  et par le couple dont

le moment serait  $N \cdot \overline{GE}$ . De même la portion de pièce qui est

supérieure à la section faite en  $K$  reçoit dans cette section des actions égales et de sens contraire. Donc si l'on imagine que les portions  $AG$  et  $KB$  soient supprimées, mais qu'on fasse agir en  $G$  et  $K$  les forces  $N$  et les couples  $N \cdot \overline{GE}$ , l'équilibre existera toujours; il existera encore si les couples sont remplacés par des encastremements qui assujettissent la pièce à conserver sa direction verticale en  $G$  et  $K$ , et les encastremements donneront lieu précisément au moment  $N \cdot \overline{GE}$ , car s'il en était différemment, la direction de la pièce changerait en ces points. Alors, la partie  $GCH \dots K$  représentera une poutre chargée debout par une force  $N$  et encastree à ses deux extrémités;  $GK$  serait la position de la fibre moyenne de la poutre dans l'état primitif. La longueur  $\overline{GK}$  de cette pièce étant désignée par  $2a$ ,  $\overline{AB}$  sera égal à  $2a \cdot \frac{2n+1}{2n}$ . Donc on peut conclure que

si la pièce  $GK$  doit présenter dans sa longueur  $2n-1$  points où la tangente serait verticale, non compris  $G$  et  $K$ , après la déformation elle sera identique avec la courbe ayant  $2n$  ordonnées nulles entre les extrémités, qui se produirait sous l'action de la même force, en supprimant l'encastrement et prolongeant la pièce de manière à multiplier la longueur par  $\frac{2n+1}{2n}$ ; seulement il faut observer qu'après cette modification la flèche maximum sera réduite à moitié, puisqu'elle deviendra  $\overline{GE}$  au lieu de  $\overline{LH}$ .

On pourra donc appliquer les formules du n° 89, en y remplaçant  $i$  par  $2n+1$ ,  $2a$  par  $2a \cdot \frac{2n+1}{2n}$ ,  $f$  par  $\frac{1}{2}f$ .

L'observation qui termine le n° 89, relativement à la stabilité, serait encore exacte dans le cas actuel.

91. *Prisme vertical encastree à une extrémité et sollicité à l'autre par une force oblique et un couple.* — Soit une pièce dont la fibre moyenne primitive coïncide avec la verticale  $AB$  (fig. 49) et devient  $A'B$  après la flexion. En  $B$  est un appui avec encastrement; en  $C$ , à une distance  $\overline{A'C} = l$  de l'extrémité supérieure, agit une force  $R$  dont les composantes horizontale et verticale sont  $P$  et  $N$ ; devant cette force on néglige le poids propre de la pièce.





Il y a encore dans cette équation une inconnue auxiliaire  $f$ , dont la valeur est celle que prend  $y$  pour  $x = 2a$ ; on aura donc, pour la déterminer,

$$f = \left( l + f + \frac{2aP}{N} \right) \left( 1 - \cos \frac{2a}{r} \sqrt{\frac{N}{e}} \right) - \frac{Pr}{N} \sqrt{\frac{e}{N}} \left( \frac{2a}{r} \sqrt{\frac{N}{e}} - \sin \frac{2a}{r} \sqrt{\frac{N}{e}} \right),$$

et, par suite,

$$(4) \quad f = l \frac{1 - \cos \frac{2a}{r} \sqrt{\frac{N}{e}}}{\cos \frac{2a}{r} \sqrt{\frac{N}{e}}} + \frac{Pr}{N} \sqrt{\frac{e}{N}} \left( \tan \frac{2a}{r} \sqrt{\frac{N}{e}} - \frac{2a}{r} \sqrt{\frac{N}{e}} \right).$$

Les équations (3) et (4) suffisent pour faire connaître la courbe A'B.

Lorsqu'on suppose que  $l$  et  $\frac{P}{N}$  ne sont pas deux quantités très-petites,

il est nécessaire, pour que la flèche reste petite, que  $\frac{2a}{r} \sqrt{\frac{N}{e}}$  soit un petit arc. Or on a généralement

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2} + \dots, \quad \tan z = z + \frac{z^3}{3} + \dots;$$

donc si l'on néglige la quatrième puissance de  $z$  et les puissances supérieures, on pourra écrire

$$(5) \quad f = \frac{2a^2 l}{r^2} \cdot \frac{N}{e} + \frac{8}{3} \frac{Pa^3}{er^2} = \frac{4a^2}{er^2} \left( \frac{Nl}{2} + \frac{2Pa}{3} \right);$$

$f$  est alors la somme des valeurs obtenues en supposant successivement  $P = 0$ ,  $N = 0$ , ce qui n'avait pas lieu quand on faisait entrer  $y$  et  $f$  dans l'expression du moment fléchissant, c'est-à-dire quand on tenait compte des changements que les déformations elles-mêmes apportent dans les moments des forces extérieures par rapport à un point quelconque de la fibre moyenne.

Quant à la résistance de la pièce, on voit qu'il y aura dans les diverses sections une force de glissement  $P$ , une force  $N$  produisant une compression simple, et un moment fléchissant variable  $N(l + f - y) + P(2a - x)$  dont le maximum aura lieu en B et sera  $N(l + f) + 2Pa$ . Il n'y a d'ailleurs rien de particulier à dire sur ce cas, à part la condition que l'arc  $\frac{2a}{r} \sqrt{\frac{N}{e}}$  doit être petit; et quand on aura par la méthode générale exposée au § III du chapitre I<sup>er</sup> calculé les tensions maxima de toute nature dans une section quelconque, on s'assurera que les dimensions sont suffisantes en procédant comme aux n<sup>os</sup> 85 et suivants.

## CHAPITRE QUATRIÈME.

CALCUL DE LA POUSSEE EXERCÉE PAR UN ARC REPOSANT SUR DEUX APPUIS FIXES, LORSQUE LA SECTION EST CONSTANTE ET QUE LA FIBRE MOYENNE, PRIMITIVEMENT CIRCULAIRE, SE DÉFORME EN RESTANT DANS UN MÊME PLAN VERTICAL.

§ I<sup>er</sup>. — Poussée due à une force isolée, horizontale ou verticale, à un couple et à une dilatation linéaire indépendante des charges.

92. *Des questions qui doivent être traitées dans ce chapitre.* — Dans les constructions, il arrive presque toujours que les pièces courbes employées ont une section constante, et que leur fibre moyenne est un arc de cercle situé dans un plan vertical. La pièce est symétrique par rapport à ce plan, et toutes les forces qui agissent sur elle y sont contenues; de telle sorte que la condition du n° 43, nécessaire pour que la déformation soit plane, se trouve naturellement satisfaite.

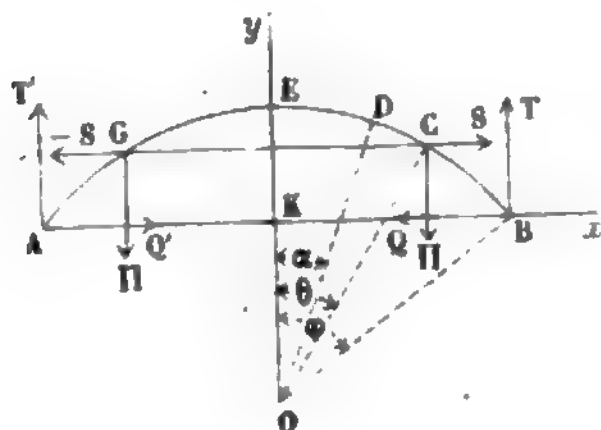
Les arcs sont ordinairement supportés à leurs extrémités par deux appuis placés dans un même plan horizontal, et disposés de manière à rendre invariable la distance des deux points de l'arc avec lesquels ils sont en contact, mais ils ne doivent pas, en général, être regardés comme produisant un encastrement.

Nous nous proposons, dans le cours de ce chapitre, d'établir des formules qui permettent de calculer, seulement par des opérations algébriques, les réactions des appuis d'un arc placé dans de telles conditions, les forces étant supposées quelconques; et, en second lieu, de réduire ces opérations aux calculs numériques les plus simples, pour le cas usuel où les forces ne seraient autre chose que des poids.

93. *Notations principales de ce chapitre.* — Soit donné l'arc AEB (*fig. 50*), reposant sur les deux appuis A et B, et suppor-

tant une force isolée, appliquée dans la section qui rencontre la fibre moyenne en C. Nous prendrons pour axe des  $x$  la corde

Fig. 50.



AB, pour axe des  $y$  la verticale  $Oy$  passant par le centre  $O$  du cercle dont l'arc AEB fait partie. Nous désignerons par

$2a$  la corde  $\overline{AB}$ ;

$f$  la flèche  $\overline{EK}$ ;

$\rho$  le rayon du cercle;

$\alpha$  l'angle fait par le rayon correspondant à un point  $D$  quelconque pris sur AEB avec l'axe des  $y$ ;

$\varphi$  l'angle BOE de la verticale avec les rayons des naissances;

$\theta$  la valeur particulière de  $\alpha$  qui répond au point C;

$T, Q, T', Q'$  les composantes des réactions en B et A suivant l'horizontale et la verticale, et dans le sens indiqué par la figure.

Nous conservons de plus aux lettres  $e, r, X, N, \tau, s$ , le sens qui leur est attribué dans les formules générales du chapitre II. Enfin, nous appelons  $X'$  et  $N'$ , comme aux nos 54 et suivants, les valeurs que prennent  $X$  et  $N$  lorsqu'on n'y fait pas entrer la composante horizontale de la réaction des appuis.

94. *Poussée produite par un poids isolé.* — Supposons d'abord l'arc AEB soumis à un point unique  $P$  agissant en C, et faisons abstraction de son poids propre, sauf à voir par la suite comment on en tiendra compte. Nous avons les équations d'équilibre entre les forces extérieures du système

$$Q - Q' = 0,$$

$$T + T' - P = 0,$$

$$P\rho(\sin\varphi + \sin\theta) = 2T\rho\sin\varphi;$$

dont les deux premières expriment la nullité de la résultante de translation, et la troisième la nullité de la somme des mo-

ments par rapport au point A. On en tire

$$T = \frac{1}{2} \Pi \left( 1 + \frac{\sin \theta}{\sin \varphi} \right),$$

$$T' = \frac{1}{2} \Pi \left( 1 - \frac{\sin \theta}{\sin \varphi} \right),$$

$$Q = Q'.$$

T et T' étant connus, il reste à connaître Q. Nous pourrions y parvenir par l'application pure et simple de la formule (10) donnée au n° 54; mais il est plus commode de ramener le problème au cas d'une pièce symétrique et symétriquement chargée. Pour cela, nous ajouterons un autre poids  $\Pi$  en un point G symétrique de C. Soit alors  $Q_1$  la réaction horizontale de l'appui B. Si l'on se reporte aux considérations du n° 67, et si l'on remarque en outre que la réaction horizontale s'annule en supprimant les deux poids, on voit qu'entre Q et  $Q_1$  existera la relation

$$2 Q = Q_1.$$

Nous déterminerons l'inconnue auxiliaire  $Q_1$  au moyen de la formule (11) du n° 55, dans laquelle il faudra faire  $\tau = 0$ ,

$$Q_1 = \frac{\int_0^a \frac{X' y}{e r^2} \frac{ds}{dx} dx + \int_0^a \frac{N'}{e} dx}{\int_0^a \frac{y^2}{e r^2} \frac{ds}{dx} dx + \int_0^a \frac{1}{e} \frac{dx}{ds} dx}.$$

En calculant les valeurs de  $X'$  et de  $N'$ , on devra observer que, après l'addition du second poids  $\Pi$ , les réactions verticales des appuis sont égales et contraires à  $\Pi$ . Donc si l'on exprime toutes les variables en fonction de  $\alpha$ , on aura

$$\text{Depuis } \alpha = 0 \text{ jusqu'à } \alpha = \theta, \quad \begin{cases} X' = \Pi \rho (\sin \varphi - \sin \theta), \\ N' = 0; \end{cases}$$

$$\text{Depuis } \alpha = \theta \text{ jusqu'à } \alpha = \varphi, \quad \begin{cases} X' = \Pi \rho (\sin \varphi - \sin \alpha), \\ N' = -\Pi \sin \alpha; \end{cases}$$

$$y = \rho (\cos \alpha - \cos \varphi), \quad x = \rho \sin \alpha,$$

$$ds = \rho d\alpha, \quad dx = \rho \cos \alpha d\alpha;$$

par suite,  $e$  et  $r^2$  étant ici des constantes, et  $\varphi$  pouvant être remplacé par  $\frac{a}{\sin \varphi}$ ,

$$\begin{aligned} & \int_0^a \left( \frac{X' y}{er^2} \frac{ds}{dx} + \frac{N'}{e} \right) dx \\ &= \frac{\pi \rho^3}{er^2} (\sin \varphi - \sin \theta) \int_0^\theta (\cos \alpha - \cos \varphi) d\alpha \\ &+ \frac{\pi \rho^3}{er^2} \int_\theta^\varphi \left[ -\frac{r^2}{a^2} \sin^2 \varphi \sin \alpha \cos \alpha \right] d\alpha, \\ & \int_0^a \left( \frac{y^2}{er^2} \frac{ds}{dx} + \frac{1}{e} \frac{dx}{ds} \right) dx \\ &= \frac{e^3}{er^2} \int_0^\varphi \left[ (\cos \alpha - \cos \varphi)^2 + \frac{r^2}{a^2} \sin^2 \varphi \cos^2 \alpha \right] d\alpha. \end{aligned}$$

Toutes les intégrales qui se présentent ici nous sont déjà connues. On effectuera le calcul; puis, doublant le dénominateur de  $Q_1$ , on aura la valeur cherchée; elle peut se mettre sous la forme

$$(1) \quad Q = \pi \frac{A - \frac{1}{2} \frac{r^2}{a^2} \sin^2 \varphi (\sin^2 \varphi - \sin^2 \theta)}{B + \frac{r^2}{a^2} \sin^2 \varphi (\varphi + \sin \varphi \cos \varphi)},$$

en représentant par A et B les expressions

$$A = \frac{1}{2} (\sin^2 \varphi - \sin^2 \theta) + \cos \varphi (\cos \theta + \theta \sin \theta - \cos \varphi - \varphi \sin \varphi),$$

$$B = \varphi + 2 \varphi \cos^2 \varphi - 3 \sin \varphi \cos \varphi.$$

95. *Poussée produite par une force horizontale.*— Nous supposerons, en second lieu, la force horizontale S placée en C, comme l'indique la *fig. 50* et en même temps nous supprimerons toute autre force. Il s'agit encore de calculer les réactions des appuis T, Q, T', Q'.

Les équations d'équilibre des forces extérieures deviennent



dans ce cas,

$$Q - Q' = S,$$

$$T + T' = 0,$$

$$S\rho(\cos\theta - \cos\varphi) = 2T\rho\sin\varphi,$$

d'où l'on peut déduire immédiatement  $T$  et  $T'$ ,

$$T = -T' = S \frac{\cos\theta - \cos\varphi}{2\sin\varphi}.$$

Pour arriver à connaître  $Q$  et  $Q'$ , nous emploierons le même artifice que dans le cas précédent. Nous ajouterons au point  $G$  une force  $-S$  symétrique de la première; alors  $Q_1$  étant la poussée en  $B$ , on aura (n° 66)

$$Q_1 = Q + Q';$$

et puisque  $Q - Q' = S$ ,

$$Q = \frac{1}{2}Q_1 + \frac{1}{2}S,$$

$$Q' = \frac{1}{2}Q_1 - \frac{1}{2}S.$$

Reste à déterminer  $Q_1$ ; ce que l'on fera au moyen de la formule (11) (n° 55), dans laquelle on supprimera  $\tau a$ . Or, après l'addition de la seconde force  $S$ ,  $T$  et  $T'$  sont nuls, et, par suite, on a

$$\text{Depuis } \alpha = 0 \text{ jusqu'à } \alpha = \theta, \quad \begin{cases} X' = S\rho(\cos\alpha - \cos\theta), \\ N' = S\cos\alpha; \end{cases}$$

$$\text{Depuis } \alpha = \theta \text{ jusqu'à } \alpha = \varphi, \quad X' = 0, \quad N' = 0.$$

Donc

$$\begin{aligned} & \int_0^a \left( \frac{X'y}{er^2} \frac{ds}{dx} + \frac{N'}{e} \right) dx \\ &= \frac{S\rho^3}{er^2} \int_0^\theta [(\cos\alpha - \cos\theta)(\cos\alpha - \cos\varphi) + \frac{r^2}{a^2} \sin^2\varphi \cos^2\alpha] d\alpha \\ &= \frac{S\rho^3}{2er^2} \left[ \begin{aligned} & \theta - \sin\theta \cos\theta - 2\sin\theta \cos\varphi + 2\theta \cos\theta \cos\varphi \\ & + \frac{r^2}{a^2} \sin^2\varphi (\theta + \sin\theta \cos\theta) \end{aligned} \right]. \end{aligned}$$

D'ailleurs le dénominateur de la fraction qui exprime la valeur

de la poussée reste le même que dans le cas précédent : c'est la moitié du dénominateur de la formule (1). Donc on trouvera

$$(2) \quad \frac{1}{2} Q_1 = S \frac{A' + \frac{1}{2} \frac{r^2}{a^2} \sin^2 \varphi (\theta + \sin \theta \cos \theta)}{B + \frac{r^2}{a^2} \sin^2 \varphi (\varphi + \sin \varphi \cos \varphi)},$$

formule dans laquelle B a la même valeur qu'au n° 94, et A' représente la quantité

$$A' = \frac{1}{2} \theta - \frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta - \sin \theta \cos \varphi + \theta \cos \theta \cos \varphi.$$

Connaissant  $Q_1$ , on en déduit aisément, comme nous venons de le voir, les poussées réelles Q et Q'. Il est clair d'ailleurs que si la force S venait à changer de sens, il en serait de même de  $Q_1$ . En représentant par  $-Q_1$  la valeur que l'on obtiendrait alors, on aurait

$$Q = -\frac{1}{2} Q_1 - \frac{1}{2} S,$$

$$Q' = -\frac{1}{2} Q_1 + \frac{1}{2} S;$$

ce qui montre que Q et Q' prendraient aussi les mêmes valeurs que tout à l'heure, mais en sens contraire. Il existerait en B une force égale à la demi-somme des forces  $Q_1$  et S dirigée vers les  $x$  positifs; en A agirait une force égale à la demi-différence de S et de  $Q_1$ , dirigée dans le sens de la plus grande de ces deux forces. Il faudrait encore, bien entendu, joindre à ces composantes horizontales les composantes verticales correspondantes.

96. *Poussée due à l'action d'un couple.* — En troisième lieu, considérons le cas où un couple de moment  $\mu$  serait appliqué à la section normale faite en C. Ce couple est situé dans le plan de l'arc, et nous supposons qu'il tend à faire tourner dans le sens des moments positifs.

On déterminera la réaction verticale T en prenant les moments relativement au point A, ce qui donnera

$$2aT + \mu = 0,$$

d'où

$$T = -\frac{\mu}{2a}.$$

On a d'ailleurs, pour les conditions de l'équilibre de translation,

$$T + T' = 0,$$

$$Q - Q' = 0.$$

Les deux poussées  $Q$  et  $Q'$  étant égales, chacune d'elles sera la moitié de la poussée  $Q_1$ , qu'on obtiendrait en ajoutant un couple symétrique du premier (n° 67). Après cette addition, la réaction verticale  $T$  serait nulle ; donc on aurait

$$\text{Entre } \alpha = \alpha \text{ et } \alpha = \theta \dots\dots\dots X' = \mu,$$

$$\text{Entre } \alpha = \theta \text{ et } \alpha = \varphi \dots\dots\dots X' = 0,$$

$$\text{Dans toute l'étendue de l'arc. } N' = 0.$$

Par conséquent

$$Q_1 = \frac{\int_0^a \left( \frac{X' y}{er^2} \frac{ds}{dx} + \frac{N'}{e} \right) dx}{\int_0^a \left( \frac{y^2}{er^2} \frac{ds}{dx} + \frac{1}{e} \frac{dx}{ds} \right) dx} = \frac{\mu \int_0^{\rho\theta} \frac{y}{er^2} ds}{\int_0^a \left( \frac{y^2}{er^2} \frac{ds}{dx} + \frac{1}{e} \frac{dx}{ds} \right) dx}.$$

L'intégrale du dénominateur est déjà connue, puisque c'est la même que dans les deux cas précédents. Quant au numérateur, on posera

$$\int_0^{\rho\theta} \frac{y}{er^2} ds = \frac{\rho^2}{er^2} \int_0^\theta (\cos \alpha - \cos \varphi) d\alpha = \frac{\rho^2}{er^2} (\sin \theta - \theta \cos \varphi);$$

on aura donc

$$(3) \quad Q = \frac{1}{2} Q_1 = \mu \frac{\frac{1}{\rho} (\sin \theta - \theta \cos \varphi)}{B + \frac{\rho^2}{a^2} \sin^2 \varphi (\varphi + \sin \varphi \cos \varphi)}.$$

Si le sens de  $\mu$  était contraire à celui que nous avons supposé, il n'y aurait qu'à changer son signe dans cette expression ; la même chose aurait lieu si on plaçait le couple dans la section faite au point  $G$ , pour lequel  $\theta$  est le même en valeur

absolue. On peut donc regarder la formule (3) comme générale, à la condition de donner à  $\mu$  un signe d'après la convention établie pour les moments  $X$  (n° 48) et de regarder  $\theta$  comme positif ou négatif, suivant qu'il sera compté à droite ou à gauche de la verticale. Le signe qui affectera la valeur de  $Q$  montrera si cette force est dirigée comme l'indique la figure ou en sens contraire. Ainsi quand  $\mu$  et  $\theta$  sont de signes contraires,  $Q$  est négatif d'après la formule (3); l'arc tire ses appuis au lieu de les pousser.

97. *Poussée due à une dilatation résultant de causes indépendantes des charges.* — On obtiendra la poussée qui se produirait indépendamment de toute force agissant sur l'arc, en vertu d'une dilatation de sa fibre moyenne par l'effet de la température et du calage, si l'on fait dans la formule  $X' = 0$ ,  $N' = 0$ . On trouvera

$$Q = \frac{\tau a}{\int_0^a \left( \frac{y^2}{er^2} \frac{ds}{dx} + \frac{1}{e} \frac{dx}{ds} \right) dx},$$

ou bien, en substituant au dénominateur la valeur calculée au n° 94,

$$Q = \frac{2\tau a \frac{er^2}{\rho^3}}{B + \frac{r^2}{a^2} \sin^2 \varphi (\varphi + \sin \varphi \cos \varphi)}.$$

Cette expression de  $Q$  peut encore s'écrire comme il suit, en remplaçant  $\rho$  par  $\frac{a}{\sin \varphi}$  :

$$(4) \quad Q = \frac{2e\tau \sin^3 \varphi \frac{r^2}{a^2}}{B + \frac{r^2}{a^2} \sin^2 \varphi (\varphi + \sin \varphi \cos \varphi)}.$$

Dans le cas où, au lieu d'une dilatation, il existerait en réalité une contraction, ce qui peut arriver si la température est suffisamment basse, la même formule donnera encore la réaction horizontale des appuis; seulement cette réaction serait une traction, au lieu d'être une poussée.

On remarquera, en outre, que si aucune force n'agit sur l'arc en dehors des points A et B, les appuis ne pourront pas exercer de réaction dans le sens vertical, car les forces qui proviennent de ces appuis devant se faire équilibre, sont nécessairement dirigées suivant la ligne qui les joint.

**§-II. — Recherche de la poussée produite par des forces quelconques et par la dilatation.**

**98. Cas d'un arc soumis à des forces discontinues quelconques et à une dilatation produite par d'autres causes.** — Nous prendrons maintenant un arc satisfaisant toujours aux conditions du n° 92, et nous supposerons qu'il éprouve d'une part l'action d'un nombre quelconque de forces, et, en second lieu, une dilatation linéaire provenant d'autres causes, comme les changements de température et le calage.

D'après ce qu'on a vu aux n° 64 et 65, on peut d'abord remplacer chaque force par deux composantes, l'une verticale, l'autre horizontale, appliquées toutes deux au centre d'élasticité de la section sur laquelle agit la force primitive, et par un couple; puis faire la somme des poussées produites sur chaque point d'appui par toutes ces composantes et par la dilatation linéaire, considérées comme agissant successivement chacune à l'exclusion de toutes les autres. Or les formules (1), (2), (3) et (4), qui viennent d'être établies dans le § I de ce chapitre, permettent de calculer les différents termes de cette somme; donc on a le moyen de connaître les poussées totales  $Q$  et  $Q'$  qui sont exercées sur les deux appuis.

Quant aux réactions verticales  $T$ ,  $T'$ , leur détermination n'exige que l'emploi de la statique ordinaire des systèmes invariables. On a vu au n° 54 comment on peut les obtenir.

**99. Cas où il existe des forces réparties d'une manière continue.** — Le cas où il existe des forces réparties d'une manière continue peut être considéré comme la limite de celui qu'on vient d'examiner. Pour passer de l'un à l'autre, il suffit d'imaginer que les diverses forces considérées au n° 98 décroissent de plus en plus et qu'en même temps leurs points d'application

se rapprochent indéfiniment les uns des autres. Quelle que soit la grandeur des forces et la distance des points sur lesquels elles agissent, la poussée horizontale s'obtiendra toujours en faisant la somme des poussées dues aux actions séparées des diverses forces élémentaires. Par conséquent, lorsqu'il s'agira d'une répartition continue, on devra chercher l'intégrale d'une poussée infiniment petite entre des limites déterminées.

Supposons, par exemple, qu'il y ait une charge répartie d'une manière continue entre les sections normales qui font avec la verticale les angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$ ; soit  $F d\theta$  la force qui sollicite la partie de la pièce dont la fibre élémentaire moyenne correspond à l'angle  $d\theta$ ; soit en outre  $dQ$  la poussée infiniment petite qui serait exercée sur l'un des appuis dans le cas où la force  $F d\theta$  existerait seule. Cette poussée  $dQ$  se calculera au moyen des formules (1), (2) et (3), en faisant la somme de trois poussées dues aux deux composantes de  $F d\theta$  suivant les axes coordonnés, et au couple provenant du transport de cette force au centre d'élasticité de la section sur laquelle elle agit. On trouve ainsi, en désignant par  $k, m, n$  des fonctions connues de  $\theta$ ,

$$dQ = (k + m + n) F d\theta;$$

d'où l'on tire, pour la poussée due à l'ensemble des forces  $F d\theta$ ,

$$Q = \int_{\theta_1}^{\theta_2} (k + m + n) F d\theta.$$

Un procédé approximatif, qui sera souvent susceptible d'être appliqué avec avantage, consisterait à partager la portion de pièce comprise entre les sections répondant aux angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$ , en plusieurs parties, pour lesquelles on déterminerait à part l'intensité et le point d'application de la résultante des charges. Dans le cas où l'on aurait eu soin de prendre le nombre de ces parties assez grand pour que chacune d'elles ne répondît qu'à une faible fraction de la pièce entière, on pourrait négliger dans cette étendue les petites variations des quantités  $k, m, n$  et déterminer la poussée comme si l'on avait une série de forces discontinues dont chacune serait une des résultantes partielles par lesquelles on aurait remplacé la force totale. Par exemple si l'arc supportait une charge d'eau, on partagerait la fibre



moyenne en quinze parties, ou un nombre moindre, suivant le degré d'approximation désiré ; on chercherait, par les procédés connus, la pression totale répondant à chacune de ces parties, et on regarderait l'ensemble de ces résultantes comme pouvant être substitué à la charge primitive. De cette manière, le problème est ramené aux termes du n° 98.

Nous allons donner quelques exemples de la détermination des poussées horizontales par une intégration.

100. PREMIER EXEMPLE. *Poussée produite par le poids de l'arc ou par un poids uniformément réparti sur une certaine portion de sa longueur.* — L'exemple qui se présente naturellement le premier consiste dans la recherche d'une poussée horizontale dont nous avons fait abstraction tout à l'heure : nous voulons parler de celle qui est due au poids propre de l'arc. Cette question est un cas particulier de celle qui a pour objet de trouver la poussée horizontale produite par un poids réparti uniformément, suivant la longueur de la fibre moyenne, entre deux points quelconques de l'arc : c'est ce problème plus général que nous allons résoudre d'abord.

Soient  $p$  le poids qui agit sur l'unité de longueur de la fibre moyenne,  $\theta_1$  et  $\theta_2$  les angles limites entre lesquels agit la charge totale exprimée par  $p\rho(\theta_2 - \theta_1)$ . Nous supposons que le poids élémentaire  $p\rho d\theta$ , qui correspond à une portion d'arc comprise entre les angles  $\theta$  et  $\theta + d\theta$ , est appliqué à la fibre moyenne. C'est ce qui arrive, par exemple, si l'on ne considère que le poids propre d'un arc homogène ; mais cela ne serait pas rigoureusement vrai si l'on y ajoutait une surcharge uniforme reposant directement sur les points les plus élevés de la pièce. Chaque élément de cette surcharge, agissant au point supérieur d'une section inclinée, devrait être reporté sur la fibre moyenne en un point n'appartenant pas à sa propre verticale, ce qui donnerait lieu en même temps à l'introduction d'un couple. Toutefois, en pratique, on conçoit bien que, eu égard aux incertitudes de la théorie, il ne convient pas de s'arrêter à d'aussi minutieux détails.

Cela posé, la poussée infiniment petite  $dQ$ , produite par le poids  $p\rho d\theta$  qui charge l'élément  $\rho d\theta$  de la fibre moyenne,

aura pour valeur, d'après la formule (1) (n° 94),

$$dQ = \frac{A - \frac{1}{2} \frac{r^2}{a^2} \sin^2 \varphi (\sin^2 \varphi - \sin^2 \theta)}{B + \frac{r^2}{a^2} \sin^2 \varphi (\varphi + \sin \varphi \cos \varphi)} p \rho d\theta.$$

Chassant le dénominateur et intégrant, après avoir divisé les deux membres par  $p\rho$ , on trouvera

$$\begin{aligned} & \frac{Q}{p\rho} \left[ B + \frac{r^2}{a^2} \sin^2 \varphi (\varphi + \sin \varphi \cos \varphi) \right] \\ &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} A d\theta - \frac{1}{2} \frac{r^2}{a^2} \sin^2 \varphi \left[ (\theta_2 - \theta_1) \sin^2 \varphi - \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin^2 \theta d\theta \right]. \end{aligned}$$

Le calcul du second membre s'effectue au moyen des intégrales que nous connaissons déjà et de la suivante :

$$\int \theta \sin \theta d\theta = -\theta \cos \theta + \int \cos \theta d\theta = -\theta \cos \theta + \sin \theta;$$

il donne, pour déterminer la poussée totale cherchée, la relation

$$\begin{aligned} & \left[ B + \frac{r^2}{a^2} \sin^2 \varphi (\varphi + \sin \varphi \cos \varphi) \right] \frac{Q}{p\rho} \\ &= \left( \frac{1}{2} \sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi - \varphi \sin \varphi \cos \varphi - \frac{1}{4} \right) (\theta_2 - \theta_1) \\ &+ \frac{1}{4} (\sin \theta_2 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \cos \theta_1) + 2 \cos \varphi (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \\ &- \cos \varphi (\theta_2 \cos \theta_2 - \theta_1 \cos \theta_1) \\ &- \frac{1}{2} \frac{r^2}{a^2} \sin^2 \varphi \left[ \begin{aligned} & (\theta_2 - \theta_1) \left( \sin^2 \varphi - \frac{1}{2} \right) \\ & + \frac{1}{2} \sin \theta_2 \cos \theta_2 - \frac{1}{2} \sin \theta_1 \cos \theta_1 \end{aligned} \right]. \end{aligned}$$

Cette formule fait connaître la poussée horizontale due au poids propre de l'arc : pour cela il faut mettre au lieu de  $p$  le poids d'un prisme droit ayant même section transversale et un mètre de hauteur, et faire en même temps  $\theta_2 = \varphi$ ,  $\theta_1 = -\varphi$ .

Si l'on pose

$$C = \frac{1}{4} - \frac{5}{2} \cos^2 \varphi - \varphi \sin \varphi \cos \varphi + \frac{9}{4} \frac{\sin \varphi}{\varphi} \cos \varphi,$$

$$D = \frac{1}{2} \left( \sin^2 \varphi - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sin \varphi}{\varphi} \cos \varphi \right),$$

on obtient la formule suivante, applicable d'ailleurs à tous les cas où l'arc entier supporterait une charge uniformément répartie sur sa longueur :

$$(5) \quad Q = 2p\rho\varphi \frac{C - D \frac{r^2}{a^2} \sin^2 \varphi}{B + \frac{r^2}{a^2} \sin^2 \varphi (\varphi + \sin \varphi \cos \varphi)}.$$

**101. DEUXIÈME EXEMPLE.** *Poussée produite par une charge uniformément répartie suivant l'horizontale.* — Lorsque la charge sera répartie uniformément suivant l'horizontale, en appelant  $p$  celle qui répond à l'unité de longueur mesurée sur la projection horizontale, l'élément de fibre moyenne  $\rho d\theta$ , qui a pour longueur projetée  $\rho \cos \theta d\theta$ , supportera le poids  $p\rho \cos \theta d\theta$ . La poussée produite par ce poids sera (n° 94)

$$dQ = p\rho \cos \theta d\theta \frac{A - \frac{1}{2} \frac{r^2}{a^2} \sin^2 \varphi (\sin^2 \varphi - \sin^2 \theta)}{B + \frac{r^2}{a^2} \sin^2 \varphi (\varphi + \sin \varphi \cos \varphi)}.$$

Pour avoir la poussée totale due à la somme des charges  $p\rho \cos \theta d\theta$  répartie d'une manière continue sur la portion d'arc comprise entre les angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$ , on intègre cette expression entre les limites  $\theta_1$  et  $\theta_2$ . Cela conduit à la recherche d'une seule intégrale que nous n'avons pas déjà employée : c'est  $\int \theta \sin \theta \cos \theta d\theta$ . Or l'intégration par parties donne

$$\begin{aligned} \int \theta \sin \theta \cos \theta d\theta &= \frac{1}{2} \theta \sin^2 \theta - \frac{1}{2} \int \sin^2 \theta d\theta \\ &= \frac{1}{2} \theta \sin^2 \theta - \frac{1}{4} \theta + \frac{1}{4} \sin \theta \cos \theta. \end{aligned}$$

On trouve donc facilement la poussée demandée, qui est

exprimée par  $\int_{\theta_1}^{\theta_2} dQ$ ; elle sera fournie par l'équation

$$\begin{aligned} & \left[ B + \frac{r^2}{a^2} \sin^2 \varphi (\varphi + \sin \varphi \cos \varphi) \right] \frac{Q}{p\rho} \\ &= \left( \frac{1}{2} \sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi - \varphi \sin \varphi \cos \varphi \right) (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \\ & - \frac{1}{6} (\sin^3 \theta_2 - \sin^3 \theta_1) + \frac{1}{4} \cos \varphi (\theta_2 - \theta_1) \\ & + \frac{1}{2} \cos \varphi (\theta_2 \sin^2 \theta_1 - \theta_1 \sin^2 \theta_2) + \frac{3}{4} \cos \varphi (\sin \theta_2 \cos \theta_1 - \sin \theta_1 \cos \theta_2) \\ & - \frac{1}{2} \frac{r^2}{a^2} \sin^2 \varphi \left[ (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \sin^2 \varphi - \frac{1}{3} (\sin^3 \theta_2 - \sin^3 \theta_1) \right]. \end{aligned}$$

Lorsque l'arc entier se trouve chargé d'un poids réparti uniformément suivant une parallèle à la corde, il faut faire  $\theta_1 = -\varphi$ ,  $\theta_2 = \varphi$ ; en remplaçant  $\rho$  par  $\frac{a}{\sin \varphi}$  et posant

$$C' = -\frac{1}{4} + \frac{7}{12} \sin^2 \varphi + \frac{1}{4} \frac{\varphi}{\sin \varphi} \cos \varphi - \frac{1}{2} \varphi \sin \varphi \cos \varphi,$$

on obtient la valeur suivante de la poussée :

$$(6) \quad Q = 2pa \frac{C' - \frac{1}{3} \frac{r^2}{a^2} \sin^4 \varphi}{B + \frac{r^2}{a^2} \sin^2 \varphi (\varphi + \sin \varphi \cos \varphi)}.$$

### § III. — Détails sur la détermination de la poussée produite par des poids et par une dilatation indépendante des charges.

102. *Remarques préliminaires au sujet de la formule (1) du n° 94.* — Cette formule a une importance particulière, parce qu'elle donne la poussée horizontale produite par un poids isolé agissant sur un arc circulaire à section constante et dont la déformation est plane : il en résulte, en effet, comme on l'a vu au n° 98, qu'elle donne aussi la poussée due à un ensemble de poids distribués d'une manière quelconque, ce qui est incontestablement le cas le plus fréquent dans la pratique. Aussi

nous allons d'abord étudier cette formule avec tous les détails nécessaires pour en rendre l'application facile.

Si nous posons, pour abréger,

$$\lambda = \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \varphi (\sin^2 \varphi - \sin^2 \theta)}{A}, \quad \lambda' = \frac{\sin^2 \varphi (\varphi + \sin \varphi \cos \varphi)}{B},$$

la formule (1) pourra s'écrire ainsi :

$$Q = n \frac{A}{B} \left( \frac{1 - \lambda \frac{r^2}{a^2}}{1 + \lambda' \frac{r^2}{a^2}} \right).$$

Or le rapport  $\frac{r^2}{a^2}$  est toujours très-petit. En effet,  $r^2$  désigne le rayon de gyration de la section transversale par rapport à l'horizontale passant au centre d'élasticité; ce rayon de gyration est inférieur ou, au plus, égal à la moitié de la hauteur  $h$  de la section, mesurée perpendiculairement à cette horizontale, c'est-à-dire dans le sens parallèle au rayon de la fibre moyenne (n° 87); on a donc

$$r < \frac{h}{2}, \text{ et, par suite, } \frac{r^2}{a^2} < \left( \frac{h}{2a} \right)^2.$$

Ainsi le rapport  $\frac{r^2}{a^2}$  est inférieur au carré du rapport de la hauteur  $h$  à l'ouverture de l'arc; et comme il est fort rare que le rapport  $\frac{h}{2a}$  atteigne 0,05, dans les constructions de quelque importance au point de vue des dimensions, on peut regarder le nombre 0,0025 comme étant la limite supérieure de  $\frac{r^2}{a^2}$ . A l'appui de cette conclusion, nous donnerons ici la valeur du rapport dont il s'agit dans les arcs de divers ponts existants ou projetés, en observant toutefois que quelques-uns des nombres indiqués dans la dernière colonne du tableau suivant n'ont pu, faute de données suffisantes, être calculés que par approximation.

NOMS DES PONTS.	OUVERTURE	HAUTEUR de la section d'un arc.	RAPPORT $\frac{r^2}{a^2}$
Viaduc de Tarascon, sur le Rhône...	m 59,99	m 1,70	0,000336
Pont du Carrousel, à Paris.....	47,67	0,85	0,000106
Pont de Brest (projet de M. Tritschler).	105,83	3,00	0,000269
Viaduc de Nevers (chemin de fer du Centre).....	42,48	1,15	0,000356
Viaduc de Lormont (chemin de fer de Bordeaux).....	13,00	0,50	0,000795
Pont de Frémur (Maine-et-Loire)...	20,25	0,55	0,000358
Pont sur le canal de la Marne au Rhin (route impériale n° 74, Meurthe).	16,66	0,55	0,000363

La petitesse du rapport  $\frac{r^2}{a^2}$ , qui dans aucun des exemples variés du tableau ci-dessus n'approche du chiffre limite 0,0025, fait comprendre que l'expression  $Q = \pi \frac{A}{B}$  serait déjà, dans la plupart des cas, une valeur approximative de la poussée due au poids  $\pi$  : c'est pour cette raison que nous la regardons comme la partie principale de cette poussée. Les deux quantités  $1 - \lambda \frac{r^2}{a^2}$ ,  $1 + \lambda' \frac{r^2}{a^2}$  sont considérées comme des coefficients de correction dont nous apprécierons plus loin l'influence.

103. *Tables faisant connaître la partie principale de la poussée due à un poids isolé.* — Le coefficient  $\frac{A}{B}$  dépend seulement de deux variables  $\varphi$  et  $\theta$ , qui entrent dans son expression d'une manière assez compliquée. On simplifiera beaucoup le calcul de ce coefficient si l'on en construit une table à double entrée, dont les arguments seront  $\varphi$  et  $\theta$ . Pour y arriver le plus simplement possible, voici comment on procédera.

Soit  $m$  le rapport  $\frac{\theta}{\varphi}$ ; le numérateur  $A$  ne sera plus fonction que de  $m$  et de  $\varphi$ , et on obtiendra sans peine son développement au moyen des séries connues du sinus et du cosinus. On



trouvera ainsi

$$\begin{aligned} \frac{A}{1-m^2} = & (5-m^2) \frac{\varphi^4}{1.2.3.4} - (49+34m^2-11m^4) \frac{\varphi^6}{1.2.3.4.5.6} \\ & + (321+293m^2+83m^4-57m^6) \frac{\varphi^8}{1.2.3\dots 8} \\ & - (1793+1748m^2+1118m^4+68m^6-247m^8) \frac{\varphi^{10}}{1.2.3\dots 10} \\ & + \left( \begin{array}{l} 9217+9151m^2+7666m^4+3046m^6 \\ -419m^8-1013m^{10} \end{array} \right) \frac{\varphi^{12}}{1.2.3\dots 12} \\ & - \dots \end{aligned}$$

Le dénominateur B est uniquement fonction de  $\varphi$  et a pour développement

$$B = \frac{4}{15} \varphi^3 \left( 1 - \frac{4}{21} \varphi^2 + \frac{1}{63} \varphi^4 - \frac{8}{10395} \varphi^6 + \frac{2}{81081} \varphi^8 - \dots \right);$$

on tire de là, par une division,

$$\begin{aligned} \frac{A}{B(1-m^2)} = & (5-m^2) \frac{5}{32\varphi} - (143+278m^2-77m^4) \frac{\varphi}{1344} \\ & - (635+2183m^2-4207m^4+1197m^6) \frac{\varphi^3}{225792} \\ & - \left( \begin{array}{l} 51347+252932m^2-774158m^4 \\ +563332m^6-133133m^8 \end{array} \right) \frac{\varphi^5}{521579520} \\ & - \left( \begin{array}{l} 1770765+12871059m^2 \\ -51872366m^4+55663062m^6 \\ -25823343m^8+4516967m^{10} \end{array} \right) \frac{\varphi^7}{569564835840} \\ & - \dots \end{aligned}$$

Dans cette série multipliée par  $1-m^2$ , on substituera pour  $m$  diverses valeurs, telles que

$$0, \quad \frac{1}{20}, \quad \frac{2}{20}, \quad \frac{3}{20}, \dots, \frac{18}{20}, \quad \frac{19}{20}, \quad 1,$$

et l'on aura vingt séries correspondantes dans lesquelles on mettra des valeurs de  $\varphi$  croissantes depuis 0 jusqu'à  $\frac{\pi}{2}$ . On aura formé ainsi la table qu'il s'agissait de construire.

Cette table, sur le calcul de laquelle nous croyons inutile de nous appesantir davantage (\*), se trouve à la fin du Cours. L'angle  $\varphi$  est défini par son rapport  $\frac{2\varphi}{\pi}$  à l'angle droit, et  $\theta$  par le rapport  $m$ . Quand  $\theta$  et  $\varphi$  sont donnés, on calcule d'abord ces deux rapports et on cherche le premier dans la première colonne verticale à gauche de chaque page; on cherche de même le second dans l'en-tête des colonnes; on suit la ligne horizontale jusqu'à ce qu'on arrive dans la colonne verticale surmontée du nombre  $m$  donné, et on lit alors le coefficient cherché.

Exemple : pour  $\frac{2\varphi}{\pi} = 0,48$ ,  $m = 0,10$ , on aurait  $\frac{A}{B} = 0,942$ .

Si les arguments n'étaient pas exactement dans la table, on procéderait par interpolations; nous en donnerons plus loin un exemple détaillé.

Lorsqu'on a trouvé  $\frac{A}{B}$ , il suffit de multiplier ce nombre par  $\pi$  pour avoir ce que nous appelons la partie principale de la poussée produite par le poids  $\pi$ .

104. *Du coefficient de correction*  $1 - \lambda \frac{r^2}{a^2}$ . — La quantité  $\lambda$ , comme on le voit par l'expression même qui la définit (n° 102), est une fonction de  $\theta$  et  $\varphi$ . Si on calcule ses valeurs correspondantes à des valeurs données des deux variables dont elle dépend, il sera aisé de reconnaître :

1°. Que pour une valeur donnée de  $\varphi$ , le minimum  $\lambda_0$ , toujours positif, répond à  $\theta = 0$ , et le maximum  $\lambda_1$  à  $\theta = \varphi$ ;

2°. Que le rapport  $\frac{\lambda_1}{\lambda_0}$ , fonction de  $\varphi$  seulement, est toujours compris entre les limites  $\frac{5}{4}$  et 1, dont la première répond à  $\varphi = 0$ , et la seconde à  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ;

---

(\*) Pour plus de détails sur ce sujet, et en général sur ceux qui composent ce paragraphe, nous renvoyons encore le lecteur à nos *Recherches analytiques*, déjà citées page 111.

3°. Que le maximum de  $\lambda_1$ , c'est-à-dire le maximum maximum de  $\lambda$ , est égal à 3, valeur de  $\lambda_1$  pour  $\varphi = 0$  (\*).

Maintenant rappelons-nous ce qui a été dit (n° 102) de l'ordre de grandeur de  $\frac{r^2}{a^2}$ . Ce nombre ne peut guère dépasser 0,0025, et même on peut dire que généralement il n'atteindra pas 0,001. Donc si l'on négligeait entièrement la correction représentée par le coefficient  $1 - \lambda \frac{r^2}{a^2}$ ,  $\lambda$  étant inférieur à 3, on ne commettrait au plus qu'une erreur relative de 0,0075 dans l'évaluation de la poussée horizontale, et dans la plupart des cas cette erreur serait inférieure à 0,003. Nous avons cependant admis qu'on voulût effectuer cette correction; mais, eu égard à ce que pour une valeur donnée de  $\varphi$  le maximum de  $\lambda$  ne surpasse pas le minimum de plus d'un quart de la valeur de celui-ci, au lieu de tenir compte des variations de  $\lambda$  en fonction de  $\theta$ , il est très-légitime de substituer à la valeur véritable la moyenne de celles qui se produisent lorsque  $\theta$  varie,  $\varphi$  restant constant. En effet, le maximum de l'erreur relative commise sur la correction sera limité à  $\frac{1}{2} \left( \frac{5}{4} - 1 \right)$  ou  $\frac{1}{8}$ , et comme la correction est au plus 0,0075, l'erreur sera nécessairement au-dessous de 0,001 de la poussée. En supposant  $\frac{r^2}{a^2} = 0,001$ , ce chiffre se réduit encore à 0,000375, ce qui n'aurait aucune importance dans les applications.

Ainsi, lorsqu'on adopte la correction moyenne dont nous venons de parler, il est inutile de considérer la valeur de  $\theta$ , c'est-à-dire la position occupée sur l'arc par le poids qui produit la poussée; donc cette correction moyenne devra être appliquée à la poussée produite par des poids distribués d'une manière quelconque, isolés ou répartis suivant une loi continue, après que le calcul en aura été fait dans l'hypothèse de

---

(\*) Ces propriétés peuvent être démontrées directement par l'analyse. Nous supprimons ici la démonstration, pour ne pas nous arrêter trop longtemps sur des points secondaires.

$\frac{r^2}{a^2} = 0$ . Le seul argument qui fera varier la correction sera l'angle  $\varphi$ , qui caractérise la fibre moyenne de la pièce dans chaque cas particulier.

Pour avoir la correction moyenne, on pourrait prendre l'expression

$$1 - \frac{1}{2} (\lambda_0 + \lambda_1) \frac{r^2}{a^2};$$

mais, au lieu de cette moyenne arithmétique, il est plus commode et évidemment d'une exactitude aussi satisfaisante, de calculer la correction analogue qui s'applique à un poids réparti uniformément sur la longueur de l'arc; car on conçoit que l'on doit obtenir ainsi une espèce de moyenne entre toutes les valeurs qui se rapporteraient aux diverses positions d'un poids sur la pièce, sans qu'on ait attribué plus d'influence à un angle  $\theta$  qu'à un autre.

Or, le coefficient  $\lambda$ , d'après cette définition, est le rapport du facteur  $\frac{r^2}{a^2}$  dans le numérateur du coefficient de la poussée produite par un poids uniformément réparti, avec l'ensemble des termes indépendants de  $\frac{r^2}{a^2}$ . Ainsi, la formule (5) du n° 100, dans laquelle on rétablirait, au lieu de C et D, leurs valeurs en fonctions de  $\varphi$ , fera connaître  $\lambda$ :

$$\lambda = \frac{\frac{1}{2} \sin^2 \varphi \left( \sin^2 \varphi - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \varphi \frac{\sin \varphi}{\varphi} \right)}{\frac{1}{4} - \frac{5}{2} \cos^2 \varphi - \varphi \sin \varphi \cos \varphi + \frac{9}{4} \cos \varphi \frac{\sin \varphi}{\varphi}},$$

rapport qui, par suite du procédé employé pour établir la formule (5), n'est autre chose que celui des deux termes de l'expression générale

$$\frac{\frac{1}{2} \sin^2 \varphi (\sin^2 \varphi - \sin^2 \theta)}{\Lambda},$$

dont nous venons de nous occuper, intégrés chacun relativement à  $\theta$ , entre les limites  $-\varphi$  et  $\varphi$ . Les diverses valeurs de  $\lambda$

en fonction de sa variable  $\varphi$  sont données par une des tables qui font suite au Cours; elles ont été calculées au moyen de l'expression simplifiée et approximative

$$\lambda = \left[ \frac{\sin \varphi}{\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)} \right]^2,$$

dont l'exactitude peut être vérifiée par le développement en série de la valeur exacte (\*).

103. *Du coefficient de correction*  $\frac{1}{1 + \lambda' \frac{r^2}{a^2}}$ . — La valeur prin-

pale de la poussée produite par des poids quelconques ne doit pas seulement subir la correction que nous avons étudiée dans le numéro précédent, elle doit encore être multipliée par

$$\frac{1}{1 + \lambda' \frac{r^2}{a^2}} \text{ (n° 102), } \lambda' \text{ étant égal à}$$

$$\frac{\sin^2 \varphi (\varphi + \sin \varphi \cos \varphi)}{\varphi + 2\varphi \cos^2 \varphi - 3 \sin \varphi \cos \varphi}.$$

C'est donc une fonction de la seule variable  $\varphi$  : la table faisant connaître ses valeurs sera également donnée à la fin du Cours.

Si l'on n'avait pas à sa disposition la table dont il s'agit, ou si l'on avait besoin d'une expression algébrique de  $\lambda'$ , on pourrait employer, comme approximation, une formule simple et facile à retenir. On y est conduit en remarquant que  $\lambda'$  ne prend

(\*) Voici cette série :

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{5}{2} \left( \frac{\sin \varphi}{\varphi} \right)^2 \left( 1 - \frac{2}{105} \varphi^2 + \frac{1}{441} \varphi^4 - \dots \right) \\ &= \frac{10}{\pi^2} \left( 1 - \frac{2}{105} \varphi^2 + \frac{1}{441} \varphi^4 - \dots \right) \left[ \frac{\sin \varphi}{\left(\frac{2\varphi}{\pi}\right)} \right]^2; \end{aligned}$$

$\frac{10}{\pi^2}$  est un peu supérieur à 1; la série entre parenthèses est un peu plus petite : ce qui justifie l'expression adoptée, surtout quand on a égard au peu d'importance de la correction dont il s'agit.

une grande valeur et la correction une certaine importance que lorsque  $\varphi$  est petit. En effet, lorsque  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , l'expression non développée de  $\lambda'$  donne  $\lambda' = 1$ , et comme cette quantité doit être multipliée par  $\frac{r^2}{a^2}$ , qui est très-petit, le coefficient de

correction  $\frac{1}{1 + \lambda' \frac{r^2}{a^2}}$  diffère peu de 1. Or si l'on attribue à  $\varphi$

une petite valeur, on pourra poser sans erreur sensible  $\varphi = 2 \operatorname{tang} \frac{1}{2} \varphi$ , et se borner à prendre le premier terme du développement de  $\lambda'$  en fonction de  $\varphi$  (\*); on trouverait alors

$$\lambda' = \frac{15}{8 \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} \varphi},$$

et le coefficient de correction serait représenté par

$$\frac{1}{1 + \frac{15}{8} \frac{r^2}{a^2 \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} \varphi}};$$

ou bien, comme  $a \operatorname{tang} \frac{1}{2} \varphi$  n'est autre chose que la flèche  $f$  de l'arc, on aurait

$$\frac{1}{1 + \lambda' \frac{r^2}{a^2}} = \frac{1}{1 + \frac{15}{8} \frac{r^2}{f^2}},$$

expression fort simple de ce coefficient.

Afin de mettre le lecteur à même d'en apprécier l'exactitude, nous donnons ci-après un tableau dans lequel se trouvent, pour diverses valeurs de  $\frac{2\varphi}{\pi}$ , les valeurs correspondantes de

(\*) Ce développement est ainsi exprimé :

$$\lambda' = \frac{15}{2\varphi^2} \left( 1 - \frac{10}{21} \varphi^2 + \frac{17}{147} \varphi^4 - \frac{8254}{509355} \varphi^6 + \frac{305447}{231756525} \varphi^8 - \dots \right).$$

I.

16



$1 + \lambda' \frac{r^2}{a^2}$  et de  $1 + \frac{15}{8} \frac{r^2}{f^2}$ . Lorsque  $\frac{r^2}{a^2}$  atteint la limite 0,0025, la plus grande erreur relative n'est que de  $\frac{1}{200}$  environ; ce chiffre s'abaisse à  $\frac{1}{487}$  en prenant  $\frac{r^2}{a^2} = 0,001$ ; par conséquent la formule approchée est tout à fait acceptable dans la pratique.

VALEURS de $\frac{2\varphi}{\pi}$	VALEURS de $\frac{15}{8 \tan^2 \frac{1}{2} \varphi}$	VALEURS exactes de $\lambda'$	$1 + \frac{15}{8} \frac{r^2}{f^2}$ pour $\frac{r^2}{a^2} = 0,0025$	$1 + \lambda' \frac{r^2}{a^2}$ pour $\frac{r^2}{a^2} = 0,0025$	$1 + \frac{15}{8} \frac{r^2}{f^2}$ pour $\frac{r^2}{a^2} = 0,001$	$1 + \lambda' \frac{r^2}{a^2}$ pour $\frac{r^2}{a^2} = 0,001$
0,12	209,7	207,6	1,5242	1,5190	1,2097	1,2076
0,20	74,7	72,5	1,1868	1,1813	1,0747	1,0725
0,30	32,5	30,4	1,0813	1,0760	1,0325	1,0304
0,40	17,8	15,8	1,0445	1,0395	1,0178	1,0158
0,50	10,9	9,1	1,0273	1,0228	1,0109	1,0091
0,60	7,2	5,6	1,0180	1,0140	1,0072	1,0056
0,70	5,0	3,5	1,0125	1,0088	1,0050	1,0035
0,80	3,5	2,3	1,0088	1,0058	1,0035	1,0023
0,90	2,6	1,5	1,0065	1,0038	1,0026	1,0015
1,00	1,9	1,0	1,0047	1,0025	1,0019	1,0010

Les chiffres du tableau ci-dessus ne servent pas seulement à montrer l'exactitude avec laquelle le coefficient  $1 + \lambda' \frac{r^2}{a^2}$  peut être remplacé par  $1 + \frac{15}{8} \frac{r^2}{f^2}$ ; ils font encore ressortir l'importance que prend dans certains cas la correction dont il s'agit ici. Par exemple, en prenant un arc surbaissé au  $\frac{1}{21}$  (ce qui répond à peu près à  $\varphi = 0,12 \frac{\pi}{2}$ , ou à  $\frac{2\varphi}{\pi} = 0,12$ ), on voit que la partie principale de la poussée doit être multipliée par  $\frac{1}{1,519}$ , c'est-à-dire par moins de  $\frac{2}{3}$ ; de sorte qu'en ne tenant pas compte de cette correction, on commettrait une erreur supérieure à 33 pour 100.

Il est bon cependant d'ajouter qu'un pareil chiffre suppose des circonstances qui paraissent devoir se réaliser rarement, savoir :  $\frac{r^2}{a^2}$  égal à la valeur limite 0,0025, et un surbaissement plus grand que ceux que l'on adopte d'habitude. Mais en portant  $\frac{2\varphi}{\pi}$  à 0,20, ou 0,30, valeurs qui correspondent à des surbaissements de  $\frac{1}{12}$  ou  $\frac{1}{8}$  environ, et réduisant  $\frac{r^2}{a^2}$  à 0,001, afin de nous rapprocher des chiffres ordinaires, nous voyons que  $1 + \lambda' \frac{r^2}{a^2}$  est encore supérieur à 1,07 et 1,03, et l'on commettrait, en n'en tenant pas compte, une erreur de 7 ou de 3 pour 100. C'est ce qui pourrait avoir des inconvénients dans beaucoup de circonstances où il est nécessaire de prendre la valeur exacte de la poussée, et notamment lorsque l'on veut calculer l'abaissement du sommet de l'arc par l'effet des poids qu'il supporte.

106. *Table donnant en bloc la valeur du coefficient de cor-*

*rection*  $\frac{1 - \lambda \frac{r^2}{a^2}}{1 + \lambda' \frac{r^2}{a^2}}$ . — Quand on a remplacé  $\lambda$  par la valeur

moyenne dont il est question au n° 104, il est, ainsi que  $\lambda'$ , fonction de  $\varphi$  seulement. Donc le coefficient de correction

$\frac{1 - \lambda \frac{r^2}{a^2}}{1 + \lambda' \frac{r^2}{a^2}}$  dépend de deux variables,  $\frac{r^2}{a^2}$  et  $\varphi$ . Après avoir ob-

tenu numériquement  $\lambda$  et  $\lambda'$  pour les diverses grandeurs de  $\varphi$ , il est aisé de faire une table à double entrée pour le coefficient dont il s'agit. Cette table figure parmi celles que nous donnons à la fin du Cours.

107. *Table pour le calcul de la formule qui donne la poussée due à une dilatation indépendante des charges; simplification de cette formule.* — La poussée produite par une dilatation indépendante des charges doit être calculée au moyen de la

formule (4) du n° 97, qui peut s'écrire sous la forme

$$Q = \frac{2\tau e \sin^3 \varphi \frac{r^2}{a^2}}{\varphi + 2\varphi \cos^2 \varphi - 3 \sin \varphi \cos \varphi} \cdot \frac{1}{1 + \lambda' \frac{r^2}{a^2}}$$

$$= \tau e \frac{r^2}{a^2} \frac{F}{1 + \lambda' \frac{r^2}{a^2}},$$

en conservant à  $\lambda'$  la signification que nous lui avons donnée aux n°s 102 et 105, et posant, pour définir le coefficient  $F$ ,

$$F = \frac{2 \sin^3 \varphi}{\varphi + 2\varphi \cos^2 \varphi - 3 \sin \varphi \cos \varphi}.$$

$F$  est une fonction de  $\varphi$  seulement, dont on trouvera la table à la suite du Cours.

A défaut de tables, la formule précédente pourrait être remplacée par une formule beaucoup plus simple et suffisamment exacte pour les applications que l'on peut faire aux grands arcs métalliques en fer ou en fonte. Elle est fondée sur une remarque tout à fait analogue à celle qui nous a servi au n° 105 pour la simplification de  $1 + \lambda' \frac{r^2}{a^2}$ . On observera que, pour de petites valeurs de  $\varphi$ , le rapport  $\frac{F}{\lambda'}$ , dont l'expression est

$$\frac{F}{\lambda'} = \frac{2 \sin \varphi}{\varphi + \sin \varphi \cos \varphi},$$

diffère peu de l'unité, car on peut l'écrire

$$\frac{F}{\lambda'} = \frac{2}{\frac{\varphi}{\sin \varphi} + \cos \varphi}.$$

Or  $\frac{\varphi}{\sin \varphi}$  et  $\cos \varphi$  ont pour limite 1, quand  $\varphi$  décroît vers 0;

donc  $\frac{F}{\lambda'}$  a aussi 1 pour limite. Il en résulte que le développement de  $F$  en fonction de  $\varphi$  doit commencer, comme celui de

$\lambda'$ , par le terme  $\frac{15}{2\varphi^2}$  (\*). Par conséquent si la poussée due à la dilatation linéaire dont le coefficient est  $\tau$ , est modérée dans le cas de petites valeurs de  $\varphi$ , elle doit être très-faible lorsque  $\varphi$  est un peu plus rapproché de l'angle droit. C'est, au reste, ce que nous vérifierons plus en détail dans un instant. Dès lors on pourra remplacer  $F$  par  $\frac{15}{2\varphi^2}$  ou par  $\frac{15}{8 \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} \varphi}$  avec une er-

reur qui sera petite en même temps que  $\varphi$ , et qui ne deviendra notable qu'au moment où la poussée étant très-faible, il y aura peu d'inconvénient à l'évaluer sans beaucoup de rigueur.

Nous poserons donc, en remplaçant aussi  $1 + \lambda' \frac{r^2}{a^2}$  par sa valeur approchée (n° 103),

$$Q = \frac{15}{8} \cdot \frac{\tau e r^2}{a^2 \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} \varphi \left( 1 + \frac{15}{8} \frac{r^2}{f^2} \right)};$$

ou, à cause de  $f = a \operatorname{tang} \frac{1}{2} \varphi$ ,

$$Q = \frac{\tau e r^2}{r^2 + \frac{8}{15} f^2}.$$

Le tableau numérique ci-après montre la comparaison de la formule approchée avec la formule rigoureuse. Eu égard à la petitesse de l'erreur commise quand on remplace  $1 + \lambda' \frac{r^2}{a^2}$  par  $1 + \frac{15}{8} \frac{r^2}{f^2}$  (moins de  $\frac{1}{200}$ , d'après ce que nous avons vu au n° 103), nous nous sommes borné à comparer le coefficient  $F$  et l'expression simple  $\frac{15}{8 \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} \varphi}$  par laquelle on l'a remplacé.

(\*) Ce développement est

$$F = \frac{15}{2\varphi^2} \left( 1 - \frac{13}{42} \varphi^2 + \frac{197}{5880} \varphi^4 - \frac{2435}{162936} \varphi^6 + \dots \right).$$

VALEUR de $\frac{2\varphi}{\pi}$	VALEUR de $\frac{15}{8 \tan^2 \frac{1}{2} \varphi}$	VALEUR EXACTE du coefficient remplacé par $\frac{15}{8 \tan^2 \frac{1}{2} \varphi}$	DIFFÉRENCE des deux colonnes précédentes.	ERREUR RELATIVE.
0,12	209,7	208,8	0,9	0,0043
0,20	74,7	73,7	1,0	0,014
0,30	32,5	31,5	1,0	0,032
0,40	17,8	16,8	1,0	0,059
0,50	10,9	10,0	0,9	0,090
0,60	7,2	6,3	0,9	0,143
0,70	5,0	4,2	0,8	0,190
0,80	3,5	2,8	0,7	0,250
0,90	2,6	1,9	0,7	0,389
1,00	1,9	1,3	0,6	0,462

Il résulte de ce tableau que l'on prend une poussée toujours trop forte quand on se sert de la formule approximative et que l'erreur relative peut s'élever presque à moitié. Mais on va voir que cela n'a pas d'inconvénient lorsqu'il s'agit de faire une application à un arc métallique soutenant un pont ou une charpente.

Pour le montrer, rappelons-nous la signification de la quantité  $e$ . En appelant  $\omega$  l'un des éléments de la section de l'arc,  $E$  le coefficient d'élasticité longitudinale de cet élément, on a

$$e = \sum E \omega,$$

et, par suite,  $E_1$  étant le maximum de  $E$ , et  $\Omega$  la surface  $\sum \omega$ ,

$$e < E_1 \Omega.$$

Donc, en introduisant cette valeur dans l'expression de la poussée due à la dilatation de la fibre moyenne par des causes étrangères aux charges, on a aussi l'inégalité

$$Q < \tau E_1 \Omega \frac{r^2}{a^2} \cdot \frac{F}{1 + \lambda' \frac{r^2}{a^2}},$$

qui donne une limite de  $\frac{Q}{\Omega}$ , c'est-à-dire de la poussée par mètre carré de section.

Lorsque l'on prend un arc en fer,  $E$ , est environ  $2.10^{10}$ ; pour la fonte, le plus grand coefficient d'élasticité, parmi ceux que divers expérimentateurs ont donnés, est environ de  $12.10^9$ . Quant au rapport  $\frac{r^2}{a^2}$ , nous avons montré (n° 102) qu'il est inférieur à 0,0025, et même ordinairement à 0,001. Enfin la dilatation linéaire produite par la température est de 0,00122 pour le fer et 0,00111 pour la fonte, entre 0 et 100 degrés centigrades, ce qui, avec une variation de 25 degrés, donnerait respectivement pour  $\tau$  les nombres 0,000305 et 0,000278 : nous prendrons 0,0004 afin d'être plutôt en dessus qu'en dessous de la réalité. Ces nombres nous ont permis de calculer le tableau suivant, où les poussées sont exprimées en kilogrammes par millimètre carré de section.

VALEURS de $\frac{2\varphi}{\pi}$	LIMITE DE LA POUSSEE due à la dilatation linéaire de 0,0004 lorsque $\frac{r^2}{a^2} = 0,0025$ .		LIMITE DE LA POUSSEE due à la dilatation linéaire de 0,0004 lorsque $\frac{r^2}{a^2} = 0,001$ .	
	Fer.	Fonte.	Fer.	Fonte.
0,12	2,75	1,65	1,38	0,83
0,20	1,25	0,75	0,55	0,33
0,30	0,59	0,35	0,24	0,14
0,40	0,32	0,19	0,13	0,08
0,50	0,20	0,12	0,08	0,05
0,60	0,12	0,07	0,05	0,030
0,70	0,08	0,05	0,034	0,020
0,80	0,06	0,034	0,022	0,013
0,90	0,038	0,024	0,015	0,009
1,00	0,026	0,016	0,010	0,006

Maintenant, qu'on multiplie chaque nombre de ce tableau par le nombre placé à la même hauteur dans la dernière colonne du tableau précédent, on aura une série de produits représentant, pour les diverses valeurs de  $\varphi$ ,  $\frac{r^2}{a^2}$ ,  $\tau$  et  $E$ , que nous avons considérées, les limites des erreurs absolues commises dans l'évaluation de la poussée dont il s'agit lorsqu'on



emploie la formule approximative. On trouve les résultats suivants, que nous reproduisons dans l'ordre du dernier tableau, et qui expriment encore des kilogrammes par millimètre carré.

VALEURS de $\frac{2\varphi}{\pi}$	LIMITES SUPÉRIEURES des erreurs absolues sur la poussée lorsque $\tau = 0,0004$ et $\frac{r^2}{a^2} = 0,0025$ .		LIMITES SUPÉRIEURES des erreurs absolues sur la poussée lorsque $\tau = 0,0004$ et $\frac{r^2}{a^2} = 0,001$ .	
	Fer.	Fente.	Fer.	Fente.
0,12	0,012	0,007	0,006	0,004
0,20	0,017	0,010	0,008	0,004
0,30	0,019	0,011	0,008	0,004
0,40	0,019	0,011	0,008	0,005
0,50	0,018	0,011	0,007	0,005
0,60	0,017	0,010	0,007	0,004
0,70	0,016	0,010	0,006	0,004
0,80	0,015	0,009	0,006	0,003
0,90	0,014	0,009	0,006	0,003
1,00	0,012	0,007	0,005	0,003

La plus grande erreur absolue n'atteint donc pas 0<sup>k</sup>,02 par millimètre carré de la section transversale. Or une pareille force est complètement négligeable devant celles auxquelles on a l'habitude de soumettre les arcs métalliques dans les grandes constructions. Donc enfin il n'y aurait aucun inconvénient en pratique à se servir de la formule simplifiée

$$Q = \frac{\tau e r^2}{r^2 + \frac{8}{15} f^2},$$

lorsqu'on voudrait connaître la portion de la poussée d'un grand arc métallique spécialement due aux changements de température et au calage. Nous donnerons par la suite une table dont l'usage sera encore plus rapide; mais la formule simplifiée sera néanmoins utile pour des calculs où l'on se proposerait un autre but que la recherche de la poussée, et où l'on aurait besoin d'employer l'expression algébrique de cette force.

108. *Table pour le calcul des formules qui donnent les poussées dues à des poids uniformément répartis sur la longueur entière de la fibre moyenne ou de sa corde ; simplification de ces formules.* — Les poussées dont il s'agit étant produites par des poids, il faut, conformément à ce qu'on a vu aux nos 104 et 105, en calculer d'abord la valeur comme si  $r$  était nul : on obtiendra ainsi ce que nous appelons la partie principale de la poussée. Le résultat de ce premier calcul devra ensuite subir les corrections représentées par le coefficient

$$\frac{1 - \lambda \frac{r^2}{a^2}}{1 + \lambda' \frac{r^2}{a^2}} \text{ précédemment étudié.}$$

Quant à la partie principale, conformément aux formules (5) et (6) des nos 100 et 101, elle aura les expressions suivantes :

1°. Dans le cas d'un poids uniformément réparti sur la longueur entière de la fibre moyenne,

$$2p\rho\varphi \frac{\frac{1}{4} - \frac{5}{2}\cos^2\varphi - \varphi\sin\varphi\cos\varphi + \frac{9}{4}\frac{\sin\varphi}{\varphi}\cos\varphi}{\varphi + 2\varphi\cos^2\varphi - 3\sin\varphi\cos\varphi};$$

2°. Dans le cas d'un poids uniformément réparti suivant la longueur entière de la corde,

$$2pa \frac{-\frac{1}{4} + \frac{7}{12}\sin^2\varphi + \frac{1}{4}\frac{\varphi}{\sin\varphi}\cos\varphi - \frac{1}{2}\varphi\sin\varphi\cos\varphi}{\varphi + 2\varphi\cos^2\varphi - 3\sin\varphi\cos\varphi}.$$

Ces deux expressions sont, l'une et l'autre, le produit de la charge entière ( $2p\rho\varphi$  ou  $2pa$ ) par une certaine fonction de  $\varphi$ , c'est-à-dire qu'elles sont de la forme  $F' 2p\rho\varphi$ ,  $F'' 2pa$ . Le calcul en sera donc très-simple avec les tables des coefficients  $F'$  et  $F''$  que nous avons jointes à celles dont il a déjà été question.

Afin de pouvoir se passer des tables, et aussi pour certains problèmes dont le but final n'est pas la connaissance de la poussée, il n'est point sans utilité d'avoir les développements en série de  $F'$  et  $F''$  et les expressions simplifiées de ces coefficients. Le calcul des séries de  $F'$  et  $F''$  se conçoit sans peine ;

en voici le résultat :

$$F' = \frac{1}{2\varphi} \left( 1 - \frac{4}{21} \varphi^2 - \frac{2}{441} \varphi^4 - \frac{76}{509355} \varphi^6 - \frac{8}{1805765} \varphi^8 + \dots \right),$$

$$F'' = \frac{1}{2\varphi} \left( 1 - \frac{5}{42} \varphi^2 - \frac{23}{4410} \varphi^4 - \frac{41}{101871} \varphi^6 - \frac{17023}{463513050} \varphi^8 + \dots \right).$$

On peut remarquer encore que les quantités  $\varphi$ ,  $f$  et  $a$  sont liées par la relation

$$\tan \frac{1}{2} \varphi = \frac{f}{a},$$

d'où l'on déduit, par une formule connue,

$$\frac{1}{2} \varphi = \arctan \frac{f}{a} = \frac{f}{a} - \frac{1}{3} \frac{f^3}{a^3} + \frac{1}{5} \frac{f^5}{a^5} - \frac{1}{7} \frac{f^7}{a^7} + \dots;$$

substituant cette valeur dans  $F'$  et  $F''$ , on trouvera

$$F' = \frac{a}{4f} \left( 1 - \frac{3}{7} \frac{f^2}{a^2} + \frac{68}{735} \frac{f^4}{a^4} - \frac{7268}{169785} \frac{f^6}{a^6} + \dots \right),$$

$$F'' = \frac{a}{4f} \left( 1 - \frac{1}{7} \frac{f^2}{a^2} - \frac{2}{147} \frac{f^4}{a^4} + \frac{34}{3773} \frac{f^6}{a^6} - \dots \right).$$

Lorsque l'arc est surbaissé, c'est-à-dire quand  $\frac{f}{a}$  est petit, on peut se borner à prendre les deux premiers termes de chaque série; si de plus on néglige la correction  $1 - \lambda \frac{r^2}{a^2}$  et qu'on remplace  $1 + \lambda' \frac{r^2}{a^2}$  par  $1 + \frac{15}{8} \frac{r^2}{f^2}$  (nos 104 et 105), on aura, pour exprimer la poussée :

1°. Dans le cas de la charge uniformément répartie sur la longueur entière de la fibre moyenne,

$$Q = p \rho \varphi \cdot \frac{a}{2f} \left( \frac{1 - \frac{3}{7} \frac{f^2}{a^2}}{1 + \frac{15}{8} \frac{r^2}{f^2}} \right);$$

2°. Dans le cas de la charge uniformément répartie sur la

longueur  $2a$  de la corde,

$$Q = \frac{pa^2}{2f} \left( \frac{1 - \frac{1}{7} \frac{f^2}{a^2}}{1 + \frac{15}{8} \frac{r^2}{f^2}} \right).$$

109. *Comparaison de la poussée produite par un poids uniformément réparti sur la longueur entière de la fibre moyenne avec celle que produirait le même poids total uniformément réparti suivant la corde.* — Les poussées produites dans ces deux cas ne diffèrent que par les coefficients  $F'$  et  $F''$ ; leur rapport sera donc  $\frac{F'}{F''}$ ; soit en développant  $\frac{F'}{F''}$  en série

$$1 - \frac{1}{14} \varphi^2 - \frac{23}{2940} \varphi^4 - \frac{1427}{1358280} \varphi^6 - \dots$$

Le tableau suivant fait connaître les valeurs du rapport  $\frac{F'}{F''}$  correspondant à divers angles  $\varphi$ .

VALEURS de $\frac{2\varphi}{\pi}$	RAPPORT $\frac{F'}{F''}$	VALEURS de $\frac{2\varphi}{\pi}$	RAPPORT $\frac{F'}{F''}$	OBSERVATIONS.
0,12	0,997	0,60	0,930	Les trois dernières valeurs de $\frac{F'}{F''}$ ont été calculées directement, sans employer la série.
0,20	0,993	0,70	0,900	
0,30	0,984	0,80	0,863	
0,40	0,971	0,90	0,814	
0,50	0,953	1,00	0,750	

On voit que tant qu'il s'agit d'arcs dont le demi-angle au centre, désigné par  $\varphi$ , est inférieur à la moitié d'un angle droit, la poussée produite par un poids donné reste sensiblement la même quand on le suppose réparti uniformément, soit suivant la longueur de la fibre moyenne, soit suivant la corde. C'est donc avec raison qu'on regarde habituellement le poids propre de l'arc comme devant s'ajouter au poids du tablier, au poids d'épreuve; etc., pour donner un poids total par mètre courant de corde sur lequel on base le calcul de la poussée. Il n'y aurait d'intérêt à faire la distinction que dans certains problèmes où beaucoup de précision serait nécessaire, et où le poids propre de l'arc serait comparable à ceux qu'il supporte.

110. *Comparaison de la poussée avec la tension horizontale d'un câble de pont suspendu.* — Supposons un pont supporté par des arcs rigides et un pont suspendu ayant même flèche, même ouverture et chargé de la même manière. La charge (y compris le poids propre des arcs ou des câbles de suspension) consiste en un poids uniformément réparti suivant l'horizontale. Soient  $p$  ce poids rapporté au mètre courant,  $2a$  l'ouverture,  $f$  la flèche. La tension horizontale  $Q'$  dans l'ensemble des câbles de suspension aura pour valeur  $\frac{pa^2}{2f}$ , et la poussée  $Q$  des arcs sera donnée par les calculs du n° 108. On aura donc

$$\frac{Q}{Q'} = \left(1 - \frac{1}{7} \frac{f^2}{a^2} - \frac{2}{147} \frac{f^4}{a^4} + \dots\right) \frac{1 - \lambda \frac{r^2}{a^2}}{1 + \lambda' \frac{r^2}{a^2}}.$$

Cette formule montre d'une manière évidente que l'action horizontale sera toujours plus petite dans les arcs rigides que dans le système flexible des ponts suspendus; car on a le produit de deux facteurs plus petits que l'unité, à diviser par un facteur qui est au contraire plus grand que 1. Le rapport  $\frac{Q}{Q'}$  variera d'ailleurs avec  $\frac{r^2}{a^2}$  et avec l'angle  $\varphi$  qui détermine  $\frac{f}{a}$ ,  $\lambda$  et  $\lambda'$ . Le tableau suivant en donne une idée.

VALEURS de $\frac{2\varphi}{\pi}$	$\frac{f}{a} = \tan \frac{1}{2}\varphi$	VALEURS de $\lambda$ .	VALEURS de $\lambda'$ .	VALEURS DU RAPPORT $\frac{Q}{Q'}$ , POUR $\frac{r^2}{a^2} =$		
				0,000.	0,001.	0,0025.
0,12	0,09453	2,4	207,6	0,999	0,825	0,653
0,20	0,15838	2,4	72,5	0,996	0,806	0,838
0,30	0,24008	2,3	30,4	0,992	0,960	0,916
0,40	0,32492	2,2	15,8	0,985	0,967	0,943
0,50	0,41421	2,0	9,1	0,975	0,964	0,949
0,60	0,50953	1,8	5,6	0,962	0,956	0,945
0,70	0,61280	1,6	3,6	0,946	0,941	0,934
0,80	0,72654	1,4	2,3	0,922	0,918	0,913
0,90	0,85408	1,2	1,5	0,893	0,890	0,887
1,00	1,00000	1,0	1,0	0,849	0,847	0,845

111. *Exemples de la détermination d'une poussée au moyen des tables.* — Nous prendrons pour premier exemple le projet du pont de Brest présenté par M. Tritscher, dont nous nous sommes déjà occupé au n° 39. Le

lecteur voudra bien s'y reporter pour avoir la définition de la forme de l'arc et des poids qu'il supporte. La poussée ou réaction horizontale des appuis était supposée connue au n° 39; il s'agit ici de montrer comment le calcul a pu en être fait. Pour cela nous partagerons chaque moitié de l'arc, d'un côté de la verticale BG du sommet (*fig. 25*), en six parties, les points de division étant à des distances de BG (mesurées horizontalement) qui ont pour valeurs successives

$$10^m, \quad 20^m, \quad 28^m, \quad 36^m, \quad 44^m, \quad 52^m,915;$$

à égale distance des verticales extrêmes de chaque partie, se trouve la résultante des poids qui chargent cette partie: ces résultantes ont pour valeur en tonnes de 1000 kilogrammes,

$$31^t, \quad 31^t, \quad 89^t,2, \quad 89^t,2, \quad 89^t,2, \quad 99^t,4.$$

Nous allons déterminer la poussée comme si ces résultantes pouvaient être substituées aux forces élémentaires, ce qui ne doit produire qu'une faible altération (n° 99). Cherchons à cet effet les arguments nécessaires.

D'abord l'angle  $\varphi$  est de  $74^\circ 10' 24'',3$ ; par suite  $\frac{2\varphi}{\pi} = 0,824$ . Les angles  $\theta', \theta'', \theta''', \theta^{iv}, \theta^v, \theta^{vi}$  correspondant aux points d'application, sur la fibre moyenne, des résultantes partielles, s'obtiennent aisément; car ces points sont aux distances suivantes de la verticale BG :

$$5^m, \quad 15^m, \quad 24^m, \quad 32^m, \quad 40^m, \quad 48^m,4575;$$

d'où l'on tire, le rayon du cercle étant 55 mètres,

$$\sin \theta' = \frac{5}{55}, \quad \theta' = 5^\circ 12' 57'',3,$$

$$\sin \theta'' = \frac{15}{55}, \quad \theta'' = 15^\circ 49' 35'',8,$$

$$\sin \theta''' = \frac{24}{55}, \quad \theta''' = 25^\circ 52' 19'',6,$$

$$\sin \theta^{iv} = \frac{32}{55}, \quad \theta^{iv} = 35^\circ 34' 42'',7,$$

$$\sin \theta^v = \frac{40}{55}, \quad \theta^v = 46^\circ 39' 29'',1,$$

$$\sin \theta^{vi} = \frac{48,4575}{55}, \quad \theta^{vi} = 62^\circ 53' 25'',4.$$



Par suite on obtient les rapports désignés par  $m$  dans la table I,

$$m' = \frac{\theta'}{\varphi} = 0,070, \quad m^{iv} = \frac{\theta^{iv}}{\varphi} = 0,480,$$

$$m'' = \frac{\theta''}{\varphi} = 0,212, \quad m^v = \frac{\theta^v}{\varphi} = 0,629,$$

$$m''' = \frac{\theta'''}{\varphi} = 0,349, \quad m^{vi} = \frac{\theta^{vi}}{\varphi} = 0,848.$$

Ces données suffisent pour calculer la partie principale de la poussée due à l'ensemble des poids ; pour cela, il faut multiplier chaque résultante partielle par un coefficient  $\frac{A}{B}$  que la table I fait aisément connaître, au moyen d'une triple interpolation. Prenons, par exemple, le coefficient qui s'applique à la seconde résultante de 89',2, située à 32 mètres de la verticale du sommet. Il s'agit de trouver la valeur d'une fonction de  $\frac{2\varphi}{\pi}$  et de  $m$ , quand on y fait

$$\frac{2\varphi}{\pi} = 0,824, \quad m = 0,480.$$

Or la table donne

$$\text{Pour } \frac{2\varphi}{\pi} = 0,80, \quad m = 0,45 \dots \frac{A}{B} = 0,323,$$

$$\text{Pour } \frac{2\varphi}{\pi} = 0,84, \quad m = 0,45 \dots \frac{A}{B} = 0,292,$$

$$\text{Pour } \frac{2\varphi}{\pi} = 0,80, \quad m = 0,50 \dots \frac{A}{B} = 0,291,$$

$$\text{Pour } \frac{2\varphi}{\pi} = 0,84, \quad m = 0,50 \dots \frac{A}{B} = 0,261.$$

Interpolant par parties proportionnelles entre la première et la deuxième ligne d'une part, la troisième et la quatrième d'autre part, on conclut :

$$\text{Pour } \frac{2\varphi}{\pi} = 0,824, \quad m = 0,45 \dots \frac{A}{B} = 0,323 - 0,031 \cdot \frac{24}{40} = 0,3044,$$

$$\text{Pour } \frac{2\varphi}{\pi} = 0,824, \quad m = 0,50 \dots \frac{A}{B} = 0,291 - 0,030 \cdot \frac{24}{40} = 0,2730.$$

Une dernière interpolation entre ces deux lignes donne définitivement :

$$\text{Pour } \frac{2\varphi}{\pi} = 0,824, \quad m = 0,480 \dots \frac{A}{B} = 0,3044 - 0,0314 \cdot \frac{3}{5} = 0,286.$$

Ainsi la valeur cherchée est 0,286. On a obtenu, par des calculs tout à fait pareils, le coefficient de la partie principale de la poussée produite

par chaque résultante partielle. Ces coefficients sont successivement,

$$0,455, \quad 0,421, \quad 0,361, \quad 0,286, \quad 0,191, \quad 0,050.$$

On en conclura la partie principale de la poussée due aux poids, en multipliant chacun de ces nombres par la résultante à laquelle il correspond, additionnant et multipliant par 2, afin de tenir compte des poids égaux placés de l'autre côté de la verticale moyenne BG, qui produisent la même poussée que les premiers. On a donc, en désignant par  $Q_1$  cette partie principale,

$$Q_1 = 2 \left( \begin{array}{l} 0,455 \cdot 31 + 0,421 \cdot 31 + 0,361 \cdot 89,2 \\ + 0,286 \cdot 89,2 + 0,191 \cdot 89,2 + 0,050 \cdot 99,4 \end{array} \right) = 213^t,75.$$

Avant de faire subir à ce nombre la correction nécessaire, il faut encore lui ajouter la poussée produite par la dilatation linéaire indépendante des charges. Ici nous avons  $\frac{r^2}{a^2} = 0,000269$ , car la section étant un rectangle homogène de 3 mètres de hauteur,  $r^2$  est égal à  $\frac{1}{12} \cdot 3^2 = 0,75$ , et  $a = 52^m,915$ . D'un autre côté, l'aire de la section est  $0^m,144$ , nombre qui, multiplié par le coefficient d'élasticité de la tôle, donne

$$e = 0,144 \cdot 2 \cdot 10^{10}.$$

Quant au coefficient de dilatation  $\tau$ , supposons-le, par exemple, de 0,0004, ce qui répondra, si l'on veut, à une augmentation de température de 25 degrés et à un calage ayant pour épaisseur 0,0001 de la longueur de l'arc. Enfin, prenons dans la table II, en interpolant, la valeur de  $F = 2,6$ ; nous trouverons alors pour la poussée dont il s'agit, abstraction faite de la correction,

$$F \tau e \frac{r^2}{a^2} = 806^k{}^{11}.$$

Donc la partie principale de la poussée sera, dans les conditions où nous nous sommes placé,

$$213^t,75 + 0^t,81 = 214^t,56.$$

Il ne reste plus qu'à effectuer la correction. L'effet de la dilatation étant ici peu important, nous affecterons l'ensemble des deux résultats du même

coefficient  $\frac{1 - \lambda \frac{r^2}{a^2}}{1 + \lambda' \frac{r^2}{a^2}}$ , bien que la poussée de  $806^k{}^{11}$  dût seulement être

divisée par  $1 + \lambda' \frac{r^2}{a^2}$ ; la table IV nous fournit la valeur de ce coefficient.

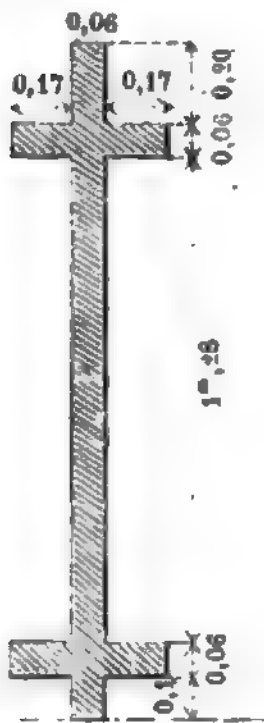
Pour  $\frac{2\varphi}{\pi}$  compris entre 0,80 et 0,84, et  $\frac{r^2}{a^2} = 0,0005$ , le coefficient serait 0,998; il devient 1,000 quand  $\frac{r^2}{a^2}$  s'annule : donc pour  $\frac{r^2}{a^2} = 0,000269$ , l'interpolation donnerait sensiblement 0,999. Il faut donc diminuer la poussée obtenue tout à l'heure de 0,001 de sa valeur, et l'on obtient définitivement le nombre

$$Q = 214',56 - 0',21 = 214',35,$$

résultat égal, sauf une différence relative de  $\frac{1}{4287}$ , à celui dont nous avons fait usage au n° 39, et que nous avons obtenu antérieurement à la construction de nos tables, par l'emploi du calcul intégral (n° 99). La différence provient des décimales négligées et de la substitution des résultantes partielles aux poids répartis d'une manière continue; il est même vraisemblable que les erreurs ont dû se compenser. Néanmoins cet exemple semble prouver que la substitution dont nous parlons est sans inconvénient pratique dans le problème actuel.

Le second exemple se rapporte au viaduc en fonte de Tarascon, établi sur le Rhône pour le chemin de fer de la Méditerranée. La section transversale d'un quelconque des huit arcs en fonte qui soutiennent une arche est représentée en détail par la *fig. 51*. La fibre moyenne est d'ailleurs un arc de cercle de 4<sup>m</sup>,95 de flèche et 59<sup>m</sup>,99 de corde. On déduit de ces données

Fig. 51.



$$\varphi = 18^\circ 44' 30'',62, \text{ en degrés sexagésimaux,}$$

$$\frac{2\varphi}{\pi} = \frac{18^\circ 44' 30'',62}{90^\circ} = 0,2082;$$

et dans l'hypothèse de l'homogénéité de la fonte,

$$r^2 = 0,3022, \text{ d'où } \frac{r^2}{a^2} = 0,000336.$$

Nous voulons simplement ici trouver la poussée due à un poids de 105 tonnes de 1000 kilogrammes uniformément réparti sur la longueur entière de l'arc, et à un poids égal uniformément réparti suivant la longueur entière de la corde.

Cette poussée sera exprimée (n° 108) par

$$Q = \frac{1 - \lambda \frac{r^2}{a^2}}{1 + \lambda' \frac{r^2}{a^2}} (F' \cdot 2p\rho\varphi + F'' \cdot 2p'a),$$

soit, à cause de  $2p\rho q = 2p'a = 105^2$ ,

$$Q = \frac{1 - \lambda \frac{r^2}{a^2}}{1 + \lambda' \frac{r^2}{a^2}} (F' + F''). 105^2.$$

La table II donne  $F'$  et  $F''$  :

Pour  $\frac{2\varphi}{\pi} = 0,20$ , on a  $F' = 1,562$ ,  $F'' = 1,573$ ;

Pour  $\frac{2\varphi}{\pi} = 0,21$ , on a  $F' = 1,484$ ,  $F'' = 1,496$ ;

donc en interpolant par parties proportionnelles, lorsque  $\frac{2\varphi}{\pi}$  sera  $0,2082$ , on trouvera

$$F' = 1,562 - 0,82 (1,562 - 1,484) = 1,498,$$

$$F'' = 1,573 - 0,82 (1,573 - 1,496) = 1,510.$$

Quant au coefficient de correction  $\frac{1 - \lambda \frac{r^2}{a^2}}{1 + \lambda' \frac{r^2}{a^2}}$ , on l'obtient au moyen de la

table IV par une double interpolation. On trouve :

Pour  $\frac{2\varphi}{\pi} = 0,20$  et  $\frac{r^2}{a^2} = 0,0005 \dots$  le coefficient  $= 0,964$ ;

Pour  $\frac{2\varphi}{\pi} = 0,21$  et  $\frac{r^2}{a^2} = 0,0005 \dots$  le coefficient  $= 0,967$ .

Donc si  $\frac{2\varphi}{\pi}$  devient  $0,2082$  et si  $\frac{r^2}{a^2}$  reste égal à  $0,0005$ , le coefficient de correction deviendrait approximativement

$$0,964 + 0,82 (0,967 - 0,964) = 0,9665,$$

en admettant l'interpolation par parties proportionnelles. D'ailleurs, pour une valeur quelconque de  $\frac{2\varphi}{\pi}$ , si  $\frac{r^2}{a^2}$  est nul, le coefficient cherché est toujours égal à 1; donc une seconde interpolation entre  $\frac{r^2}{a^2} = 0,0005$  et  $\frac{r^2}{a^2} = 0$ ,  $\frac{2\varphi}{\pi}$  restant  $0,2082$ , donnera pour la valeur demandée,

$$0,9665 + (1 - 0,9665) \frac{0,0005 - 0,000336}{0,0005} = 0,9775.$$

Donc définitivement la poussée d'un arc appartenant au viaduc de Tarrascon sera, dans les circonstances indiquées,

$$Q = 0,9775 (1,498 + 1,510) 105^4 = 308^4,7.$$

Ces deux exemples paraîtront sans doute suffisants pour bien faire comprendre la disposition et l'usage des tables de poussée.



## CHAPITRE CINQUIÈME.

SOLUTION DE DIVERSES QUESTIONS CONCERNANT LES PIÈCES A FIBRE MOYENNE CIRCULAIRE ET A SECTION CONSTANTE.

### § I. — Calcul de la variation de flèche dans certaines circonstances.

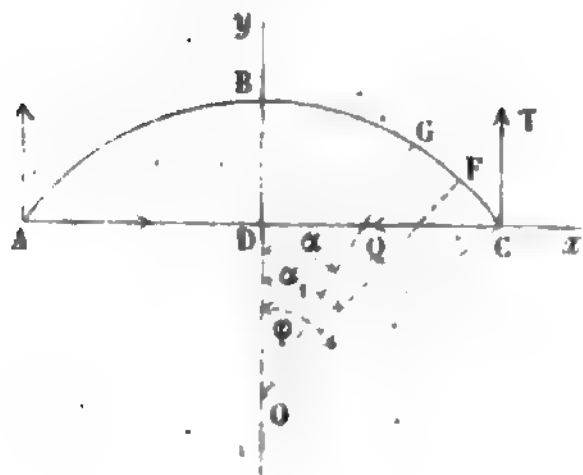
112. *Observations préliminaires.* — Nous continuerons à faire au sujet des pièces courbes dont nous devons étudier la variation de flèche les hypothèses restrictives qui ont été exposées au n° 92. De plus, nous conservons dans le courant de ce chapitre les notations définies au n° 93.

Cela posé, nous allons procéder au calcul de la variation de la flèche : 1° sous l'action d'un poids uniformément réparti suivant la longueur entière de l'arc ; 2° sous l'action d'un poids uniformément réparti suivant la corde entière ; 3° par l'effet d'une dilatation provenant de causes étrangères aux charges.

113. *Variation de flèche produite par un poids uniformément réparti suivant la longueur entière de l'arc.* — La pièce étant symétrique et symétriquement chargée, on doit appliquer la dernière formule établie au n° 49, savoir, en remplaçant  $\gamma_0$  par  $f$  et négligeant l'effet du glissement transversal (n° 52) :

$$\Delta f = \tau f - \int_0^a \left[ \frac{X(a-x)}{er^2} \frac{ds}{dx} + \frac{N}{e} \frac{dy}{dx} \right] dx.$$

Fig. 52.



Pour effectuer le calcul, nous exprimerons, comme nous l'avons déjà fait précédemment, toutes les variables en fonction d'une seule, qui sera l'angle  $\alpha$  de la verticale OB (fig. 52) avec le plan OG d'une section normale quelconque. Si l'on appelle  $\alpha_1$  la



valeur de  $\alpha$  pour une section comprise entre OG et OC, et  $p$  le poids de la charge par unité de longueur, on trouve d'abord

$$X = - \int_{\alpha}^{\varphi} p \rho^2 (\sin \alpha_1 - \sin \alpha) d\alpha_1 \\ + p \rho^2 \varphi (\sin \varphi - \sin \alpha) - Q \rho (\cos \alpha - \cos \varphi);$$

car le moment d'un poids élémentaire  $p \rho da_1$  compris entre G et C a pour expression  $-p \rho^2 d\alpha_1 (\sin \alpha_1 - \sin \alpha)$ , et  $p \rho \varphi$  est la grandeur de la réaction verticale T de l'appui C. De même on a

$$N = -Q \cos \alpha - p \rho \varphi \sin \alpha + p \rho (\varphi - \alpha) \sin \alpha.$$

Ces valeurs de X et de N étant simplifiées deviendront

$$X = -p \rho^2 (\cos \alpha - \cos \varphi + \alpha \sin \alpha - \varphi \sin \varphi) - Q \rho (\cos \alpha - \cos \varphi),$$

$$N = -Q \cos \alpha - p \rho \alpha \sin \alpha.$$

On sait, en outre, que

$$x = \rho \sin \alpha, \quad dx = \rho \cos \alpha d\alpha,$$

$$y = \rho (\cos \alpha - \cos \varphi), \quad dy = -\rho \sin \alpha d\alpha,$$

$$a = \overline{CD} = \rho \sin \varphi, \quad ds = \rho d\alpha;$$

quant à  $er^2$  et  $e$ , ce sont des constantes qu'il n'y a pas lieu d'exprimer autrement. Par suite on a, en supprimant le terme  $\tau f$ , puisque nous laissons de côté l'effet de la dilatation,

$$-\Delta f = \frac{p \rho^4}{er^2} \int_0^{\varphi} (\sin \alpha - \sin \varphi) (\cos \alpha - \cos \varphi + \alpha \sin \alpha - \varphi \sin \varphi) d\alpha \\ + \frac{Q \rho^3}{er^2} \int_0^{\varphi} (\sin \alpha - \sin \varphi) (\cos \alpha - \cos \varphi) d\alpha \\ + \frac{p \rho^2}{e} \int_0^{\varphi} \alpha \sin^2 \alpha d\alpha + \frac{Q \rho}{e} \int_0^{\varphi} \sin \alpha \cos \alpha d\alpha.$$

L'intégration s'effectue aisément; on ne rencontre ici que des intégrales déjà connues, sauf  $\int \alpha \sin^2 \alpha d\alpha$ . Or, en intégrant par

parties, on obtient successivement

$$\begin{aligned}\int \alpha \sin^2 \alpha d\alpha &= -\alpha \sin \alpha \cos \alpha + \int \cos \alpha d(\alpha \sin \alpha) \\ &= -\alpha \sin \alpha \cos \alpha + \int (\sin \alpha \cos \alpha + \alpha \cos^2 \alpha) d\alpha \\ &= -\alpha \sin \alpha \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin^2 \alpha + \int \alpha (1 - \sin^2 \alpha) d\alpha \\ &= -\frac{1}{2} \alpha \sin \alpha \cos \alpha + \frac{1}{4} \sin^2 \alpha + \frac{1}{4} \alpha^2.\end{aligned}$$

On est donc en mesure d'écrire la valeur de  $-\Delta f$ , qui est

$$\begin{aligned}-\Delta f &= \frac{P\rho^4}{er^2} \left( -\frac{9}{4} \sin^2 \varphi + \frac{5}{2} \varphi \sin \varphi \cos \varphi + 1 \right. \\ &\quad \left. - \cos \varphi - \varphi \sin \varphi + \varphi^2 \sin^2 \varphi + \frac{1}{4} \varphi^2 \right) \\ &\quad - \frac{Q\rho^3}{er^2} \left( \frac{3}{2} \sin^2 \varphi - \varphi \sin \varphi \cos \varphi + \cos \varphi - 1 \right) \\ &\quad + \frac{P\rho^2}{4e} (-2\varphi \sin \varphi \cos \varphi + \sin^2 \varphi + \varphi^2) + \frac{Q\rho}{2e} \sin^2 \varphi,\end{aligned}$$

soit encore

$$-\Delta f = H \frac{P\rho^4}{er^2} + H' \frac{Q\rho^3}{er^2} + H'' \frac{P\rho^2}{e} + H''' \frac{Q\rho}{e},$$

$H, H', H'', H'''$  étant des constantes connues maintenant en fonction de  $\varphi$ . La formule précédente suffirait donc pour calculer  $-\Delta f$ , puisque d'ailleurs on peut, par un calcul préalable, connaître la poussée  $Q$ .

Lorsqu'il s'agit d'un arc surbaissé, c'est-à-dire dans l'hypothèse, assez généralement vraie en pratique, d'une petite valeur de  $\varphi$ , cette formule peut recevoir une forme beaucoup plus simple. Pour la trouver, nous remplacerons d'abord  $Q$  par sa valeur donnée au n° 108 :

$$Q = 2P\rho\varphi \cdot F' \left( \frac{1 - \lambda \frac{r^2}{a^2}}{1 + \lambda' \frac{r^2}{a^2}} \right),$$

et on aura de cette manière

$$-\Delta f = \frac{p\rho^2}{e\left(1+\lambda'\frac{r^2}{a^2}\right)} \left[ \begin{aligned} & (\mathbf{H} + 2\mathbf{F}'\mathbf{H}'\varphi) \frac{\rho^2}{r^2} + \frac{\mathbf{H}\lambda'}{\sin^2\varphi} - \frac{2\mathbf{F}'\mathbf{H}'\lambda\varphi}{\sin^2\varphi} \\ & + \mathbf{H}'' + 2\mathbf{F}'\mathbf{H}''\varphi + \frac{r^2}{a^2}(\mathbf{H}''\lambda' - 2\mathbf{F}'\mathbf{H}''\varphi\lambda) \end{aligned} \right].$$

Or on connaît déjà le développement de  $\mathbf{F}'$  en série (n° 108), ainsi que celui de  $\lambda$  et  $\lambda'$  (nos 104 et 105), et il est facile, au moyen des séries connues du sinus et du cosinus, d'avoir ceux de  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{H}'$ ,  $\mathbf{H}''$ ,  $\mathbf{H}'''$ . Le calcul donne pour résultat :

$$\mathbf{H} = \frac{5}{24}\varphi^4 \left( 1 - \frac{77}{150}\varphi^2 + \frac{269}{2800}\varphi^4 - \frac{6281}{756000}\varphi^6 + \dots \right),$$

$$\mathbf{H}' = -\frac{5}{24}\varphi^4 \left( 1 - \frac{49}{150}\varphi^2 + \frac{107}{2800}\varphi^4 - \frac{1793}{756000}\varphi^6 + \dots \right),$$

$$\mathbf{H}'' = \frac{1}{4}\varphi^4 \left( 1 - \frac{1}{18}\varphi^2 + \frac{1}{45}\varphi^4 - \dots \right),$$

$$\mathbf{H}''' = \frac{1}{2}\varphi^2 \left( 1 - \frac{1}{3}\varphi^2 + \frac{2}{45}\varphi^4 - \dots \right);$$

et, par suite,

$$\mathbf{H} + 2\mathbf{F}'\mathbf{H}'\varphi = \frac{1}{1260}\varphi^6 \left( 1 + \frac{5}{112}\varphi^2 + \frac{43}{16170}\varphi^4 + \dots \right),$$

$$\frac{\mathbf{H}\lambda' - 2\mathbf{F}'\mathbf{H}'\lambda\varphi}{\sin^2\varphi} + \mathbf{H}'' + 2\mathbf{F}'\mathbf{H}''\varphi = \frac{25}{16} \left( 1 - \frac{1}{350}\varphi^2 + \frac{1171}{176400}\varphi^4 - \dots \right),$$

$$\mathbf{H}''\lambda' - 2\mathbf{F}'\mathbf{H}''\lambda\varphi = \frac{5}{8}\varphi^2 \left( 1 - \frac{11}{70}\varphi^2 + \dots \right).$$

Donc, en ne prenant que le premier terme des trois séries précédentes, ce qui est légitime pour de petites valeurs de  $\varphi$ , on aura

$$-\Delta f = \frac{p\rho^2}{e\left(1+\lambda'\frac{r^2}{a^2}\right)} \left( \frac{1}{1260} \frac{\rho^2\varphi^6}{r^2} + \frac{25}{16} + \frac{5}{8} \frac{r^2\varphi^2}{a^2} \right).$$

Cette valeur est encore susceptible de quelques simplifications. D'abord nous savons qu'on peut sans erreur relative notable remplacer  $1 + \lambda'\frac{r^2}{a^2}$  par  $1 + \frac{15}{8}\frac{r^2}{f^2}$  (n° 105); en second lieu,

puisque  $\varphi$  est petit, on a sensiblement

$$\rho\varphi = a \quad \text{et} \quad \varphi = 2 \tan \frac{1}{2} \varphi = \frac{2f}{a};$$

enfin, à cause de la limite de  $\frac{f}{400}$ , que  $\frac{r^2}{a^2}$  ne dépasse pas (n° 102), le terme  $\frac{5}{8} \frac{r^2 \varphi^2}{a^2}$  sera petit relativement à  $\frac{25}{16}$ . Donc nous écrivons simplement

$$-\Delta f = \frac{25}{16} \frac{p\rho^2}{e \left(1 + \frac{15}{8} \frac{r^2}{f^2}\right)} \left(1 + \frac{64}{7875} \frac{f^4}{a^2 r^2}\right),$$

ou bien

$$(1) \quad -\Delta f = 1,56 \frac{p\rho^2}{e \left(1 + \frac{15}{8} \frac{r^2}{f^2}\right)} \left(1 + 0,0081 \frac{f^4}{a^2 r^2}\right).$$

La formule (1) ci-dessus, d'après la manière dont elle a été obtenue, semblerait ne devoir être appliquée que lorsque l'arc est notablement surbaissé. Cependant on se convaincra aisément par des substitutions directes qu'elle ne donne pas une forte erreur, même dans le cas où la fibre moyenne se rapproche du demi-cercle, c'est-à-dire quand  $\varphi$  est peu différent de  $\frac{\pi}{2}$ . Ainsi, quand on fait  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  dans les expressions non développées en séries, on trouve

$$H + 2F'H'\varphi = 0,013455,$$

$$\frac{H\lambda' - 2F'H'\varphi\lambda}{\sin^2 \varphi} + H'' + 2F'H''\varphi = 1,60303,$$

$$H''\lambda' - 2F'H''\lambda\varphi = 0,61685,$$

et, par suite,

$$-\Delta f = \frac{p\rho^2}{e \left(1 + \lambda' \frac{r^2}{a^2}\right)} \left(0,01346 \frac{\rho^2}{r^2} + 1,60303 + 0,61685 \frac{r^2}{a^2}\right).$$

Or le terme  $0,61685 \frac{r^2}{a^2}$  est négligeable devant 1,60303;

$1 + \lambda' \frac{r^2}{a^2}$  peut être remplacé par  $1 + \frac{15}{8} \frac{r^2}{f^2}$  avec une erreur

relative inférieure à  $\frac{1}{200}$  (n° 105); donc on aurait très-approximativement

$$-\Delta f = \frac{p \rho^2}{e \left(1 + \frac{15}{8} \frac{r^2}{f^2}\right)} \left(1,60 + 0,0135 \frac{\rho^2}{r^2}\right).$$

La formule (1), en remarquant que pour  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  on a  $f = a = \rho$ , donnerait

$$-\Delta f = \frac{p \rho^2}{e \left(1 + \frac{15}{8} \frac{r^2}{f^2}\right)} \left(1,56 + 0,0127 \frac{\rho^2}{r^2}\right);$$

on voit donc qu'elle conduirait à peu près au résultat exact.

La substitution de  $\varphi = \frac{\pi}{4}$  nous fournirait encore une conclusion dans le même sens, car en laissant de côté le facteur  $\frac{p \rho^2}{e \left(1 + \lambda' \frac{r^2}{a^2}\right)}$ , sur lequel on fait une très-petite erreur quand

on le remplace par  $\frac{p \rho^2}{e \left(1 + \frac{15}{8} \frac{r^2}{f^2}\right)}$ , la formule (1) donnerait pour le second facteur

$$1,56 + 0,0127 \frac{f^4}{a^2 r^2},$$

au lieu de la valeur véritable

$$1,56 + 0,0137 \frac{f^4}{a^2 r^2};$$

l'erreur relative à craindre serait donc limitée à  $\frac{1}{13}$ , dans le cas défavorable où  $\frac{f^4}{a^2 r^2}$  serait très-grand; et généralement elle serait plus petite, car il est rare que le terme 1,56 ne l'emporte pas de beaucoup sur celui qui contient le facteur  $\frac{f^4}{a^2 r^2}$ .

114. *Variation de flèche produite par un poids uniformément réparti suivant la longueur entière de la corde.* — Nous admettrons identiquement les mêmes données qu'au n° 113, à

part cette différence que la charge sera répartie uniformément, non plus suivant la longueur de l'arc, mais suivant une parallèle à sa corde, c'est-à-dire qu'une partie de l'arc occupant en projection sur cette corde une longueur  $l$ , supportera une charge  $p' l$ . Cette charge agit d'ailleurs perpendiculairement à la corde. On demande de déterminer l'abaissement  $-\Delta f$  du sommet de l'arc.

On remarquera d'abord que la pièce a un poids propre dont on ne pourrait pas toujours faire abstraction; mais si l'on en tenait compte, cela aurait simplement pour effet d'introduire dans l'expression de  $-\Delta f$  les termes  $H \frac{p \rho^4}{er^2}$  et  $H'' \frac{p \rho^2}{e}$  que nous avons calculés au numéro précédent. En outre, les termes  $H' \frac{Q \rho^3}{er^2}$  et  $H'' \frac{Q \rho}{e}$  doivent rester les mêmes que tout à l'heure, car il est clair que la réaction  $Q$  entrera de la même manière dans  $X$  et  $N$ ; seulement  $Q$  ne conservera pas la même valeur numérique, et dans les applications il faudrait avoir soin de prendre celle qui répond au cas actuel. Tout considéré, nous n'avons donc à chercher que les termes provenant de l'introduction de  $p'$  dans  $X$  et  $N$ .

Or on trouve sans difficulté

$$X = -\frac{1}{2} p' \rho^2 (\sin \varphi - \sin \alpha)^2 + T \rho (\sin \varphi - \sin \alpha) + \dots,$$

$$N = p' \rho (\sin \varphi - \sin \alpha) \sin \alpha - T \sin \alpha - \dots,$$

et comme  $T$  est ici égal à  $p' \rho \sin \varphi$ ,

$$X = \frac{1}{2} p' \rho^2 (\sin^2 \varphi - \sin^2 \alpha) + \dots,$$

$$N = -p' \rho \sin^2 \alpha - \dots;$$

d'où l'on conclut que les termes analogues à  $H \frac{p \rho^4}{er^2}$  et  $H'' \frac{p \rho^2}{e}$  sont, dans le cas actuel,

$$\frac{p' \rho^4}{2er^2} \int_0^\varphi (\sin \varphi - \sin \alpha) (\sin^2 \varphi - \sin^2 \alpha) d\alpha \quad \text{et} \quad \frac{p' \rho^2}{e} \int_0^\varphi \sin^3 \alpha d\alpha.$$

Ces intégrales se décomposent facilement en intégrales con-



nues, et tout calcul effectué, on trouve pour les coefficients  $H_1$  et  $H'_1$  qui multiplient respectivement  $\frac{p' \rho^4}{er^2}$  et  $\frac{p' \rho^2}{e}$  :

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{1}{2} \varphi \sin^3 \varphi - \frac{1}{4} \varphi \sin \varphi - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi \\ &\quad + \frac{7}{12} \sin^3 \varphi \cos \varphi + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cos \varphi, \\ H'_1 &= \frac{2}{3} - \cos \varphi + \frac{1}{3} \cos^3 \varphi. \end{aligned}$$

Ainsi l'on aurait en définitive pour l'effet produit sur la flèche  $f$  par le poids  $2 p' a$ ,

$$-\Delta f = H_1 \frac{p' \rho^4}{er^2} + H' \frac{Q \rho^4}{er^2} + H'_1 \frac{p' \rho^2}{e} + H'' \frac{Q \rho}{e}.$$

La substitution de la valeur de  $Q$  et le développement en série donnent ici, comme au n° 113, un résultat simple et remarquable. On a d'abord (n° 108)

$$Q = 2 p' \rho \sin \varphi \cdot F'' \cdot \frac{1 - \lambda \frac{r^2}{a^2}}{1 + \lambda' \frac{r^2}{a^2}},$$

et, par suite,

$$-\Delta f = \frac{p' \rho^2}{e \left(1 + \lambda' \frac{r^2}{a^2}\right)} \left\{ \begin{aligned} & (H_1 + 2 F'' H' \sin \varphi) \frac{\rho^2}{r^2} \\ & + \frac{H_1 \lambda'}{\sin^2 \varphi} - \frac{2 F'' H' \lambda}{\sin \varphi} \\ & + H'_1 + 2 F'' H'' \sin \varphi \\ & + \frac{r^2}{a^2} (H'_1 \lambda' - 2 F'' H'' \lambda \sin \varphi) \end{aligned} \right\}.$$

Maintenant si l'on développe en série les quantités  $H_1$  et  $H'_1$ , on trouvera

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{5}{24} \varphi^3 \left( 1 - \frac{91}{150} \varphi^2 + \frac{431}{2800} \varphi^4 - \frac{2321}{108000} \varphi^6 + \dots \right) \\ H'_1 &= \frac{1}{4} \varphi^3 \left( 1 - \frac{1}{3} \varphi^2 + \frac{13}{240} \varphi^4 - \dots \right); \end{aligned}$$

au moyen de ces valeurs et des valeurs déjà connues de  $H'$ ,  $H''$ ,

$F''$ ,  $\lambda$ ,  $\lambda'$ , on obtiendra encore les développements ci-après :

$$H_1 + 2F''H' \sin \varphi = \frac{1}{840} \varphi^6 \left( 1 - \frac{17}{168} \varphi^2 + \frac{15821}{582120} \varphi^4 - \dots \right),$$

$$\begin{aligned} \frac{H_1 \lambda'}{\sin^2 \varphi} - \frac{2F''H' \lambda}{\sin \varphi} + H''_1 + 2F''H'' \sin \varphi \\ = \frac{25}{16} \left( 1 - \frac{101}{1050} \varphi^2 + \frac{2473}{176400} \varphi^4 - \dots \right), \end{aligned}$$

$$H''_1 \lambda' - 2F''H'' \lambda \sin \varphi = \frac{5}{8} \varphi^2 \left( 1 - \frac{10}{21} \varphi^2 + \dots \right);$$

donc,  $\varphi$  étant d'abord supposé petit, on pourra écrire

$$-\Delta f = \frac{p' \rho^2}{e \left( 1 + \lambda' \frac{r^2}{a^2} \right)} \left( \frac{1}{840} \frac{\rho^2 \varphi^6}{r^3} + \frac{25}{16} + \frac{5}{8} \frac{r^2 \varphi^2}{a^2} \right),$$

soit plus simplement, en procédant comme au n° 113,

$$-\Delta f = \frac{25}{16} \frac{p' \rho^2}{e \left( 1 + \frac{15}{8} \frac{r^2}{f^2} \right)} \left( 1 + \frac{32}{2625} \frac{f^4}{a^2 r^2} \right),$$

ou enfin

$$(2) \quad -\Delta f = 1,56 \frac{p' \rho^2}{e \left( 1 + \frac{15}{8} \frac{r^2}{f^2} \right)} \left( 1 + 0,0122 \frac{f^4}{a^2 r^2} \right).$$

Pour savoir si la formule (2) s'écarte beaucoup de la vérité dans le cas où  $\varphi$  ne serait plus petit, nous avons encore cherché les vraies valeurs de  $-\Delta f$  pour  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  et  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ , et nous

les avons comparées avec les résultats qu'on aurait trouvés par l'application de la formule (2). En laissant toujours de côté les

facteurs  $\frac{p' \rho^2}{e \left( 1 + \frac{15}{8} \frac{r^2}{f^2} \right)}$  et  $\frac{p' \rho^2}{e \left( 1 + \lambda' \frac{r^2}{a^2} \right)}$ , qu'on sait être très-

sensiblement égaux, voici le résultat de cette comparaison.

La formule (2) donne :

$$\text{Pour } \varphi = \frac{\pi}{2} \dots 1,56 + 0,0190 \frac{\rho^2}{r^2},$$

$$\text{Pour } \varphi = \frac{\pi}{4} \dots 1,56 + 0,0190 \frac{f^4}{a^2 r^2},$$

respectivement au lieu de

$$1,32 + 0,0138 \frac{\rho^2}{r^2} \quad \text{et} \quad 1,50 + 0,0178 \frac{f^4}{a^2 r^2}.$$

On voit par conséquent que la formule (2) serait encore assez exacte pour  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ , mais qu'elle donnerait une valeur notablement trop forte dans les environs de  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , surtout si en même temps  $\frac{\rho^4}{a^2 r^2}$  était grand. Toutefois cette erreur n'irait jamais jusqu'à augmenter de 40 pour 100 le résultat véritable, et par conséquent elle n'en changerait pas l'ordre de grandeur.

115. *Application numérique des formules (1) et (2).* — Nous allons appliquer les formules (1) et (2) des nos 113 et 114 au viaduc de Tarascon, déjà cité aux nos 102 et 111. On a

$$f = 4^m,95, \quad 2a = 59^m,99, \quad r^2 = 0,3022.$$

Des valeurs de  $f$  et de  $a$ , on conclut d'abord celle de  $\varphi$  et de  $\rho$ , car

$$\text{tang } \frac{1}{2} \varphi = \frac{f}{a}, \quad \text{et} \quad \rho = \frac{a^2 + f^2}{2f};$$

donc

$$\varphi = 0,3271\dots, \quad \rho = 93^m,354.$$

Quant à  $e$ , c'est le produit de la section  $\Omega$  de l'arc par le coefficient d'élasticité longitudinale, que les constructeurs du viaduc, MM. Desplaces et Collet-Meygret (\*), ont évalué, d'après leurs expériences, à  $6 \cdot 10^9$ ; comme  $\Omega$  est égal à 0,1428 (voir la fig. 51), on a donc

$$e = 0,8568 \cdot 10^9.$$

Au moyen de ces données, si l'on fait par exemple  $2p\rho\varphi = 2p'a = 105000$  kilogrammes, on tirera des formules (1) et (2) :

$$\text{Pour l'effet du poids } 2p\rho\varphi\dots \quad - \Delta f = 0^m,0272,$$

$$\text{Pour l'effet du poids } 2p'a\dots \quad - \Delta f = 0^m,0279.$$

MM. Desplaces et Collet-Meygret ont constaté directement que l'effet total des deux poids de 105 tonnes dont il s'agit était environ  $0^m,06$ ,

---

(\*) Le Memoire de ces Ingenieurs a ete inséré dans les *Annales des Ponts et Chaussées*, 1854, 1<sup>er</sup> semestre.

tandis que nous le trouvons seulement de  $0^m,0272 + 0^m,0279$ , soit  $0^m,055$ . Nos formules donneraient donc une erreur relative en moins dont la valeur est à peu près  $\frac{1}{12}$ . Cette erreur, assez faible dans une question de ce genre, s'explique par le jeu des assemblages et aussi par l'incertitude qui affecte la valeur du coefficient d'élasticité; le nombre  $6.10^9$  est une moyenne de plusieurs expériences assez divergentes dans leurs résultats, et on ne saurait guère compter sur son exactitude absolue.

**116. Accroissement de flèche produit par une dilatation linéaire indépendante des charges.** — Lorsque, par une cause quelconque, telle que le changement de température, il se produit une dilatation ou contraction de la matière qui compose la pièce, toutes les dimensions tendent à augmenter ou à diminuer dans un rapport constant. Cela entraînerait déjà une variation de flèche représentée par  $\tau f$ ; mais la flèche varie surtout parce que les deux points d'appui faisant obstacle au changement de la corde  $2a$ , il naît de là deux forces horizontales  $Q$ , égales et contraires, appliquées aux deux extrémités de l'arc, qui l'obligent à se courber davantage et à augmenter sa flèche s'il y a dilatation, ou produisent l'effet inverse s'il y a contraction.

Il n'est pas besoin de nouveaux calculs pour trouver l'expression de la variation de flèche dont il s'agit. On l'obtiendrait en effet au moyen de la formule générale rappelée tout à l'heure (n° 113), dans laquelle on mettrait pour  $X$  et  $N$  le moment ou la projection de la force  $Q$  produite par la fixité des appuis. On retrouverait donc pour l'intégrale qui entre dans la formule les deux termes

$$\frac{Q\rho^3}{er^2} \left( \frac{3}{2} \sin^2 \varphi - \varphi \sin \varphi \cos \varphi + \cos \varphi - 1 \right) - \frac{Q\rho}{2e} \sin^2 \varphi,$$

faisant partie de l'expression de  $\Delta f$ , calculée au n° 113 dans le cas d'un poids uniformément réparti suivant la longueur entière de l'arc. Donc on aurait, pour représenter le changement de la flèche dû à la dilatation dont le coefficient est  $\tau$ ,

$$\Delta f = \tau f + \frac{Q\rho^3}{er^2} \left( \frac{3}{2} \sin^2 \varphi - \varphi \sin \varphi \cos \varphi + \cos \varphi - 1 \right) - \frac{Q\rho}{2e} \sin^2 \varphi,$$

formule dans laquelle  $Q$  exprime la poussée correspondante à

la même dilatation, poussée dont la valeur nous est connue (n° 107).

Afin d'arriver à un résultat plus commode pour les applications pratiques, remplaçons encore  $Q$  par son expression en fonction de  $\tau$  et des dimensions de l'arc (n° 97) : nous aurons ainsi

$$\Delta f = \tau f + 2\tau a \frac{\frac{3}{2} \sin^2 \varphi - \varphi \sin \varphi \cos \varphi + \cos \varphi - 1 - \frac{r^2}{2a^2} \sin^4 \varphi}{\varphi + 2\varphi \cos^2 \varphi - 3 \sin \varphi \cos \varphi + \frac{r^2}{a^2} \sin^2 \varphi (\varphi + \sin \varphi \cos \varphi)}.$$

Or le développement en séries donne

$$\frac{3}{2} \sin^2 \varphi - \varphi \sin \varphi \cos \varphi + \cos \varphi - 1 = \frac{5}{24} \varphi^4 \left( 1 - \frac{49}{150} \varphi^2 + \dots \right),$$

$$\sin^4 \varphi = \varphi^4 \left( 1 - \frac{2}{3} \varphi^2 + \dots \right),$$

$$\varphi + 2\varphi \cos^2 \varphi - 3 \sin \varphi \cos \varphi = \frac{4}{15} \varphi^3 \left( 1 - \frac{4}{21} \varphi^2 + \dots \right),$$

$$\sin^2 \varphi (\varphi + \sin \varphi \cos \varphi) = 2\varphi^3 \left( 1 - \frac{2}{3} \varphi^2 + \dots \right);$$

par suite, si l'on suppose l'arc très-surbaissé, c'est-à-dire  $\varphi$  très-petit, on pourra poser

$$\Delta f = \tau f + 2\tau a \frac{\frac{5}{24} \varphi^4 - \frac{r^2}{2a^2} \varphi^4}{\frac{4}{15} \varphi^3 + \frac{2r^2}{a^2} \varphi^3} = \tau f + 2\tau a \frac{25}{32\varphi} \left( \frac{1 - \frac{12}{5} \frac{r^2}{a^2}}{1 + \frac{15}{2\varphi^2} \frac{r^2}{a^2}} \right).$$

Dans cette même hypothèse on peut encore remplacer  $\varphi$  par  $\frac{2f}{a}$ ;

on peut d'ailleurs négliger  $\frac{12}{5} \frac{r^2}{a^2}$  devant l'unité, car  $\frac{r^2}{a^2}$  étant inférieur à 0,0025 (n° 102), l'erreur relative ainsi commise sur le second terme de  $\Delta f$  n'atteindrait pas 0,006. Donc on aura

$$\Delta f = \tau f + \frac{25}{32} \tau \frac{a^2}{f} \left( \frac{1}{1 + \frac{15}{8} \frac{r^2}{f^2}} \right);$$

ou bien encore

$$(3) \quad \Delta f = \tau f \left[ 1 + \frac{5}{12} \left( \frac{a^2}{r^2 + \frac{8}{15} f^2} \right) \right].$$

La formule (3) est déjà satisfaisante sous le rapport de la simplicité : on peut cependant en trouver une encore plus simple, et suffisamment exacte dans la plupart des cas. Il arrive assez ordinairement que la quantité  $\frac{15}{8} \frac{r^2}{f^2}$  ne dépasse pas quelques centièmes; si on la néglige dans l'avant-dernière équation, on aura

$$\Delta f = \tau f + \frac{25}{32} \tau \frac{a^2}{f} = \frac{25}{16} \tau \frac{a^2 + f^2}{2f} + \frac{7}{32} \tau f.$$

Or  $\frac{a^2 + f^2}{2f}$  est égal au rayon  $\rho$  de la fibre moyenne; dans les arcs surbaissés,  $\frac{25}{16} \rho$  est grand par rapport à  $\frac{7}{32} f$  : en négligeant cette dernière longueur, on aurait donc simplement

$$(4) \quad \Delta f = 1,56 \tau \rho;$$

c'est-à-dire que, sauf les restrictions au moyen desquelles la formule (4) a été établie, la flèche varierait d'une quantité égale au produit du nombre 1,56 par la dilatation linéaire absolue qu'éprouverait une barre entièrement libre, composée avec la matière de l'arc, ayant une longueur égale au rayon, et soumise à la même cause de dilatation.

Nous sommes arrivé aux formules (3) et (4) au moyen d'hypothèses particulières, savoir  $\varphi$  petit, quand il s'agissait de la formule (3), et en outre  $\frac{r^2}{f^2}$  petit, quand il s'agit de la formule (4). Il y a quelque intérêt à comparer les résultats de ces deux formules avec la valeur exacte donnée par l'expression de  $\Delta f$  non développée en série, même dans le cas où ces hypothèses ne seraient pas réalisées. Les deux tableaux ci-après font connaître le résultat de la comparaison, pour une série de valeurs de  $\frac{2\varphi}{\pi}$  comprises entre 0,12 et 1,00.



Valeurs de  $\Delta f$  fournies par la formule exacte et les formules (3) et (4).

RAPPORT $\frac{2p}{\pi}$	VALEURS EXACTES pour $\frac{r^2}{a^2} =$			VALEURS DE LA FORMULE (3) pour $\frac{r^2}{a^2} =$			VALEURS de la formule (4)	OBSERVATIONS.
	0,000.	0,001.	0,0025.	0,000.	0,001.	0,0025.		
0,12	4,17	3,45	2,73	4,18	3,46	2,76	4,16	Ce tableau donne le chiffre par lequel il faut multiplier $2\tau a$ pour avoir la variation de la flèche $\Delta f$ due à la dilatation linéaire dont le coefficient est $\tau$ .
0,20	2,53	2,36	2,13	2,55	2,37	2,16	2,52	
0,30	1,73	1,68	1,60	1,75	1,70	1,62	1,72	
0,40	1,34	1,32	1,28	1,36	1,34	1,31	1,33	
0,50	1,12	1,11	1,09	1,15	1,14	1,13	1,10	
0,60	0,98	0,97	0,97	1,02	1,02	1,01	0,96	
0,70	0,90	0,89	0,89	0,94	0,94	0,94	0,88	
0,80	0,85	0,84	0,84	0,90	0,90.	0,90	0,82	
0,90	0,82	0,82	0,82	0,88	0,88	0,88	0,79	
1,00	0,82	0,82	0,82	0,89	0,89	0,89	0,78	

Erreurs relatives des formules (3) et (4).

RAPPORT $\frac{2p}{\pi}$	ERREURS RELATIVES, EN PLUS, DE LA FORMULE (3) pour $\frac{r^3}{a^3} =$			ERREURS RELATIVES DE LA FORMULE (4) pour $\frac{r^3}{a^3} =$			OBSERVATIONS.
	0,000.	0,001.	0,0025.	0,000.	0,001.	0,0025.	
0,12	0,002	0,005	0,010	-0,002	0,208	0,524	Le signe — indique une erreur négative, c'est-à-dire une valeur plus petite que la valeur exacte.
0,20	0,005	0,008	0,012	-0,003	0,071	0,184	
0,30	0,011	0,014	0,017	-0,005	0,027	0,075	
0,40	0,020	0,022	0,025	-0,008	0,009	0,034	
0,50	0,030	0,031	0,034	-0,012	-0,002	0,014	
0,60	0,041	0,043	0,045	-0,017	-0,011	-0,001	
0,70	0,053	0,054	0,056	-0,023	-0,019	-0,012	
0,80	0,066	0,067	0,068	-0,030	-0,027	-0,023	
0,90	0,078	0,078	0,079	-0,038	-0,036	-0,033	
1,00	0,088	0,089	0,089	-0,047	-0,045	-0,044	

Il résulte de ces tableaux : 1°. Que la formule (3) pourra toujours être substituée à la formule exacte sans avoir à craindre une erreur de plus de 8,9 pour 100, et qui serait même inférieure à 3,4 pour 100 pour des valeurs de  $\varphi$  moindres que la moitié de l'angle droit;

2°. Que la formule (4) entraînera une erreur maximum de 7,1 pour 100 au plus, quand on aura simultanément  $\frac{2\varphi}{\pi} > 0,20$  et  $\frac{r^2}{a^2} < 0,001$ , ce qui aura lieu généralement dans la pratique. Pour les arcs peu surbaissés la formule (4) sera même plus exacte que la formule (3).

117. *Applications numériques de la formule (4).* — On trouve dans les *Annales des Ponts et Chaussées* (1854, 1<sup>er</sup> semestre) deux Mémoires, l'un de M. Jules Poirée, l'autre de MM. Desplaces et Collet-Meygret, où sont consignés des faits propres à vérifier la formule (4) du n° 116. D'après les nombres fournis par ces Ingénieurs, le pont du Carrousel à Paris se relèverait de 0<sup>m</sup>,0011 pour une augmentation de 1 degré centigrade; ce relèvement deviendrait respectivement 0<sup>m</sup>,00083 et 0<sup>m</sup>,00135 dans le pont de la gare de Charenton, et dans celui de Tarascon. Les trois ponts étant supportés par des arcs en fonte, il faut dans les formules (3) ou (4) faire  $\tau = 0,0000111$ , nombre donné par M. Péclet et autres auteurs, d'après le major général anglais Roy. On a d'ailleurs :

Au pont du Carrousel....  $2a = 47^m,67$ ,  $f = 4^m,90$ , d'où  $\rho = 60^m,4$ ;  
 de Charenton...  $2a = 35^m,00$ ,  $f = 4^m,00$ , d'où  $\rho = 40^m,3$ ;  
 de Tarascon.....  $2a = 59^m,99$ ,  $f = 4^m,95$ , d'où  $\rho = 93^m,4$ .

Par suite la formule (4) donnera :

Pour le pont du Carrousel.....  $\Delta f = 0^m,00105$ ;  
 de Charenton....  $\Delta f = 0^m,00070$ ;  
 de Tarascon.....  $\Delta f = 0^m,00162$ .

On voit que le calcul donne un résultat à peu près conforme à l'expérience, en ce qui concerne le pont du Carrousel; mais que pour les deux autres il y a des erreurs relatives, en plus ou en moins, de 15 à 20 pour 100. Une telle différence, quand il s'agit de calculs de cette espèce, ne saurait avoir de bien graves inconvénients dans la pratique. Il faut d'ailleurs se rappeler combien les qualités physiques de la fonte sont susceptibles de varier d'après sa provenance et les circonstances particulières de

la fabrication ou du moulage, ce qui laisse quelque incertitude sur la valeur du coefficient  $\tau$ . En outre la mesure directe des relèvements  $\Delta f$  ne paraît pas susceptible d'une grande précision, et le peu de concordance des résultats d'observations (dont nous avons seulement donné les moyennes) en est une preuve suffisante. Ainsi, au pont de Charenton, le relèvement par degré centigrade a varié depuis  $0^m,00036$  jusqu'à  $0^m,00133$ , c'est-à-dire presque du simple au quadruple. Cela tient sans doute au jeu des assemblages qui n'est pas toujours le même; à la difficulté de faire des observations sur un pont livré à la circulation, et aussi à la difficulté de connaître exactement la température d'un arc, laquelle n'est ni égale à celle de l'air ambiant, ni peut-être constante dans toutes les parties de la pièce.

**§ II. — Pression maximum produite par un poids uniformément réparti suivant la corde entière, et par les dilatations linéaires indépendantes des charges.**

**118. Préliminaires.** — Le lecteur qui aura suivi avec attention les considérations que nous avons développées dans les chapitres I et II sera en mesure de résoudre tous les problèmes auxquels peut donner lieu l'étude de la stabilité et de la déformation des pièces prismatiques, quand la fibre moyenne est une courbe plane avant comme après la déformation et que les forces extérieures agissent dans son plan. Dans le cas où, indépendamment de ces conditions, la section serait constante, et où les obstacles opposés au mouvement de l'arc seraient simplement deux appuis au même niveau, soutenant les deux points extrêmes ainsi rendus invariables en position, on saura de plus calculer, au moyen des tables, la poussée provenant de poids quelconques et des dilatations linéaires dues à d'autres causes, telles que la température. Ainsi donc, en admettant ces dernières conditions, qui sont celles que l'on rencontre presque toujours dans l'établissement des ponts en métal, les forces inconnues seront promptement déterminées, et, par suite, l'étude de la stabilité sera facile; elle se fera par l'application directe des méthodes exposées au § VI du chapitre I<sup>er</sup>, qui permettront de se rendre un compte détaillé de l'effet des charges permanentes, d'épreuve ou accidentelles.

Parmi tous les problèmes qui se présenteront, dans de telles circonstances, à l'Ingénieur s'occupant de la rédaction d'un

projet de pont, il en est un qui nous a paru mériter une mention spéciale, à raison des applications fréquentes qui pourront en être faites : nous voulons parler de la détermination de la pression maximum à laquelle se trouve soumise la matière de l'arc sous l'action de la charge d'épreuve. Nous allons nous en occuper maintenant ; mais, pour simplifier, nous admettrons encore quelques hypothèses qui ôteront peu de généralité à la solution, car elles sont en général satisfaites, au moins approximativement. Voici ces hypothèses : 1° la section de l'arc a la même hauteur en dessus et en dessous de l'horizontale qui passe par son centre de gravité ; 2° chaque portion de la fibre moyenne supporte un poids proportionnel à sa projection sur la ligne des appuis, y compris le poids propre de la pièce, c'est-à-dire que la charge est uniformément répartie suivant l'horizontale ; 3° la section sera supposée homogène . à défaut de l'homogénéité, le coefficient d'élasticité maximum appartiendra aux fibres les plus éloignées de l'horizontale du centre de gravité ; 4° on regardera la température comme étant celle de la pose, et l'on négligera l'effet peu sensible du calage, ou, en d'autres termes, on laissera de côté pour le moment la pression produite par la dilatation dont le coefficient est  $\tau$ , sauf à y revenir spécialement un peu plus tard.

Nous conserverons dans ce paragraphe les notations employées dans le précédent, sauf que  $p$  désignera le poids de la charge par mètre courant horizontal. En outre nous appellerons :

$u$  la distance d'un élément quelconque de fibre à l'axe de flexion, c'est-à-dire à la ligne passant au centre d'élasticité de la section où se trouve l'élément de fibre considéré, et perpendiculaire au plan vertical de la fibre moyenne ;

$h$  la hauteur totale de la section mesurée parallèlement au rayon de courbure de la fibre moyenne, de telle sorte que les limites extrêmes de  $u$  seront  $+\frac{1}{2}h$  et  $-\frac{1}{2}h$  ;

E le coefficient d'élasticité longitudinale, variable avec  $u$ , dont la valeur maximum pour  $u = \pm \frac{1}{2}h$  sera désignée par  $E_1$ .

119. *Maximum de la pression longitudinale par unité de surface dans une section donnée.* — Toutes les forces extérieures qui agissent depuis une section jusqu'à l'extrémité peuvent, puisqu'elles sont dans le plan de la fibre moyenne, se réduire à une résultante, dont nous désignons par  $N$  la composante normale à ladite section et par  $X$  le moment relativement à l'axe de flexion. Nous ne nous occupons pas de l'effort tranchant ou composante parallèle au plan de la section (n° 52). Dès lors il est facile de reconnaître que, dans la section considérée, il se développe (n° 18) :

1°. Des tensions ou pressions longitudinales par unité de surface, répondant à un allongement ou raccourcissement relatif  $\frac{N}{e}$ , et ayant pour valeur en chaque point  $\frac{NE}{e}$  ;

2°. Des tensions et pressions longitudinales dues à la flexion que produit  $X$ , et exprimées généralement par  $\frac{XE u}{er^2}$ .

D'un autre côté, quand on adopte pour  $N$  le sens positif indiqué au n° 42, et pour le moment  $X$  celui qu'on a constamment supposé à partir du chapitre IV, on trouve

$$N = -Q \cos \alpha - p \rho \sin^2 \alpha,$$

$$X = \frac{1}{2} p \rho^2 (\sin^2 \varphi - \sin^2 \alpha) - Q \rho (\cos \alpha - \cos \varphi).$$

$N$  est donc toujours négatif, ce qui signifie que  $\frac{NE}{e}$  représente partout en réalité une pression. Quant à  $X$ , nous verrons tout à l'heure qu'il peut changer de signe ; mais il est certain à priori que  $\frac{XE u}{er^2}$  représente une tension ou une pression suivant qu'on prend des points situés d'un côté ou de l'autre de l'axe de flexion ; les points pressés seraient du côté de l'extrados ou de l'intrados de l'arc, suivant que  $X$  serait positif ou négatif.

Comme les effets de la force  $N$  et du couple  $X$  doivent être superposés, on voit que, pour les points où  $X$  tendrait à produire une pression, il y aura nécessairement une pression exprimée en valeur absolue par

$$- \frac{NE}{e} \pm \frac{XE u}{er^2},$$



le signe du second terme étant choisi de manière à le rendre positif, c'est-à-dire de manière à additionner les valeurs absolues des deux termes  $-\frac{NE}{e}$  et  $\pm \frac{XE u}{er^2}$ . Au contraire, pour les points où  $X$ , agissant seul, produirait une tension, il faudrait prendre la différence de ces mêmes valeurs absolues, et il n'y aurait en réalité tension que si la seconde l'emportait sur la première.

Dans les données de la question, nous avons admis que le coefficient  $E$  atteignait son maximum  $E_1$  en même temps que  $u$  atteint sa plus grande valeur absolue, qui est  $\frac{h}{2}$  des deux côtés de l'axe de flexion. Le maximum de pression dans une section donnée sera donc la somme des valeurs absolues de  $\frac{NE_1}{e}$  et de  $\frac{XE_1 h}{2er^2}$ ; le maximum de tension, s'il y a tension dans certains points, sera la différence des mêmes quantités. Ainsi la tension maximum, quand elle existera, sera nécessairement inférieure à la pression maximum, et assez ordinairement petite relativement à cette pression. D'un autre côté, quand il s'agit de corps résistant à des forces qui les fléchissent, il arrive souvent qu'on s'impose la même limite pour les pressions et les tensions compatibles avec la stabilité. C'est pourquoi nous nous bornerons à chercher le maximum maximorum des pressions par unité de surface, ou le maximum, relativement à la variable  $\alpha$ , de la somme des valeurs absolues  $-\frac{NE_1}{e}$  et  $\pm \frac{X h E_1}{2er^2}$ , ou bien de

$$\frac{E_1}{e} \left( -N \pm \frac{X h}{2r^2} \right),$$

quantité que nous désignerons dorénavant par la lettre  $q$ .

120. *Signes que prend le moment X.* — Avant d'aller plus loin, il est nécessaire de faire cesser l'ambiguïté de signe et de chercher celui des deux qu'on devra prendre suivant la position de la section à laquelle se rapporte l'expression précé-

dente. Or on a

$$X = -Q\rho(\cos\alpha - \cos\varphi) + T\rho(\sin\varphi - \sin\alpha) - \frac{1}{2}p\rho^2(\sin\varphi - \sin\alpha)^2,$$

ou bien, si l'on se rappelle que  $T = p\rho\sin\varphi = pa$ , et si l'on pose  $Q = n \cdot 2pa$ ,  $n$  étant un nombre qu'on sait calculer,

$$X = \frac{1}{2}p\rho^2(\sin^2\varphi - \sin^2\alpha) - 2np\rho^2\sin\varphi(\cos\alpha - \cos\varphi);$$

$\sin^2\varphi - \sin^2\alpha$  est égal à  $\cos^2\alpha - \cos^2\varphi$ ; donc

$$X = \frac{1}{2}p\rho^2(\cos\alpha - \cos\varphi)(\cos\alpha + \cos\varphi - 4n\sin\varphi).$$

Cette expression devient nulle pour  $\alpha = \varphi$ , comme on devait s'y attendre, puisque nous avons supposé (n° 54) les réactions des appuis appliquées aux centres d'élasticité des sections extrêmes; elle s'annulera encore quand on aura

$$\cos\alpha = 4n\sin\varphi - \cos\varphi = \cos\alpha_1;$$

mais cette solution ne répondra véritablement à un point de la fibre moyenne que si l'angle  $\alpha_1$ , déterminé par l'équation ci-dessus, est réel et plus petit que  $\varphi$ . Il faut donc poser les deux conditions

$$4n\sin\varphi - \cos\varphi < 1,$$

$$4n\sin\varphi - \cos\varphi > \cos\varphi.$$

De la première on déduit

$$4n\sin\varphi < 1 + \cos\varphi,$$

$$n < \frac{1 + \cos\varphi}{4\sin\varphi} \quad \text{ou} \quad n < \frac{1}{4\tan\frac{1}{2}\varphi};$$

$n$  doit donc être au-dessous de  $\frac{1}{4\tan\frac{1}{2}\varphi}$ , ce qui a toujours lieu, car nous avons fait voir (n° 110) qu'on a

$$Q < \frac{pa^2}{2f},$$

et, par suite,

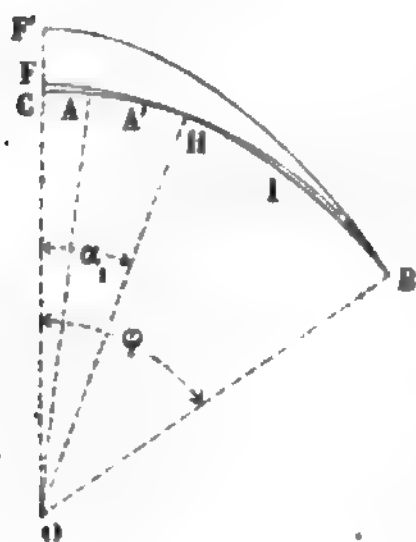
$$\frac{Q}{2pa} < \frac{a}{4f}, \quad \text{ou bien} \quad n < \frac{1}{4\tan\frac{1}{2}\varphi}.$$

Il n'y a donc à s'occuper que de la seconde condition, qui peut s'écrire

$$n > \frac{1}{2} \cotang \varphi.$$

En supposant  $n$  supérieur à  $\frac{1}{2} \cotang \varphi$ , le moment  $X$  deviendra nul en un point tel que  $H$  (fig. 53), qui correspond à un angle  $\alpha_1$  compris entre 0 et  $\varphi$ , c'est-à-dire que la courbe BIF, lieu géométrique des centres de pression dans les sections

Fig. 53.



successives, aura deux points,  $B$  et  $H$ , communs avec la fibre moyenne  $CAB$ . S'il en est ainsi, on reconnaît en outre que  $X$  sera positif entre  $\alpha=0$  et  $\alpha=\alpha_1$ , tandis qu'il sera négatif depuis  $\alpha=\alpha_1$  jusqu'à  $\alpha=\varphi$ ; en effet le facteur  $\cos \alpha + \cos \varphi - 4n \sin \varphi$ , qui donne son signe à  $X$ , décroît quand  $\alpha$  est au contraire croissant; donc, puisque ce facteur est nul pour  $\alpha = \alpha_1$ , il est positif pour les valeurs plus petites de  $\alpha$  et négatif pour celles qui sont au-dessus. En vertu de ce qui a été dit au n° 118, on devra donc prendre pour la formule donnant la pression maximum dans une section déterminée :

$$\text{Depuis } \alpha = 0 \text{ jusqu'à } \alpha = \alpha_1 \dots \quad q = \frac{E_1}{e} \left( -N + \frac{Xh}{2r^2} \right),$$

$$\text{Depuis } \alpha = \alpha_1 \text{ jusqu'à } \alpha = \varphi \dots \quad q' = \frac{E_1}{e} \left( -N - \frac{Xh}{2r^2} \right).$$

Si l'on avait au contraire  $n < \frac{1}{2} \cotang \varphi$ , cela voudrait dire que, même en faisant  $\alpha = \varphi$ ,  $X$  serait encore positif, et, par suite, qu'il le serait dans toute l'étendue de l'arc. On n'aurait donc à étudier que l'expression

$$q = \frac{E_1}{e} \left( -N + \frac{Xh}{2r^2} \right).$$

Il est facile de se rendre compte, dans ces deux cas, de la position occupée par la courbe des pressions. En effet  $X$  n'est autre chose que le moment de la force  $N$  appliquée au centre

de pression, par rapport au centre d'élasticité dans la même section. Donc, d'après le sens connu de  $N$  et le sens positif adopté pour  $X$ , on peut conclure que si  $X$  est positif, la courbe des pressions passe au-dessus de la fibre moyenne, et au-dessous si  $X$  est négatif.

Nous sommes maintenant en mesure de traiter la question qui fait l'objet principal de ce paragraphe. Il y aura deux cas principaux à distinguer, celui où l'on a  $n > \frac{1}{2} \cotang \varphi$  et celui où l'on a  $n < \frac{1}{2} \cotang \varphi$ ; car nous venons de reconnaître que la plus grande pression dans une section déterminée est parfois exprimée d'une manière différente quand on passe de l'un de ces cas à l'autre.

**121. Pression maximum dans toute l'étendue de la pièce quand le rapport  $n$  est plus grand que  $\frac{1}{2} \cotang \varphi$ .** — La plus forte pression dans une section donnée se représente alors par les formules suivantes (n° 120) :

Dans la portion CH de la pièce (*fig. 53*).  $q = \frac{E_1}{e} \left( -N + \frac{Xh}{2r^2} \right),$

Dans la portion HB. . . . .  $q' = \frac{E_1}{e} \left( -N - \frac{Xh}{2r^2} \right).$

En remplaçant  $N$  et  $X$  par leurs valeurs en fonction de  $\alpha$ , et ordonnant par rapport à  $\cos \alpha$ , après avoir mis  $1 - \cos^2 \alpha$  et  $1 - \cos^2 \varphi$  au lieu de  $\sin^2 \alpha$  et  $\sin^2 \varphi$ , on aura

$$q = \frac{p\rho E_1}{e} \left[ \begin{array}{l} \left( -1 + \frac{1}{4} \frac{\rho h}{r^2} \right) \cos^2 \alpha - \left( -1 + \frac{1}{2} \frac{\rho h}{r^2} \right) 2n \sin \varphi \cos \alpha \\ + 1 + \frac{1}{4} \frac{\rho h}{r^2} \cos^2 \varphi (4n \sin \varphi - \cos \varphi) \end{array} \right],$$

$$q' = \frac{p\rho E_1}{e} \left[ \begin{array}{l} - \left( 1 + \frac{1}{4} \frac{\rho h}{r^2} \right) \cos^2 \alpha + \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{\rho h}{r^2} \right) 2n \sin \varphi \cos \alpha \\ + 1 - \frac{1}{4} \frac{\rho h}{r^2} \cos^2 \varphi (4n \sin \varphi - \cos \varphi) \end{array} \right].$$

Il s'agit d'avoir le maximum maximorum de ces deux expressions quand  $\alpha$  varie dans les limites entre lesquelles elles s'ap-

pliquent, savoir entre 0 et  $\alpha_1$  (n° 120) pour la première, et entre  $\alpha_1$  et  $\varphi$  pour la seconde.

A cet effet, nous remarquerons d'abord que si l'on représente  $q$  et  $q'$  par les ordonnées de deux courbes dont les valeurs de  $\cos \alpha$  seraient les abscisses, toutes les ordonnées seront positives dans les limites ci-dessus fixées. En outre, ces courbes seront des paraboles : celle qui représente  $q$  tournera sa concavité vers le haut, et la seconde la tournera vers le bas. On le voit facilement en se rappelant que  $r^2$  est plus petit que  $\frac{h^2}{4}$  (n° 102) ;

d'où résulte l'inégalité  $\frac{1}{4} \frac{\rho h}{r^2} > \frac{\rho}{h}$ . Comme, d'un autre côté,  $h$  ne peut être qu'une assez petite fraction de  $\rho$ , il s'ensuit que  $\frac{\rho}{h} - 1$ , et à fortiori  $\frac{1}{4} \frac{\rho h}{r^2} - 1$  sont des quantités positives.

Donc le coefficient de  $\cos^2 \alpha$  est positif dans la première équation, tandis qu'il est négatif dans la seconde ; donc les deux paraboles ont bien la situation qui vient d'être définie.

De cette situation nous pouvons immédiatement conclure que la plus grande valeur de  $q$  doit répondre à l'une des limites  $\alpha = 0$  ou  $\alpha = -\alpha_1$ . La première donnera le résultat

$$q_1 = \frac{P\rho}{e} E_1 \left\{ 2n \sin \varphi + \frac{1}{4} \frac{\rho h}{r^2} \sin \varphi [\sin \varphi - 4n(1 - \cos \varphi)] \right\},$$

ou bien, à cause de  $\rho \sin \varphi = a$  et de  $\frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi} = \tan \frac{1}{2} \varphi$ ,

$$(5) \quad q_1 = \frac{pa}{e} E_1 \left[ 2n + \frac{1}{4} \frac{ah}{r^2} \left( 1 - 4n \tan \frac{1}{2} \varphi \right) \right];$$

Quant à la valeur correspondante à  $\alpha = \alpha_1$  ou au point H (fig. 53), nous pouvons ne pas nous en occuper ici, car nous la retrouverons parmi les valeurs de  $q'$  ; le point H appartient aussi bien à la portion BH qu'à la portion CH de la fibre moyenne.

La parabole représentative de  $q'$  tournant sa concavité vers l'axe des  $x$ , et ayant ses ordonnées positives, il est clair que la tangente horizontale donnera le maximum, si elle correspond à une valeur de  $\cos \alpha$  comprise entre les limites  $\cos \alpha_1$  et  $\cos \varphi$  :

sinon le maximum devra répondre à l'une de ces limites. Cherchons d'abord la condition pour que la première hypothèse se réalise. Pour cela, soit  $\alpha_2$  l'angle  $\alpha$  qui répond à la tangente horizontale dont il s'agit : cet angle devra satisfaire à l'équation

$$\frac{dq'}{d \cos \alpha} = 0,$$

ce qui donne, en effectuant la dérivation,

$$-\left(1 + \frac{1}{4} \frac{\rho h}{r^2}\right) \cos \alpha_2 + \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\rho h}{r^2}\right) n \sin \varphi = 0,$$

ou bien

$$\cos \alpha_2 = n \sin \varphi \frac{1 + \frac{1}{2} \frac{\rho h}{r^2}}{1 + \frac{1}{4} \frac{\rho h}{r^2}}.$$

Cette valeur sera admissible quand on aura

$$\cos \alpha_2 < \cos \alpha_1 \quad \text{et} \quad \cos \alpha_2 > \cos \varphi,$$

c'est-à-dire, en remplaçant  $\cos \alpha_2$  et  $\cos \alpha_1$  par leurs expressions,

$$n \sin \varphi \frac{1 + \frac{1}{2} \frac{\rho h}{r^2}}{1 + \frac{1}{4} \frac{\rho h}{r^2}} < 4 n \sin \varphi - \cos \varphi,$$

$$n \sin \varphi \frac{1 + \frac{1}{2} \frac{\rho h}{r^2}}{1 + \frac{1}{4} \frac{\rho h}{r^2}} > \cos \varphi.$$

Réunissons tous les termes de la première inégalité qui contiennent le facteur  $n$ ; alors elle devient

$$n \sin \varphi \frac{3 + \frac{1}{2} \frac{\rho h}{r^2}}{1 + \frac{1}{4} \frac{\rho h}{r^2}} > \cos \varphi,$$

et ainsi écrite, elle est une conséquence évidente de la se-



conde. Celle-ci donne

$$n > \frac{1}{2} \cotang \varphi \left( 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \frac{\rho h}{r^2}} \right),$$

soit,

$$(6) \quad n > \frac{1}{2} \cotang \varphi \left( 1 + \frac{2 \sin \varphi}{2 \sin \varphi + \frac{ah}{r^2}} \right).$$

Le premier cas principal est caractérisé par la relation  $n > \frac{1}{2} \cotang \varphi$ ; mais cette inégalité n'entraîne pas forcément l'inégalité (6), parce que  $\frac{1}{2} \cotang \varphi$  s'y trouve multipliée par un facteur plus grand que 1. Il y a donc lieu de subdiviser en deux cas secondaires le cas dont nous nous occupons ici.

1°. *La condition exprimée par l'inégalité (6) est satisfaite.* Le maximum de pression dans l'étendue HB répond alors à  $\alpha = \alpha_1$ . On le trouve par la substitution de  $\cos \alpha_1$  dans l'expression générale de  $q'$ ; mais pour éviter un calcul compliqué, on remarquera que  $\frac{\rho h}{r^2}$  étant un nombre assez grand, la valeur de  $\cos \alpha_1$ ,

$$\cos \alpha_1 = n \sin \varphi \frac{1 + \frac{1}{2} \frac{\rho h}{r^2}}{1 + \frac{1}{4} \frac{\rho h}{r^2}},$$

différera peu de  $2n \sin \varphi$ , car il n'y a pas d'erreur bien notable à supprimer le terme 1 au numérateur et au dénominateur de la fraction. D'ailleurs, quand on se trouve aux environs d'un maximum, on peut, sans l'altérer sensiblement, prendre la valeur de la fonction qui correspond à une valeur de la variable peu éloignée de celle qui donne le maximum. Substituant en conséquence  $2n \sin \varphi$  à la place de  $\cos \alpha$  dans l'expression de  $q'$ , et faisant dans le résultat  $\rho = \frac{a}{\sin \varphi}$ , on trouvera pour la valeur de  $q'$ , du maximum en question

$$(7) \quad q'_1 = \frac{paE}{e} \left[ \frac{1}{\sin \varphi} + \frac{ah}{r^2} \left( n - \frac{1}{2} \cotang \varphi \right)^2 \right].$$

2°. *L'inégalité (2) n'est pas vérifiée.* Dans cette hypothèse, la parabole représentative de  $q'$  n'a pas, dans la partie que nous devons considérer, de tangente horizontale. Le maximum, dans cette partie, répond donc à l'une des deux limites  $\alpha = \alpha_1$  ou  $\alpha = \varphi$ . On sait que le cosinus de  $\alpha_1$  est donné par la relation (n° 120)

$$\cos \alpha_1 = 4n \sin \varphi - \cos \varphi.$$

Substituant successivement cette valeur et  $\cos \varphi$  dans  $q'$ , qui se réduit ici à  $-\frac{NE_1}{e}$ , parce que  $X$  s'annule aux limites dont il s'agit, on trouvera les deux résultats

$$\begin{aligned} q'_1 &= \frac{p\rho}{e} E_1 [6n \sin \varphi \cos \varphi - (8n^2 - 1) \sin^2 \varphi] \\ &= \frac{pa}{e} E_1 [6n \cos \varphi - (8n^2 - 1) \sin \varphi], \end{aligned}$$

$$(8) \quad q'_2 = \frac{pa}{e} E_1 (2n \cos \varphi + \sin \varphi).$$

Il est aisé de voir que  $q'_2$ , valeur qui répond à  $\cos \alpha = \cos \varphi$ , est supérieure à  $q'_1$ , car on trouve par la soustraction

$$q'_2 - q'_1 = 4n \frac{pa}{e} E_1 (2n \sin \varphi - \cos \varphi).$$

Or, dans le cas actuel, on a  $n > \frac{1}{2} \cotang \varphi$ , et, par suite,  $2n \sin \varphi > \cos \varphi$ , ce qui prouve le fait énoncé. Dans la seconde subdivision du premier cas principal, la pression maximum, pour la portion HB de la pièce, se trouvera donc à la naissance, et sera donnée par la formule (8).

Quelle que soit celle des deux subdivisions dans laquelle on se trouve, il faudra toujours, pour avoir le maximum maximum que nous cherchons, prendre le maximum dans la partie CH, puis dans la partie HB, et choisir le plus grand des deux. La discussion à laquelle nous venons de nous livrer sur le premier cas principal se résume donc ainsi :

*Lorsque  $n$  (rapport de la poussée au poids total de la travée) sera plus grand que la limite indiquée par l'inégalité (6),*

la pression maximum sera la plus grande des deux valeurs données par les formules (5) et (7), dont la première répond à l'extrados et au sommet, et la seconde à l'intrados, en un point pris sur les reins de l'arc.

Lorsque  $n$  est compris entre la limite ci-dessus et  $\frac{1}{2} \cotang \varphi$ , on doit dans l'énoncé précédent substituer à la formule (7) la formule (8), qui donne la pression maximum sur le joint des naissances.

**122. Pression maximum, quand  $n$  est inférieur à  $\frac{1}{2} \cotang \varphi$ .**

— Dans ce cas, nous avons dit (n° 119) qu'on aurait seulement à étudier l'expression

$$q = \frac{E_1}{e} \left( -N + \frac{Xh}{2r^2} \right),$$

dont il faut chercher le maximum en faisant varier  $\alpha$  de 0 à  $\varphi$ . Cette expression est identique avec celle de  $q$  dont nous nous sommes servi au n° 121; si donc nous revenions à la considération de la parabole représentative, il faudrait conclure que le maximum de cette expression doit nécessairement correspondre à l'une des limites de  $\alpha$ . Or  $\alpha = 0$  donne la formule (5);  $\alpha = \varphi$  donne la formule (8), car,  $X$  étant nul,  $q$  et  $q'$  deviennent égaux. Donc on devra prendre la plus grande des deux valeurs données par ces formules. Donc, enfin, le second cas principal ne se distingue en rien de la seconde subdivision du premier cas.

Il n'y a donc à distinguer réellement que les deux cas de  $n$  plus grand et  $n$  plus petit que la limite indiquée par la formule (6) : le premier exigerait l'emploi des formules (5) et (7), le second l'emploi des formules (5) et (8).

**123. Remarque sur le cas d'une section transversale homogène.** — Ce cas est compris comme cas particulier dans l'étude que nous venons de faire. La seule modification à introduire dans les formules consiste à remplacer  $\frac{E_1}{e}$  par l'inverse de l'aire de la section, ou par  $\frac{1}{\Omega}$ , en désignant cette aire par  $\Omega$ . En ef-

set  $e$  n'est autre chose que la somme des produits des éléments superficiels par leur coefficient d'élasticité longitudinale  $E$ , ou bien  $E\Omega$ , puisque  $E$  ne varie pas d'une fibre à l'autre; d'ailleurs, par la même raison, nous aurions  $E = E_1$ ; donc

$$\frac{E_1}{e} = \frac{E}{E\Omega} = \frac{1}{\Omega}.$$

• 124. *Pression maximum produite par la seule existence d'une dilatation indépendante des charges.* — Revenons maintenant au calcul des effets produits spécialement par les variations de température ou par le calage, et généralement par une dilatation quelconque due à une cause étrangère aux charges. Si l'on appelle  $Q$  la poussée de l'arc dilaté sur ses deux appuis, la composante normale  $N$  de la force totale exercée sur la section qui fait l'angle  $\alpha$  avec la verticale, sera  $-Q \cos \alpha$ ;  $y$  étant l'ordonnée du centre d'élasticité de cette section par rapport à la corde, le moment fléchissant sera  $-Qy$ . Ces deux quantités atteignent leur plus grande valeur absolue au sommet de l'arc, où le cosinus devient égal à 1 et où l'ordonnée  $y$  coïncide avec la flèche  $f$  de la fibre moyenne. En outre, on voit que dans chaque section la partie comprimée par le moment fléchissant se trouve du côté de l'intrados, et on sait que la pression la plus grande produite par ce moment est supportée par les fibres les plus éloignées de l'axe de flexion. On aura donc, d'après les considérations du n° 119, en désignant par  $q''$  la pression maximum cherchée, due tout à la fois à la compression uniforme et à la flexion, et conservant la signification déjà connue dans ce paragraphe aux lettres  $h, e, E_1, r$ :

$$q'' = \frac{QE_1}{e} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{hf}{r^2} \right).$$

Or, d'après ce qu'on a vu au n° 107,  $Q$  peut être remplacé par

$$\tau e \frac{r^2}{r^2 + \frac{8}{15} f^2}; \text{ donc}$$

$$(9) \quad q'' = E_1 \tau \left( \frac{r^2 + \frac{1}{2} hf}{r^2 + \frac{8}{15} f^2} \right).$$

Dans la plupart des cas particuliers  $r^2$  sera petit relativement à  $\frac{1}{2} hf$  et à  $\frac{8}{15} f^2$ ; on pourra donc poser approximativement, en considérant les nombres  $\frac{1}{2}$  et  $\frac{8}{15}$  comme à peu près égaux,

$$(10) \quad q'' = E_1 \tau \frac{h}{f};$$

mais cette formule ne saurait être appliquée aux pièces presque droites, dans lesquelles  $r$  peut devenir grand relativement à  $f$ . Il faudrait alors s'en tenir à la formule (9).

*Exemple numérique.* — Soit donné un arc du viaduc de Tarascon, dont la section a été définie au n° 111; supposons une dilatation linéaire ayant un coefficient de 0,0004, ce qui répondrait à une variation de température de 36 degrés centigrades. On a ici

$$\tau = 0,0004, \quad r^2 = 0,3022, \quad h = 1^m,70, \quad f = 4^m,95;$$

en outre, comme il s'agit d'une pièce en fonte, on peut, suivant l'expérience, prendre pour le maximum  $E_1$  du coefficient d'élasticité longitudinale la valeur

$$E_1 = 12 \cdot 10^9.$$

Avec ces données on trouve sans peine le maximum de pression par unité de surface dû spécialement à la dilatation  $\tau$ ; il est

$$\text{d'après la formule (9)..... } q'' = 1^{\text{mm}},62 \cdot 10^6;$$

$$\text{d'après la formule (10)..... } q'' = 1^{\text{mm}},65 \cdot 10^6.$$

Comme on le voit, les deux formules donnent à peu près le même résultat, savoir environ  $1^{\text{mm}},6$  par millimètre carré.

### § III. — Construction, disposition et usage de la table V destinée à faciliter l'emploi des formules du paragraphe précédent.

125. *But de la table; arguments pour y entrer.* — Les formules (5), (7) et (8) du paragraphe précédent, auxquelles nous avons été conduit en nous occupant de la résistance d'un arc dans les circonstances définies au n° 117, sont par elles-mêmes assez peu compliquées, et nous paraissent susceptibles d'être employées en pratique. Néanmoins le désir d'en faciliter l'u-

sage autant que possible nous a engagé à construire la table V, placée à la fin de ce Cours. Cette table aura d'ailleurs un autre avantage, c'est qu'elle mettra en évidence quelques conséquences remarquables des formules, que les seules ressources de l'analyse permettraient difficilement d'apercevoir.

Conservons les notations des n<sup>os</sup> 118 et 119, et appelons en outre  $\Omega$  l'aire de la section de l'arc. Quel que soit le cas particulier dans lequel on se trouve, on aura toujours, en employant soit les formules (5) et (7), soit les formules (5) et (8), à calculer des expressions telles que

$$\epsilon \frac{pa}{e} E_1,$$

ou, si la section est homogène,

$$\epsilon \frac{pa}{\Omega},$$

$\epsilon$  étant un coefficient numérique variable d'une pièce à une autre.

Nous n'avons rien à dire ici des quantités  $pa$ ,  $e$ ,  $E_1$ ,  $\Omega$  : leur définition même explique suffisamment comment on peut les connaître ; mais nous avons à montrer de quelle manière on arrivera, par le secours de la table V, à trouver la valeur de  $\epsilon$ .

Par l'inspection des formules que nous venons de citer, on voit que  $\epsilon$  est exprimé au moyen des relations

$$\epsilon = 2n + \frac{1}{4} \frac{ah}{r^2} \left( 1 - 4n \tan \frac{1}{2} \varphi \right), \text{ dans la formule (5),}$$

$$\epsilon = \frac{1}{\sin \varphi} + \frac{ah}{r^2} \left( n - \frac{1}{2} \cotang \varphi \right)^2, \text{ dans la formule (7),}$$

$$\epsilon = 2n \cos \varphi + \sin \varphi, \text{ dans la formule (8).}$$

$n$  désigne le rapport de la poussée horizontale de l'arc au poids total  $2pa$  : ce rapport est donné par la formule (6) du n<sup>o</sup> 101 ou par les tables, et l'on voit qu'il dépend uniquement du rapport  $\frac{r^2}{a^2}$  et de l'angle  $\varphi$  ou du rapport  $\frac{2\varphi}{\pi}$  de cet angle à l'an-



gle droit; d'un autre côté, on a identiquement

$$\frac{ah}{r^2} = \frac{h}{a} \cdot \frac{r^2}{a^2};$$

donc les trois expressions du coefficient  $\delta$  dépendent de trois arguments qui sont :

1°. Le rapport  $\frac{r^2}{a^2}$ ;

2°. L'angle  $\varphi$ , ou le rapport  $\frac{2\varphi}{\pi}$ ;

3°. Le rapport  $\frac{h}{a}$ .

Lorsque ces trois arguments seront connus, on conçoit que l'on pourrait d'abord calculer  $n$  par des formules ou les tables du chapitre IV; puis, ayant  $n$ , voir celui des cas examinés au § II ci-devant dans lequel on se trouve; déterminer les deux valeurs de  $\delta$  qui conviennent à ce cas et choisir la plus forte. En la multipliant par  $\frac{pa}{e} E_1$ , ou par  $\frac{pa}{\Omega}$  si la section est homogène, on aurait la pression maximum cherchée. Or c'est toute cette série d'opérations, sauf la dernière, que la table V dispense de faire. On y a consigné la valeur de  $\delta$  que l'on doit finalement employer, savoir la plus grande des deux qui sont fournies par les formules (5) et (7) ou (5) et (8), suivant le cas.

Nous ne croyons pas devoir expliquer en détail la construction de la table; elle revient en définitive à la réunion d'un certain nombre de solutions obtenues comme nous venons de le faire concevoir. Seulement la simultanéité dans la recherche de tous ces résultats rendait celle-ci plus prompte et plus sûre; elle permettait aussi l'emploi de quelques procédés simples de calcul, qu'il serait cependant sans intérêt de développer ici.

126. *Disposition et emploi de la table.* — La table est à triple entrée, ou plutôt elle se compose d'une série de tables à double entrée dont chacune occupe une page. L'argument  $\frac{r^2}{a^2}$  est inscrit dans le haut de la page; l'argument  $\frac{2\varphi}{\pi}$  dans une colonne verticale, à gauche; l'argument  $\frac{h}{a}$  dans une colonne

horizontale, en tête de chaque tableau. Une question particulière étant définie par ces trois arguments, le premier indiquera la page, le second la colonne horizontale, le troisième la colonne verticale, dans lesquelles on doit chercher la valeur de  $\epsilon$ .

*Exemples.* — Prenons  $\frac{r^2}{a^2} = 0,0004$ ,  $\frac{2\varphi}{\pi} = 0,21$ ,  $\frac{h}{a} = 0,060$ ; la table V donne  $\epsilon = 4,0$ . Si l'on avait  $\frac{r^2}{a^2} = 0,0006$ ,  $\frac{2\varphi}{\pi} = 0,44$ ,  $\frac{h}{a} = 0,075$ , on trouverait  $\epsilon = 2,2$ .

Dans le cas où les arguments ne seraient pas exactement dans la table, mais seraient compris entre ceux qui s'y trouvent, on pourra procéder par interpolation, ou bien se contenter de la valeur correspondante aux arguments les plus rapprochés. Exemple : on a  $\frac{r^2}{a^2} = 0,000336$ ,  $\frac{2\varphi}{\pi} = 0,2082$ ,  $\frac{h}{a} = 0,0567$ . Prenant  $\frac{r^2}{a^2} = 0,0003$ ,  $\frac{2\varphi}{\pi} = 0,21$ ,  $\frac{h}{a} = 0,055$ , on trouvera dans la table  $\epsilon = 4,0$ ; si l'on passe à la page suivante de la table et qu'on porte  $\frac{r^2}{a^2}$  de 0,0003 à 0,0004, on aura  $\epsilon = 3,9$ . D'ailleurs on voit dans l'une et l'autre page qu'un petit changement de  $\frac{2\varphi}{\pi}$  et de  $\frac{h}{a}$  autour de 0,21 et de 0,055 n'altère  $\epsilon$  que faiblement; donc  $\epsilon$  est approximativement égal à 4,0. Si l'on tenait à procéder par interpolations régulières, la détermination de  $\epsilon$  serait plus longue, mais toujours facile. Voici le tableau des calculs :

NUMÉROS des opérations.	ARGUMENTS.			VALEUR de $\epsilon$ .	OBSERVATIONS.
	$r^2 \frac{1}{a^2}$ .	$\frac{2p}{\pi}$ .	$\frac{h}{a}$ .		
1	0,0003	0,20	0,055	4,2	Les valeurs de $\epsilon$ sans astérisques proviennent directement de la table; les autres sont fournies par interpolation.
2	0,0003	0,20	0,060	4,3	
3	0,0003	0,20	0,0567	4,23*	
4	0,0003	0,21	0,055	4,0	
5	0,0003	0,21	0,060	4,1	
6	0,0003	0,21	0,0567	4,03*	Opération n° 3, par interpolation entre 1 et 2, 6, 4 et 5, 7, 3 et 6, 10, 8 et 9, 13, 11 et 12, 14, 10 et 13, 15, 7 et 14.
7	0,0003	0,2082	0,0567	4,07*	
8	0,0004	0,20	0,055	4,2	
9	0,0004	0,20	0,060	4,3	
10	0,0004	0,20	0,0567	4,23*	
11	0,0004	0,21	0,055	3,9	L'opération 15 donne le résultat cherché.
12	0,0004	0,21	0,060	4,0	
13	0,0004	0,21	0,0567	3,93*	
14	0,0004	0,2082	0,0567	3,98*	
15	0,000336	0,2082	0,0567	4,01*	

Ce tableau se comprend de lui-même. On voit qu'il exige huit recherches dans la table et sept interpolations, et quoique cela soit très-élémentaire, on perdrait ainsi le grand avantage de la rapidité. Hâtons-nous de dire que cette rigueur de calcul sera le plus souvent inutile : nous voyons en effet dans l'exemple précédent que l'interpolation nous a donné la même valeur de  $\epsilon$  que nous avons obtenue déjà par l'emploi d'arguments approchés. Au reste, les interpolations qui concernent le rapport  $\frac{h}{a}$  pourraient être faites à la lecture ; alors le tableau ci-dessus serait réduit aux opérations 3, 6, 7, 10, 13, 14, 15, c'est-à-dire diminué de plus de moitié.

La table ne donne  $\epsilon$  qu'avec deux chiffres, c'est-à-dire avec une approximation variable qui parfois peut entraîner une erreur relative de  $\frac{1}{25}$  ou  $\frac{1}{30}$ .

Quand il s'agit d'en venir aux applications numériques, les constructeurs les plus recommandables diffèrent beaucoup d'opinion dans le choix d'un coefficient de résistance : pour la fonte, par exemple, les uns lui feront supporter 3 kilogrammes par millimètre carré, les autres 4, les autres 5 ou même davantage, de telle sorte qu'on manque de données bien précises au sujet de ce nombre, qui, suivant les habitudes de chaque praticien, varie plus que du simple au double. Dans de telles circonstances, il nous semble tout à fait inutile, nous dirions presque puéril, de rechercher une plus grande approximation, au prix de calculs notablement plus longs et plus compliqués.

On remarquera dans chaque page de la table un trait horizontal brisé à une certaine hauteur. En voici le sens : les nombres qui sont au-dessus ont été fournis par l'application de la formule (5) (n° 121), et, par conséquent, le maximum de la pression est alors au sommet et à l'extrados de l'arc ; les nombres en dessous du trait proviennent au contraire de l'emploi de la formule (7) (n° 121), ce qui place le maximum de pression aux reins et à l'intrados. Quant à la formule (8), nous n'avons pas eu occasion de l'appliquer. On peut donc dire que la plus grande pression se produira rarement aux naissances.

127. *Limites de la table.* — Les valeurs de  $\frac{r^2}{a^2}$  varient de dix-millième en dix-millième, depuis 0,0001 jusqu'à 0,0006 ; puis viennent les valeurs 0,0008, 0,0010, 0,0012 et enfin 0,0015. Dans les arcs existants, pour la grande majorité, le rapport en question est compris entre 0,0002 et 0,0005. Un seul des exemples cités au n° 102 donne une valeur plus petite : c'est le pont du Carrousel à Paris ; un seul donne une valeur supérieure : c'est le viaduc de Lormont (chemin de fer de Bordeaux), pour lequel  $\frac{r^2}{a^2}$  s'approche de 0,0008. Nous pensons donc que les limites 0,0001 et 0,0015 ont une amplitude suffisante.

Lorsque  $\frac{r^2}{a^2}$  est donné, le rapport  $\frac{h}{a}$  ne doit pas être pris tout à fait arbitrairement. En premier lieu on a (n° 102)  $r < \frac{h}{2}$ , et, par conséquent,

$$\frac{h}{a} > 2 \frac{r}{a} \quad \text{ou} \quad \frac{h}{a} > 2 \sqrt{z},$$

en posant  $\frac{r^2}{a^2} = z$ . D'un autre côté, en considérant les formes usitées pour la section transversale, on voit que le rapport  $\frac{r^2}{h^2}$  descend bien rarement au-dessous du nombre  $\frac{1}{12}$ , qui correspond à la section rectangulaire. On peut donc, à fortiori, admettre comme limite inférieure  $\frac{r^2}{h^2} = \frac{1}{16}$ , nombre répondant au cercle plein. Alors on aura  $h^2 < 16r^2$ , soit  $\frac{h^2}{a^2} < 16z$ , et enfin  $\frac{h}{a} < 4\sqrt{z}$ . Donc  $\frac{h}{a}$  sera compris entre  $2\sqrt{z}$  et  $4\sqrt{z}$ . Attribuant successivement à  $z$  ou  $\frac{r^2}{a^2}$  les valeurs de la table, on forme le tableau ci-après :

VALEURS DE $\frac{r^2}{a^2}$	LIMITE INFÉRIEURE DE $\frac{h}{a}$	LIMITE SUPÉRIEURE DE $\frac{h}{a}$
0,0001	0,020	0,040
0,0002	0,028	0,057
0,0003	0,035	0,070
0,0004	0,040	0,080
0,0005	0,045	0,090
0,0006	0,049	0,098
0,0008	0,057	0,114
0,0010	0,063	0,127
0,0012	0,069	0,139
0,0015	0,078	0,156

Pour permettre les interpolations entre les résultats qui correspondent à deux valeurs consécutives de  $\frac{r^2}{a^2}$ , nous avons remplacé dans la seconde colonne du tableau précédent chaque nombre par celui qui est immédiatement au-dessus, et au contraire nous avons descendu d'un rang dans la colonne des limites supérieures. Par exemple, lorsque  $\frac{r^2}{a^2}$  est égal à 0,0003, au lieu de supposer  $\frac{h}{a}$  compris entre 0,035 et 0,070, nous avons admis

qu'il pourrait varier entre 0,028 et 0,080. En outre, nous avons cru devoir rejeter comme inutile en pratique toute valeur de  $\frac{h}{a}$  inférieure à 0,03 et supérieure à 0,10. Ces deux modifications conduisent au tableau suivant, dans lequel on n'a d'ailleurs introduit que des multiples de 0,005 pour les limites cherchées, en les exprimant à moins de 0,003 près :

VALEURS DE $\frac{r^2}{a^2}$	LIMITE INFÉRIEURE DE $\frac{h}{a}$	LIMITE SUPÉRIEURE DE $\frac{h}{a}$
0,0001	0,030	0,055
0,0002	0,030	0,070
0,0003	0,030	0,080
0,0004	0,035	0,090
0,0005	0,040	0,100
0,0006	0,045	0,100
0,0008	0,050	0,100
0,0010	0,060	0,100
0,0012	0,065	0,100
0,0015	0,070	0,100

L'existence de ces limites explique les blancs qui sont restés dans les pages de la table.

Pour ce qui concerne l'angle  $\varphi$ , on a fait varier le rapport  $\frac{2\varphi}{\pi}$  entre 0,12 et 1,00, comme dans les tables de poussée. Mais les valeurs de ce rapport ne procèdent par degrés rapprochés (de 0,01 en 0,01) qu'entre  $\frac{2\varphi}{\pi} = 0,20$  et  $\frac{2\varphi}{\pi} = 0,32$ , c'est-à-dire dans l'intervalle qui comprend les arcs les plus ordinairement employés; en dehors de ces limites, il y avait peu d'inconvénient à avoir des différences plus fortes, et cette mesure a été prise pour ne pas trop augmenter le volume de la table.

128. *Exemple du calcul de la résistance d'un arc de pont sous la charge d'épreuve.* — Quand une fois on aura obtenu le coefficient  $\epsilon$ , comme il a été dit au n° 126, le calcul de la résistance s'achèvera aisément. En voici un exemple.

Supposons les données suivantes :

Arguments pour entrer dans la table V :  $\frac{r^2}{a^2} = 0,000336$ ,  $\frac{2\varphi}{\pi} = 0,2082$ ,  
 $\frac{h}{a} = 0,0567$ ;

Poids de la demi-travée, uniformément réparti suivant l'horizontale  
 $pa = 105$  tonnes;

Aire de la section supposée homogène,  $\Omega = 0^m 1,428$ .



La division de  $pa$  exprimée en tonnes, par 1000 fois  $\Omega$  exprimé en mètres carrés, donnera le quotient  $\frac{pa}{\Omega}$  exprimé en kilogrammes par millimètre carré,

$$\frac{pa}{\Omega} = 0^{\text{kl}},735.$$

D'un autre côté, les arguments ci-dessus indiqués nous ont donné (n° 126) la valeur de  $\epsilon$  égale à 4,0 : donc la plus grande pression, rapportée au millimètre carré, sera

$$0^{\text{kl}},735 \times 4,0 = 2^{\text{kl}},9;$$

c'est-à-dire que la matière de l'arc sera soumise à une pression maximum de près de 3 kilogrammes ( $2^{\text{kl}},9$ ) par millimètre carré.

Ces données et ce résultat conviendraient approximativement au viaduc de Tarascon, si la fonte pouvait être regardée comme homogène : nous disons approximativement, parce que la section n'est pas tout à fait symétrique par rapport à l'horizontale du centre de gravité. D'ailleurs, l'augmentation du coefficient d'élasticité vers les bords pourrait conduire à modifier notablement le chiffre de  $2^{\text{kl}},9$ . Quoique les données expérimentales nous manquent pour effectuer le calcul avec quelque précision, nous rappellerons que les constructeurs du viaduc de Tarascon, MM. Desplaces et Collet-Meygret, ont évalué à 6000000000 le coefficient moyen d'élasticité longitudinale des arcs (n° 113), de sorte que l'on a

$$e = 0,1428.6.10^9.$$

De plus le nombre  $E$ , paraît devoir être fixé à  $12.10^9$  (voir plus loin les indications données sur ce sujet, au § 1<sup>er</sup> du chapitre VII) : donc

$$pa \frac{E_1}{e} = 105000 \cdot \frac{12.10^9}{0,1428.6.10^9} = 1,47.10^6.$$

Ainsi, la quantité à multiplier par le coefficient  $\epsilon$  aurait une valeur double de celle que nous avons supposée tout à l'heure.

Quant à  $\epsilon$  il dépend du rapport  $\frac{r^2}{a^2}$ , qui peut être altéré aussi par le défaut d'homogénéité de la section ; mais la table V montre qu'avec les arguments  $\frac{2\varphi}{\pi} = 0,21$  et  $\frac{h}{a} = 0,055$ ,  $\epsilon$  ne s'écarte pas sensiblement de 4,0,

quand même  $\frac{r^2}{a^2}$  varierait de 0,0001 à 0,0008. Il faut donc conclure de

toutes ces considérations que probablement la pression maximum demandée se trouve aux environs de 6 kilogrammes par millimètre carré.

Il est juste d'ajouter que ce maximum a lieu en des points situés à la

surface extérieure de la section. Or ces points s'étant refroidis plus vite que les autres pendant le moulage de la fonte, par suite de leur contact avec le moule, la matière y est plus serrée et plus dure que dans l'intérieur. C'est pour cela que déjà nous avons supposé au maximum  $E_1$  une valeur double de la moyenne : il est probable que la même circonstance rend aussi la matière susceptible de mieux résister à l'écrasement. Quand on pénètre à une profondeur de  $0^m,01$  ou  $0^m,02$  au-dessous de la surface, peut-être la fonte devient-elle beaucoup plus molle et moins résistante : mais, par compensation,  $E_1$  serait remplacé par un nombre beaucoup plus faible, ce qui diminuerait la pression moléculaire par unité de surface.

§ IV. — Des circonstances qui peuvent influer sur la résistance d'un arc à section constante, chargé uniformément suivant l'horizontale. — Vérification de la stabilité sous la charge d'épreuve.

129. *Généralités.* — On suppose toujours ici les circonstances générales admises dans tout ce chapitre, savoir celles qui ont été indiquées au n° 118. Ainsi l'arc est à fibre moyenne circulaire, avec une section constante; sa corde est maintenue invariable par deux appuis fixes placés au même niveau, et aucun autre obstacle ne gêne ses déformations; la charge, y compris le poids propre des pièces, consiste en un poids uniformément réparti suivant l'horizontale; enfin, la section a une forme telle, que l'arc fléchit dans son plan vertical, sans gauchissement (n° 45). Alors la pression maximum, si la section est en outre supposée homogène, sera représentée, comme on vient de le voir au paragraphe précédent, par  $\epsilon \frac{pa}{\Omega}$ . Nous nous proposons ici d'examiner de quelle manière varie ce maximum quand, laissant le poids total  $pa$  et l'aire  $\Omega$  constants, on fait varier les trois arguments qui ont servi à trouver  $\epsilon$  (n° 125) : pour cela, il suffira d'étudier les variations de  $\epsilon$ , et c'est ce que nous allons faire maintenant. Les trois quantités dont nous avons à rechercher l'influence, sont :

1°. Le demi-angle  $\varphi$  au centre de l'arc, qui caractérise la figure de la fibre moyenne;

2°. Le rayon de gyration  $r$  et la hauteur  $h$  de la section, comparés à l'ouverture  $2a$  de l'arc, ou, en termes plus gén-

raux, les éléments qui sont introduits par la forme de la section transversale.

130. *Influence du demi-angle au centre de la fibre moyenne, ou du rapport entre la flèche et l'ouverture.* — Pour se rendre compte de cette influence, il suffit de prendre la table V et de parcourir les colonnes verticales : ces colonnes renferment effectivement une série de valeurs de  $\epsilon$ , obtenues en faisant varier le rapport  $\frac{2\varphi}{\pi}$  sans changer  $\frac{r^2}{a^2}$  ni  $\frac{h}{a}$ . Or on voit qu'en partant de  $\frac{2\varphi}{\pi} = 0,12$  et allant jusqu'au plein cintre,  $\epsilon$  diminue d'abord pour augmenter ensuite; c'est-à-dire qu'il y a une certaine valeur de  $\frac{2\varphi}{\pi}$  à laquelle correspond le minimum de  $\epsilon$ , ou la plus grande résistance à une charge uniformément répartie suivant l'horizontale, toutes choses égales d'ailleurs. On remarque en outre que, dans une même page de la table,  $\frac{r^2}{a^2}$  restant constant, cet angle  $\varphi$ , qui donne à l'arc le plus de résistance, varie peu quand le rapport  $\frac{h}{a}$  change. C'est pourquoi, dans le tableau ci-dessous, nous indiquons seulement une valeur de  $\frac{2\varphi}{\pi}$  pour chaque valeur de  $\frac{r^2}{a^2}$  : elle est une moyenne entre celles que l'on obtiendrait en faisant varier  $\frac{h}{a}$ , dans les limites de la table. Nous y avons de plus consigné, en regard du nombre  $\frac{2\varphi}{\pi}$ , la valeur correspondante du rapport de la flèche à l'ouverture, rapport dont les ingénieurs se servent ordinairement pour définir la figure de la fibre moyenne.

RAPPORT $\frac{r^3}{a^3}$	RAPPORT $\frac{2\varphi}{\pi}$ entre l'arc de résistance maximum et la demi-circonférence.	VALEUR CORRESPONDANTE du rapport de la flèche à l'ouverture.
0,0001	0,31	0,1242
0,0002	0,37	0,1495
0,0003	0,39	0,1581
0,0004	0,41	0,1668
0,0005	0,43	0,1756
0,0006	0,46	0,1889
0,0008	0,48	0,1980
0,0010	0,51	0,2117
0,0012	0,52	0,2164
0,0015	0,53	0,2210

Les chiffres de la seconde colonne de ce tableau ne doivent être considérés, bien entendu, que comme approximatifs. Pour avoir plus de précision il aurait fallu construire la table avec trois ou quatre chiffres, au lieu de deux. Mais comme aux environs d'un minimum les variations sont faibles, une solution plus exacte serait sans intérêt pratique.

On voit par conséquent que si l'on construit une série d'arcs dont la section serait la même, ainsi que la charge totale et l'ouverture, ces arcs étant tous d'ailleurs dans les conditions rappelées au n° 129, celui-là résistera le mieux, qui aura un demi-angle au centre variant de 0,31 à 0,53 d'angle droit, suivant la valeur de  $\frac{r^3}{a^3}$  qui résulte des dimensions données de la section. Par exemple, si  $\frac{r^3}{a^3}$  était égal à 0,0003, il faudrait que le demi-angle au centre fût environ 0,39 d'angle droit, ou que la fibre moyenne fût 0,39 de sa demi-circonférence, ou bien encore que la flèche fût les 0,158 de l'ouverture, si d'autres motifs ne devaient pas être pris en considération. Les arcs destinés à supporter des travées de pont sont en général un peu plus surbaissés : on augmente ainsi le débouché laissé au libre écoulement des eaux, et on diminue l'importance des tympans.

Cependant il ne faudrait pas se laisser aller à employer, sans raison particulière, un surbaissement excessif : car les variations de température pourraient alors donner lieu à une poussée considérable (n° 107), d'où résulteraient des efforts accidentellement très-grands, dans la matière de l'arc.

Ainsi, dans le pont de Tarascon, surbaissé au douzième, une dilatation linéaire de 0,0004 entraînerait un supplément de pression égal à environ 1<sup>kil</sup>,6 par millimètre carré (n° 124), ce qui constitue déjà une pression notable, bien que le surbaissement soit modéré.

131. *Influences spéciales de la hauteur de la section transversale et de son rayon de gyration.* — Lorsque  $\frac{r^2}{a^2}$  et  $\frac{2\varphi}{\pi}$  restent constants, les valeurs successives qui résultent pour  $\delta$  des changements de  $\frac{h}{a}$  se trouvent sur une même ligne horizontale de l'une des pages : par conséquent on voit qu'elles sont croissantes avec  $\frac{h}{a}$ . Au contraire, si laissant  $\frac{2\varphi}{\pi}$  et  $\frac{h}{a}$  invariables, on fait passer  $\frac{r^2}{a^2}$  par des valeurs de plus en plus grandes, on sera conduit à reconnaître que  $\delta$  diminue. Nous concluons donc qu'il est avantageux de diminuer autant que possible la hauteur, quand on peut le faire sans entraîner une diminution correspondante dans le rayon de gyration ; et, par contre, que la hauteur restant fixe, il est bon que le rayon de gyration soit aussi grand que possible. Ces mêmes remarques sont vraies pour les pièces droites (n° 87).

132. *Influence des variations de forme de la section transversale, en général.* — Lorsque les changements de forme de la section transversale ont pour conséquence de modifier à la fois, dans le même sens, sa hauteur et son rayon de gyration, on ne peut plus dire à priori quel en sera le résultat. Si par exemple la hauteur augmente, ce sera pour la pression maximum une cause d'augmentation ; mais d'un autre côté cette pression diminuera simultanément par suite de l'accroissement du rayon de gyration. L'effet total sera dans un sens ou dans l'autre, suivant les cas.

Voici un exemple curieux sur ce sujet. Une série d'arcs de même ouverture satisfait sous le rapport de la charge, de la section, etc., aux conditions rappelées au n° 129; tous ont une section rectangulaire, homogène et d'égale surface; tous supportent la même charge, y compris leur poids propre : on demande d'étudier comment variera la pression maximum, quand on augmentera ou diminuera la hauteur de la section, la base variant en raison inverse, de manière à laisser le produit constant.

Dans la question actuelle, le rayon de gyration  $r$  est toujours lié à la hauteur  $h$  par la relation très-simple  $r^2 = \frac{1}{12} \cdot h^2$ ; d'où l'on conclura  $\frac{r^2}{a^2}$  quand  $\frac{h}{a}$  sera donné. Nous avons d'abord considéré trois sections rectangulaires, que nous désignerons par les n° 1, 2, 3, et dont les hauteurs sont décroissantes, comme il est indiqué ci-après :

$$\begin{aligned} \text{Section 1} \dots \frac{h}{a} &= 0,10, & \frac{r^2}{a^2} &= \frac{1}{12} \cdot 0,01 = 0,000833; \\ \text{Section 2} \dots \frac{h}{a} &= 0,06, & \frac{r^2}{a^2} &= \frac{1}{12} \cdot 0,0036 = 0,0003; \\ \text{Section 3} \dots \frac{h}{a} &= 0,035, & \frac{r^2}{a^2} &= \frac{1}{12} \cdot 0,001225 = 0,000102. \end{aligned}$$

Si l'on choisit, en outre, une valeur quelconque de l'angle au centre, la table V fera aisément connaître les valeurs correspondantes du coefficient 6. Voici ce qu'on trouve :

RAPPORT $\frac{2\varphi}{\pi}$	COEFFICIENT 6 POUR LA SECTION			RAPPORT $\frac{2\varphi}{\pi}$	COEFFICIENT 6 POUR LA SECTION		
	n° 1.	n° 2.	n° 3.		n° 1.	n° 2.	n° 3.
0,12	9,0	7,9	6,9	0,38	2,5	2,5	3,2
0,14	7,4	6,5	5,9	0,40	2,4	2,6	3,4
0,16	6,3	5,6	5,1	0,44	2,3	2,7	3,6
0,18	5,5	4,9	4,5	0,48	2,2	2,8	3,9
0,20	4,8	4,3	4,1	0,52	2,3	3,0	4,3
0,22	4,3	3,9	3,7	0,56	2,4	3,3	4,8
0,24	3,9	3,6	3,5	0,60	2,6	3,5	5,4
0,26	3,5	3,3	3,3	0,68	3,0	4,3	6,6
0,28	3,3	3,1	3,2	0,76	3,6	5,3	8,3
0,30	3,0	2,9	3,0	0,84	4,3	6,5	10,5
0,32	2,9	2,8	3,1	0,92	5,2	8,1	13,2
0,34	2,8	2,7	3,1	1,00	6,4	10,0	16,6
0,36	2,6	2,6	3,1				



Ce tableau montre que pour résister à une charge uniformément répartie suivant l'horizontale (sous les autres conditions du n° 129), la section n° 3 sera la meilleure quand  $\varphi$  sera au-dessous de 0,26 d'angle droit, depuis  $\frac{2\varphi}{\pi} = 0,26$  jusqu'à  $\frac{2\varphi}{\pi} = 0,36$  ou 0,38, ce sera la section n° 2 qui donnera lieu à la moindre pression, et au-dessus de  $\frac{2\varphi}{\pi} = 0,38$ , la section n° 1 prendra le premier rang. La différence de résistance est très-marquée pour les arcs voisins du plein cintre, quand  $\frac{2\varphi}{\pi}$  se rapproche de 1,00; elle est moins sensible pour les arcs très-surbaissés, et disparaît, pour ainsi dire, entre les limites  $\frac{2\varphi}{\pi} = 0,26$  et  $\frac{2\varphi}{\pi} = 0,32$  correspondantes au surbaissement de  $\frac{1}{10}$  et de  $\frac{1}{8}$  environ.

Le tableau ci-dessus indiquant que pour les arcs fortement surbaissés on augmente la résistance en diminuant la hauteur de l'arc (dont la section conserve bien entendu son aire constante), il y a de l'intérêt à chercher la hauteur qui donnerait le résultat le plus avantageux. Nous avons fait cette recherche par tâtonnement pour la valeur  $\frac{2\varphi}{\pi} = 0,12$ , non plus au moyen des tables, dont les limites deviennent trop restreintes, mais en nous servant directement des formules du n° 121. Voici les résultats de cinq essais :

1°.  $\frac{h}{a} = 0,02$ ;  $\frac{r^2}{a^2} = \frac{1}{12}(0,02)^2 = 0,0000333$ ; rapport de la poussée au poids de la travée,  $n = 2,624$ . La valeur de  $\epsilon$  est donnée par la formule (5) du n° 121; on trouve  $\epsilon = 6,4$ .

2°.  $\frac{h}{a} = 0,015$ ;  $\frac{r^2}{a^2} = \frac{1}{12}(0,015)^2 = 0,00001875$ ;  $n = 2,632$ . Le premier maximum se trouve par la même formule, qui donne  $\epsilon = 6,2$ .

3°.  $\frac{h}{a} = 0,01$ ;  $\frac{r^2}{a^2} = \frac{1}{12}(0,01)^2 = 0,00000833$ ;  $n = 2,637$ . La valeur de  $\epsilon$  est toujours donnée par la formule (5); elle est  $\epsilon = 6,2$ .

4°.  $\frac{h}{a} = 0,005$ ;  $\frac{r^2}{a^2} = \frac{1}{12}(0,005)^2 = 0,00000208$ ;  $n = 2,640$ . On trouve encore par la même formule  $\epsilon = 6,4$ .

5°.  $\frac{h}{a} = 0,001$ ;  $\frac{r^2}{a^2} = \frac{1}{12}(0,001)^2 = 0,0000000833$ ;  $n = 2,641$ . Dans ce cas, la formule (7) conduit à un résultat plus fort que la formule (5), savoir  $\epsilon = 10,4$ .

En conséquence, dans la question qui nous occupe, le rapport le plus favorable de la hauteur à la demi-ouverture serait voisin de 0,01 ou 0,015,

nombres auxquels correspondent les valeurs de  $\epsilon$  sensiblement égales. On voit que ces valeurs sont à peu près les 0,7 de celle qu'on obtiendrait en faisant  $\frac{h}{a} = 0,10$ ; et les sections restant constantes ainsi que la charge, les pressions maxima seraient dans le même rapport. On voit, en outre, que si l'on diminue trop le rapport  $\frac{h}{a}$ , on finit par rendre  $\epsilon$  plus grand qu'il ne l'était pour  $\frac{h}{a} = 0,10$ . A la limite, en faisant  $h = 0$ , on aurait  $\epsilon = \infty$ ; car on a  $r^2 = \frac{1}{12}h^2$ , par suite  $\frac{ah}{r^2} = \frac{12a}{h}$ , quantité qui devient infinie quand  $h$  s'annule, et qui rend également infinis les seconds membres des formules (5) et (7) (n° 121).

**133. Réflexions sur les exemples qui précèdent.** — Il convient d'insister sur ce qu'il y a de remarquable et d'inattendu dans les résultats que nous venons d'obtenir. Les formules de résistance des pièces droites et de nombreuses expériences ont montré que, à section et à charges égales, les pièces rectangulaires résistent d'autant mieux, qu'elles ont une plus grande hauteur transversale. Il en est tout différemment dans une pièce courbe, et quelquefois l'augmentation de la hauteur de la section est nuisible à la résistance. Souvent elle est indifférente et ne produit pas de changement sensible.

On n'oubliera pas les données admises dans la solution de ces problèmes. Nous nous sommes occupé exclusivement de la résistance à une charge uniformément répartie suivant l'horizontale, sous certaines conditions (n° 129). S'il y avait en quelques points des poids isolés assez considérables, les résultats pourraient se trouver modifiés. Ainsi nous nous sommes assuré (par un calcul que nous supprimons, pour ne pas étendre outre mesure cette discussion) que si l'on considérait seulement la résistance à un poids suspendu au sommet,  $\frac{2\varphi}{\pi}$  étant égal à 0,12, et toute autre charge étant négligée, le rapport  $\frac{h}{a} = 0,10$  serait celui qui produirait la moindre pression parmi tous ceux essayés au n° 132. L'examen de circonstances que nous avons omises dans cet ouvrage, notamment l'étude des effets produits par les chocs et les vibrations, conduirait peut-être aussi à des nombres un peu différents.

D'ailleurs il est des doutes qui peuvent naître de la théorie elle-même. Sans parler des hypothèses fondamentales, dont il est permis de douter puisque ce sont des hypothèses, nous avons admis (n° 54) une répartition uniforme de la réaction des appuis sur les sections extrêmes : or, pour une section de faible hauteur, comme nous en avons trouvé au n° 132,

un léger écart aurait une influence assez grande sur la résistance. Quoi qu'il en soit, le fait théorique mis en lumière par les exemples du n° 132 est digne de fixer l'attention des constructeurs, et des expériences sur ce sujet seraient à désirer.

Il serait difficile d'expliquer à priori d'une manière complète ces résultats, qui se présentent ici comme corollaires de calculs passablement compliqués. Seulement, quand on en cherche la trace dans les calculs antérieurs, voici ce qu'on remarque.

1°. Le déplacement d'un point appartenant à la fibre moyenne d'une pièce courbe, par l'effet d'une force, est composé de deux parties :

Celle qui est due à la variation des angles de contingence,

Celle qui est produite par l'extensibilité de la fibre moyenne.

Lorsque, sans altérer les charges et l'aire de la section, on change seulement la forme de celle-ci, la seconde partie reste constante, mais la première varie en raison inverse du carré du rayon de gyration ; car il y a d'autant plus de résistance à la rotation relative des sections, qu'elles ont un plus grand moment d'inertie.

2°. Un arc circulaire à section constante, placé dans les conditions du chapitre IV, étant uniquement chargé de poids, on diminue sa poussée quand on augmente le moment d'inertie (ou le rayon de gyration de sa section), sans en altérer la surface. En effet, on a vu (n° 102) que la poussée s'obtient en multipliant ce que nous avons appelé sa partie prin-

cipale par le coefficient  $\frac{1 - \lambda \frac{r^2}{a^2}}{1 + \lambda' \frac{r^2}{a^2}}$ , qui diminue évidemment quand  $r$  aug-

mente, tandis que la partie principale ne dépend pas de cette ligne. En examinant les choses de près, on reconnaît que la partie principale serait la poussée qui se produirait si l'on pouvait faire abstraction des variations de longueur de la fibre moyenne ; les coefficients  $\lambda$  et  $\lambda'$  s'introduisent quand on en tient compte. Or, d'après la remarque précédente, ces variations prennent une importance relative d'autant plus grande, que le rayon de gyration  $r$  est plus considérable, toutes choses égales d'ailleurs : l'altération de la poussée principale doit naturellement alors être plus profonde.

3°. Supposons un arc à fibre moyenne parabolique chargé de poids uniformément distribués suivant l'horizontale et symétrique par rapport à la verticale du sommet. Soient  $p$  le poids par mètre courant horizontal,  $2a$  l'ouverture,  $f$  la flèche. Appliquons à chaque extrémité une force verticale ascendante  $pa$  et une force horizontale  $\frac{pa^2}{2f}$  dirigée du côté de la verticale du milieu. Les choses étant ainsi, on reconnaît aisément que les forces extérieures, agissant depuis une extrémité jusqu'à un point quel-

conque de la fibre moyenne, ont un moment nul par rapport à ce point, et on en conclut que les angles de contingence ne varient pas par le déplacement de l'arc; de telle sorte que si l'on négligeait la compressibilité de la fibre moyenne, les dimensions ne changeraient pas et les extrémités resteraient fixes. Si l'on supprime les forces  $pa$  et  $\frac{pa^2}{2f}$  appliquées à chacun des points extrêmes, mais qu'on rende ceux-ci invariables, il est clair d'après cela qu'ils fourniront les réactions  $pa$  et  $\frac{pa^2}{2f}$ , puisque ce sont elles qui sont capables de produire l'immobilité de ces points. La même conséquence s'étend à un arc circulaire très-surbaissé, parce que cet arc peut être confondu avec une parabole. Mais elle cesse d'être admissible pour la parabole comme pour le cercle dès que le rayon de gyration de la section transversale est un peu grand, parce que la compressibilité de la fibre moyenne devient une cause relativement importante de déformation, et qu'on ne peut plus la négliger.

4°. Quand la poussée d'un arc parabolique, ou circulaire et à petite flèche, est égale à  $\frac{pa^2}{2f}$ , le moment des forces étant toujours nul, comme on vient de le dire, la courbe des pressions se confond avec la fibre moyenne; donc la pression se répartit uniformément sur toutes les sections, ce qui est favorable à la résistance. Puisqu'une augmentation du rayon de gyration fait décroître la poussée, elle tend aussi à écarter de plus en plus la courbe des pressions de la fibre moyenne, ce qui produit dans chaque section une répartition inégale de la force et tend à augmenter la pression maximum.

Mais il existe dans les formules (5) et (7) du n° 122 un facteur  $\frac{ah}{r^2}$  dans lequel le carré  $r^2$  du rayon de gyration entre en dénominateur; l'accroissement de  $r$  tend donc aussi, d'un autre côté, à diminuer la pression maximum. Ce sera l'une ou l'autre de ces deux tendances qui l'emportera, suivant les cas, et quelquefois elles se contre-balanceront. Lorsque  $r$  varie seul et va en croissant, la hauteur  $h$  de la section et toutes les autres quantités restant constantes, nous avons vu (n° 131) que la pression maximum est décroissante. Mais si  $h$  croît proportionnellement à  $r$ , de telle sorte que le rapport  $\frac{ah}{r^2}$  soit en raison inverse de la première puissance de  $r$ , au lieu de la seconde, l'exemple du n° 132 montre que c'est alors la première tendance qui domine et qu'il est avantageux d'avoir un faible rayon de gyration, ou, si l'on veut, un faible moment d'inertie. Toutefois l'avantage cesserait, comme on l'a vu, en prenant des sections trop aplaties, parce que la coïncidence de la courbe des pressions avec la fibre

moyenne n'est qu'approximative, et le petit écart qui existe entre les deux courbes a une très-grande influence quand la hauteur de la section est très-petite.

**134. Vérification de la stabilité sous la charge d'épreuve.**— Quand on aura déterminé la pression maximum qui a lieu sous l'action de cette charge, il suffira de s'assurer que ce maximum est au-dessous de la limite que l'expérience fait connaître. Si l'on se donne toutes les dimensions de la section excepté une, ou si l'on se donne une figure semblable à la section, la condition dont nous venons de parler suffira pour en compléter la détermination.

Cette vérification de la stabilité ne se rapportant qu'à un des systèmes de charges qui peuvent peser sur la pièce, ne doit sans doute être regardée que comme une première indication. Pour avoir une certitude plus complète, il faudrait considérer tous les systèmes de charges, et prendre, dans chaque section, celui qui serait le plus défavorable à la résistance; il faudrait, en un mot, répéter pour les pièces courbes ce que nous avons fait au § III du chapitre III, pour les pièces droites. Mais ce serait une discussion trop compliquée pour être faite autrement que sur des cas particuliers. Nous avons donné dans ce Cours les indications générales qui peuvent être utiles à l'ingénieur auquel un projet de pièce courbe donnerait occasion de l'entreprendre.

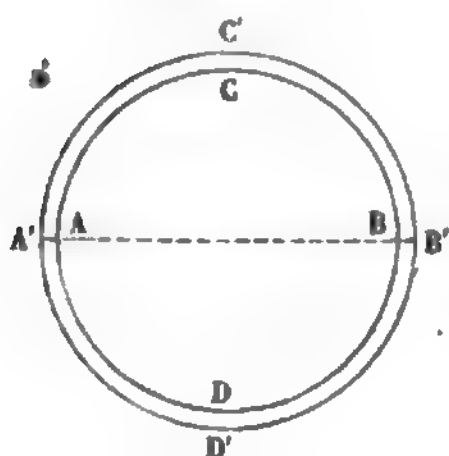
**§ V. — Résistance des vases cylindriques soumis à la pression uniforme d'un gaz; épaisseur qu'il convient de donner aux parois d'une chaudière à vapeur.**

**135. Résistance d'une chaudière à profil exactement circulaire.**— Supposons un vase de longueur indéterminée, dont la matière est comprise entre deux cylindres circulaires concentriques. La *fig. 54* en représente le profil transversal. A l'intérieur agit une pression constante de  $p$  kilogrammes par unité de surface; à l'extérieur une pression  $p'$ . On néglige toutes les autres influences déformatrices, telles que le poids propre du vase, la réaction des appuis, l'action des bases du cylindre, etc.



Les choses étant ainsi, on voit tout d'abord que la fibre

Fig. 54.



moyenne du profil ACBD A'C'B'D', considéré comme pièce courbe, doit rester circulaire après l'action des pressions  $p$  et  $p'$ , comme avant. Car tout étant symétrique par rapport au diamètre A'B', ce diamètre restera encore axe de symétrie dans l'état final, et par suite sera encore normal à la fibre moyenne; comme

on peut en dire autant de toute autre ligne passant par le centre primitif O, on voit que toutes les normales de la fibre moyenne définitive concourent en un même point, propriété qui n'appartient qu'aux normales d'un cercle. Les sections normales telles que AA' ou BB' n'éprouvent donc pas de mouvement de flexion, et sont par conséquent soumises à une tension ou pression uniforme.

Pour en connaître la valeur, il faut chercher l'intensité de la résultante des pressions exercées sur la surface concave ACB et sur la surface convexe A'C'B', résultante qui doit être équilibrée par les actions moléculaires des sections AA' et BB'. Or la résultante se trouve aisément, quand on se rappelle ce théorème d'Hydrostatique, savoir : que si une pression constante par une unité de surface est appliquée normalement sur un contour fermé, la résultante des pressions sur les divers éléments superficiels est alors nulle. Si l'on appelle  $d$  le diamètre AB,  $d'$  le diamètre A'B',  $l$  la longueur du cylindre perpendiculairement au plan de la figure, en considérant ACB et A'C'B' comme des contours fermés (y compris les plans AB, A'B'), on voit que la pression totale supportée par le demi-cylindre ACB est égale à celle que supporterait le plan AB, soit à  $pld$ , et que la pression supportée par A'C'B' est de même  $p'ld'$ . La résultante est donc

$$\pm l (pd - p'd') = R.$$

Elle tendra à opérer la séparation des deux moitiés du vase en AA' et BB' si la pression intérieure l'emporte; elle serrera ces deux moitiés l'une contre l'autre, dans le cas contraire.



Soit maintenant  $c$  l'épaisseur  $\overline{AA'} = \frac{1}{2} (d' - d)$ ; soit encore  $T$  la plus grande force longitudinale par unité de surface à laquelle on veuille soumettre la matière du vase. La force  $R$  est équilibrée par une pression ou tension uniforme exercée sur la surface  $2 \overline{AA'}.l$  ou  $l(d - d')$  ou  $2lc$ ; donc pour obtenir l'épaisseur strictement nécessaire, on devra poser

$$\frac{\pm l (pd - p'd')}{2lc} = T,$$

soit à cause de  $d' = d + 2c$ ,

$$\pm (p - p') d \mp 2p'c = 2Tc;$$

d'où l'on tire l'inconnue

$$c = \pm \frac{1}{2} \frac{(p - p') d}{T \pm p'}.$$

Le double signe  $\pm$  doit être remplacé par  $+$  si  $p$  est plus grand que  $p'$ , et par  $-$  si  $p'$  est plus grand que  $p$ .

La quantité  $T$ , lorsqu'il s'agit de chaudières à vapeur en tôle, est grande relativement à  $p'$ . En effet, si  $p'$  équivalait à une pression de dix atmosphères, ce qui dépasse déjà les limites ordinaires, on aurait  $p' = 10.10330 = 103300$  kilogrammes; or, on prend, d'après les règlements administratifs,  $T = 2850000$ , soit  $T > 27p'$ . On écrira donc simplement, en désignant par  $p''$  la valeur absolue de la différence  $p - p'$  (quantité qu'on appelle aussi la pression effective),

$$c = \frac{1}{2} \frac{p'' d}{T}.$$

Lorsque la pression effective  $p''$  est exprimée en atmosphères,  $n$  étant le nombre d'atmosphères correspondant, on a  $p'' = 10330 n$ ; substituant cette valeur dans  $c$ , et faisant en outre  $T = 2850000$ , on trouvera

$$c = 0,0018 nd.$$

L'ordonnance royale du 22 mai 1843 prescrit de déterminer la moindre épaisseur des chaudières à vapeur, dans le cas où

la pression intérieure est dominante, par la formule

$$(11) \quad c = 0,0018 nd + 0,003.$$

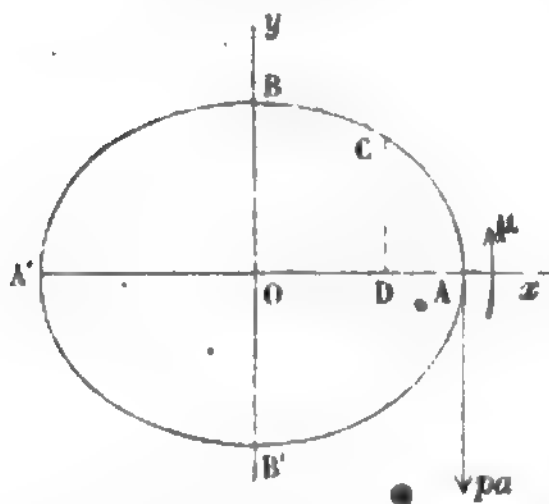
L'excédant de 3 millimètres donné par cette formule a pour but de pourvoir à l'usure de la chaudière et aux circonstances secondaires dont la théorie ne tient pas compte.

Quant aux chaudières ou tuyaux à vapeur pressés du dehors en dedans, l'ordonnance précitée porte qu'on leur donnera une épaisseur plus grande et qu'ils seront en outre munis d'armatures. Une instruction ministérielle du 17 décembre 1848 exige que dans ce cas l'épaisseur de la tôle soit une fois et demie celle que donne la formule (11). Elle recommande d'ailleurs comme armature, des anneaux en fer forgé concentriques avec le tuyau à renforcer. Pour justifier ces prescriptions, on peut dire d'abord que si  $p'$  l'emporte, la matière est comprimée au lieu d'être tendue, et que la tôle résiste moins bien aux pressions qu'aux tensions; en outre, un cylindre circulaire supportant extérieurement une pression uniforme, est pour ainsi dire en état d'équilibre instable : car si, par une cause accidentelle, le profil s'est un peu aplati, de manière à se rapprocher d'une ellipse, l'aplatissement s'augmentera par l'effet de la pression, tandis qu'il diminuerait par l'effet d'une pression intérieure dominante. Or un très-faible écart de la forme circulaire a pour résultat de mettre en jeu la flexion, de donner lieu à une inégale répartition des forces moléculaires, et enfin d'exiger une épaisseur plus grande pour résister convenablement. C'est ce qu'on va voir par la solution du problème ci-après.

136. *Résistance d'une chaudière à profil faiblement elliptique.*  
— Soit  $ABA'B'$  (*fig. 55*) le profil transversal moyen de la chaudière, dans la forme définitive que lui a donnée l'action du gaz. Pour fixer les idées, nous supposerons la pression intérieure dominante, et nous désignerons par  $p$  l'intensité de la pression effective rapportée au mètre carré. La courbe  $ABA'B$  est une ellipse peu différente d'un cercle, dont les axes principaux sont  $\overline{AA'}$ ,  $\overline{BB'}$ ; nous poserons  $\overline{AA'} = 2a$  et  $\overline{BB'} = 2a\sqrt{1-\varepsilon^2}$ ,  $\varepsilon$  étant la quantité (ici très-petite) qu'on

appelle *excentricité de l'ellipse*. Imaginons que la chaudière

Fig. 55.



soit coupée en deux par le plan  $AA'$  et prenons une portion ayant pour longueur l'unité, suivant la perpendiculaire au plan de la figure. Nous aurons ainsi une pièce courbe, dont  $ABA'$ , par exemple, serait la fibre moyenne, et dont il faudra vérifier la résistance.

Il est avant tout nécessaire de connaître les actions qui s'exercent dans le plan de séparation des deux moitiés  $ABA'$ ,  $AB'A'$ , ou, en d'autres termes, quelles forces il faut supposer exercées dans ce plan pour pouvoir enlever  $AB'A'$  et ne conserver que la moitié supérieure du profil. On voit d'abord que dans le joint  $A$ , les réactions égales et contraires des deux moitiés l'une sur l'autre, sont deux forces verticales, car il faut qu'elles soit à la fois dirigées suivant la même ligne et symétriques par rapport à  $AA'$ . Leur intensité est d'ailleurs  $pa$ , parce que la résultante des pressions exercées sur la surface courbe  $ABA'$  est égale à la pression exercée sur le plan  $AOA'$  ou à  $2pa$  et que les réactions en  $A$  et  $A'$  sont les mêmes. Toutefois nous ne connaissons pas d'avance le point d'application de ces réactions; pour les considérer comme appliquées sur la fibre moyenne elle-même, il faut en même temps joindre à chacune de ces forces un couple  $\mu$ , produit par le déplacement de leur point d'application. Donc enfin la pièce courbe  $ABA'$  doit être regardée comme soumise :

1°. Aux pressions exercées par le gaz sur les différents éléments du cylindre  $ABA'$ ;

2°. A deux forces dont l'intensité est  $pa$ , dirigées de haut en bas (si la position intérieure domine) et appliquées suivant la tangente à la fibre moyenne, en  $A$  et en  $A'$ ;

3°. A deux couples  $\mu$ ,  $-\mu$ , appliqués dans les sections extrêmes, en  $A$  et  $A'$ .

Pour déterminer  $\mu$ , on exprimera que la rotation relative des sections  $B$  et  $A$  est nulle. Or si l'on prend un point  $C$  sur le quart d'ellipse  $AB$ , la pression du gaz sur  $CA$  étant la même

que sur la ligne brisée CDA qui a les mêmes extrémités, le moment fléchissant au point C sera

$$X = \frac{1}{2} p [y^2 + (a - x)^2] - pa(a - x) + \mu,$$

équation dans laquelle  $y = \overline{CD}$ ,  $x = \overline{OD}$  sont les coordonnées de C par rapport aux axes principaux de l'ellipse. En réduisant on trouve :

$$X = \frac{1}{2} p (y^2 + x^2 - a^2) + \mu.$$

D'ailleurs l'équation de l'ellipse sera

$$y^2 + (1 - \epsilon^2) x^2 = a^2 (1 - \epsilon^2),$$

et l'on en tire

$$y^2 + x^2 - a^2 = \epsilon^2 (x^2 - a^2);$$

donc aussi

$$X = \frac{1}{2} p \epsilon^2 (x^2 - a^2) + \mu.$$

La rotation relative de la section faite en C, et de la section infiniment voisine séparée de la première par un arc  $ds$  de la fibre moyenne, sera, sauf un facteur constant,  $X ds$ ; et puisque la rotation relative des sections faites en B et A doit être nulle, il faudra qu'on ait

$$\int X ds = 0,$$

l'intégrale étant prise dans l'étendue totale de l'arc AB. On posera donc, en appelant L la longueur de cet arc,

$$\frac{1}{2} p \epsilon^2 \int x^2 ds - \frac{1}{2} p \epsilon^2 a^2 L + \mu L = 0.$$

$\int x^2 ds$  est le moment d'inertie de l'arc AB relativement à l'axe des  $y$ , ou bien L multiplié par le carré du rayon de gyration; et comme l'arc AB diffère très-peu d'un quart de cercle, le carré du rayon de gyration sera sensiblement égal à  $\frac{1}{2} a^2$  (n° 6).

Donc

$$\frac{1}{4} p \epsilon^2 a^2 L - \frac{1}{2} p \epsilon^2 a^2 L + \mu L = 0,$$

et par suite

$$\mu = \frac{1}{4} p a^2 \epsilon^2,$$

valeur qui, substituée dans X, donne

$$X = \frac{1}{4} p \epsilon^2 (2x^2 - a^2).$$

On voit par cette expression que le moment fléchissant X est d'abord négatif aux environs du point B, où il a pour valeur  $-\frac{1}{2} p a^2 \epsilon^2$ ; qu'il décroît ensuite en valeur absolue et devient nul pour  $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ , ce qui correspondrait exactement au milieu de l'arc AB si cet arc était identique avec un cercle; enfin, qu'après s'être annulé, X croît en valeur absolue et devient égal à  $\frac{1}{4} p a^2 \epsilon^2$  pour  $x = a$ . Le signe de X montre que dans les environs de B la courbure augmente, parce que la rotation relative de deux normales consécutives ayant lieu dans le sens de Oy vers Ox, tend à augmenter leur angle; le fait contraire se produit en A. Donc la pression du gaz tend à amoindrir l'ellipticité du profil. Nous arriverions à une conclusion directement opposée si la pression extérieure dominait.

Soient maintenant  $c$  l'épaisseur de la chaudière, et E le coefficient d'élasticité longitudinale de la matière qui la compose. La pièce courbe dont la fibre moyenne est ABA' aura pour section transversale un rectangle dont les côtés seraient  $c$  et 1; la dimension  $c$  étant celle qui se trouve placée perpendiculairement à l'axe de flexion, le rayon de gyration de la section transversale par rapport à cet axe sera  $\frac{1}{12} c^2$  (n° 6), dans l'hypothèse d'une matière homogène, et le moment de flexibilité correspondant aura pour valeur  $\frac{1}{12} E c^3$  (n° 16). Donc l'angle  $\psi$  du mouvement de flexion entre deux sections infiniment voisines devra satisfaire à la relation

$$X = \frac{\psi}{ds} \cdot \frac{1}{12} E c^3,$$

qui donne

$$\psi = \frac{12 X ds}{E c^3};$$

et attendu que la fibre la plus éloignée de l'axe de flexion s'en trouve à la distance  $\frac{1}{2} c$ , cette rotation  $\psi$  donne lieu à un maxi-

mum de pression ou tension exprimé par  $\frac{1}{2} \frac{E c \psi}{ds}$  ou par  $\frac{6 X}{c^2}$ .

Mettant à la place de  $X$  son maximum  $\frac{1}{4} p a^2 \epsilon^2$ , on en conclut la plus grande valeur de la tension d'une fibre, par le seul effet de la flexion, valeur qui est  $\frac{3}{2} \frac{p a^2 \epsilon^2}{c^2}$ .

A cette force moléculaire il faut encore joindre celle qui correspond à l'extension uniforme entre deux sections consécutives, laquelle sera toujours à peu près la même que dans le cas du profil circulaire, et aura par conséquent pour expression  $\frac{p a}{c}$ . Ainsi l'épaisseur  $c$  devra être déterminée par l'équation

$$\frac{p a}{c} + \frac{3}{2} \frac{p a^2 \epsilon^2}{c^2} = T;$$

soit en remplaçant, comme au n° 135,  $p$  par 10330  $n$ ,  $a$  par  $\frac{1}{2} d$ ,  $T$  par 2850000, et résolvant par rapport à  $c$ ,

$$c = 0,0009 n d \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{1655 \epsilon^2}{n}} \right).$$

si l'on admet qu'il est nécessaire d'ajouter encore 0<sup>m</sup>,003 à cette épaisseur théorique, pour avoir égard à l'usure de la chaudière et autres circonstances secondaires qui diminueraient la résistance, on posera définitivement

$$(12) \quad c = 0,0009 n d \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{1655 \epsilon^2}{n}} \right) + 0,003.$$

Lorsque  $\epsilon = 0$ , cette formule devient identique avec la formule (11); mais il n'est pas nécessaire que  $\epsilon$  soit bien grand pour que leurs résultats soient notablement différents. Ainsi,



en faisant  $n = 5$ ,  $\epsilon' = 0,02$ ,  $d = 1$ , la formule (11) donnerait  $c = 0^m,012$ , tandis que la formule (12) donnerait  $c = 0^m,020$ , c'est-à-dire le résultat de l'autre formule augmenté dans le rapport de 3 à 5.

On voit donc qu'une faible excentricité dans la forme définitive du profil transversal a une influence considérable sur la résistance; et comme cette excentricité tend à s'accroître ou à diminuer suivant que la pression la plus forte agit à l'extérieur ou à l'intérieur, on comprend aisément que le premier cas présente plus de chances d'accidents et par conséquent exige l'emploi de chaudières plus épaisses.

*Calcul de la déformation du profil elliptique.* — La formule (12) exprime l'épaisseur  $c$  en fonction de l'excentricité  $\epsilon$  du profil définitif; afin de pouvoir comparer les épaisseurs nécessaires pour résister à une pression effective  $p$ , quand elle agit successivement en dedans et en dehors, il faudrait avoir  $\epsilon$  en fonction de l'excentricité primitive  $\epsilon_0$ , qui existait avant que la chaudière fût soumise à la pression  $p$ . Il est donc utile d'étudier les déformations subies par le profil, ou tout au moins l'altération de son excentricité: cherchons à cet effet les longueurs  $\Delta a$  et  $\Delta b$  dont les demi-axes ont varié.

On peut calculer  $\Delta a$  en appliquant au point A la première des équations (2) du n° 44; on prendra le point B pour origine des intégrales définies, et on fera

$$\Delta x_1 = \Delta a, \quad \Delta x_0 = 0, \quad p_0 = 0, \quad y_1 = 0;$$

en outre comme il s'agit d'une déformation plane et qu'on ne considère pas les variations de température, on a encore (n° 43 et 45)

$$\sin \delta = 1, \quad \cos \nu = 1, \quad \tau = 0,$$

de sorte que l'équation devient

$$\Delta a = \int_0^a \left( \frac{N}{e} - \frac{P}{ke} \frac{dy}{dx} \right) dx + \int_0^a \frac{Xy}{er^2} \frac{ds}{dx} dx.$$

Si le profil était exactement circulaire,  $P$  serait nul; ici ce sera donc une quantité très-petite et négligeable devant  $N$ . Quant à  $N$ , tension totale dans une section, nous avons déjà dit qu'elle est sensiblement constante et égale à  $pa$ : comme en outre son intensité rapportée à l'unité de surface est nécessairement inférieure à la limite de 3 kilogrammes par millimètre carré, que les règlements administratifs précités ne lui permettent pas d'atteindre (même dans l'hypothèse d'une flexion nulle), elle

produira un allongement relatif uniforme de 1 ou 2 dix-millièmes dans tous les éléments de la fibre moyenne (\*). Elle n'aura donc pas d'influence appréciable sur le changement d'excentricité. Ainsi nous prendrons simplement

$$\Delta a = \int_0^a \frac{Xy}{er^2} \frac{ds}{dx} dx.$$

Il faut dans cette formule remplacer  $X$  par  $\frac{1}{4} p \epsilon^2 (2x^2 - a^2)$  et  $er^2$  par  $\frac{1}{12} E c^3$ ; de plus, en considérant la courbe BA comme un cercle, on aura

$$\frac{ds}{dx} = \frac{1}{\cos \text{OCD}} = \frac{\overline{\text{OC}}}{\overline{\text{CD}}} = \frac{a}{y};$$

par suite

$$\Delta a = \int_0^a \frac{3p \epsilon^2 a}{E c^3} (2x^2 - a^2) dx = - \frac{p a^4 \epsilon^2}{E c^3},$$

ou bien, à cause de la relation  $a^2 - b^2 = a^2 \epsilon^2$ ,

$$\Delta a = - \frac{p a^2 (a^2 - b^2)}{E c^3}.$$

On aura évidemment  $\Delta b$ , si dans cette équation on change  $a$  en  $b$  et inversement : donc

$$\Delta b = \frac{p b^2 (a^2 - b^2)}{E c^3},$$

quantité que l'on peut regarder comme égale à  $-\Delta a$ , vu le peu de différence que l'on suppose entre  $a$  et  $b$ .

Ainsi donc, si l'on nomme  $a_0$  et  $b_0$  les demi-axes primitifs,  $d$  le diamètre (sensiblement égal à  $2a$  ou à  $2b$ , ou bien à la somme  $a + b$ , ou encore à  $a_0 + b_0$ , on posera

$$a - a_0 = - \frac{p d^2}{4 E c^3} (a^2 - b^2),$$

$$b - b_0 = \frac{p d^2}{4 E c^3} (a^2 - b^2);$$

on en déduit par soustraction

$$\begin{aligned} a_0 - b_0 - (a - b) &= \frac{p d^2}{2 E c^3} (a^2 - b^2) = \frac{p d^2}{2 E c^3} (a - b) (a + b) \\ &= \frac{p d^3}{2 E c^3} (a - b), \end{aligned}$$

(\*) Le fer s'allonge de  $\frac{1}{20000}$  environ de sa longueur primitive sous une tension longitudinale de 1 kilogramme par millimètre carré.

et par suite

$$a - b = \frac{a_0 - b_0}{1 + \frac{pd^3}{2Ec^3}}.$$

D'un autre côté on a

$$a^2 \varepsilon^2 = a^2 - b^2 = (a - b)(a + b),$$

soit, puisque  $a$  diffère peu de  $b$ ,

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{2a}(a - b);$$

de même

$$\varepsilon_0^2 = \frac{1}{2a_0}(a_0 - b_0).$$

Donc, si les dimensions n'ont pas été fortement altérées, on pourra écrire

$$\frac{\varepsilon_0^2}{\varepsilon^2} = \frac{a_0 - b_0}{a - b} = 1 + \frac{pd^3}{2Ec^3},$$

et finalement

$$(13) \quad \varepsilon^2 = \frac{\varepsilon_0^2}{1 + \frac{pd^3}{2Ec^3}}.$$

Les calculs qui précèdent ont été faits en prenant la valeur de  $X$  relative au cas où la pression effective  $p$  agit intérieurement : dans cette hypothèse la formule (13) ne peut pas présenter de difficulté et donnera  $\varepsilon^2$  en fonction de  $\varepsilon_0^2$ . Mais si  $p$  agissait au dehors, les forces changeraient de sens ainsi que  $X$  ; pour répéter les mêmes calculs, il faudrait donc changer partout le signe de  $p$ , de sorte qu'on arriverait à l'équation

$$(14) \quad \varepsilon^2 = \frac{\varepsilon_0^2}{1 - \frac{pd^3}{2Ec^3}}.$$

Or il en résulterait une valeur imaginaire pour  $\varepsilon$ , si le dénominateur du second membre n'était pas positif ; une telle conséquence indiquerait que nous sommes parti d'une hypothèse inexacte, en supposant la déformation petite, et par suite la chaudière n'aurait pas une stabilité convenable. Lorsque la pression se trouve à l'extérieur, il faut donc satisfaire à la condition

$$1 - \frac{pd^3}{2Ec^3} > 0,$$

soit en résolvant par rapport à  $c$ , après avoir fait  $p = 10330n$  et  $E = 2 \cdot 10^{10}$ ,

$$(15) \quad c > 0,0064d\sqrt[3]{n}.$$

Voilà une limite inférieure de l'épaisseur, en dessous de laquelle on ne devra pas descendre; il faudra même en approcher d'autant moins, que  $\epsilon_0^2$  aura une valeur plus notable, car autrement  $\epsilon$  pourrait devenir grand, ce qui compromettrait la chaudière.

Maintenant on peut substituer dans l'équation (12) l'expression de  $\epsilon^2$  donnée par les formules (13) et (14) : on trouve ainsi, eu égard aux valeurs  $p = 10330n$  et  $E = 2 \cdot 10^{10}$ ,

$$(16) \quad c = 0,0009nd \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{1655 \epsilon_0^2}{n \left( 1 \pm 0,000000258 n \frac{d^3}{c^3} \right)}} \right] + 0,003;$$

le signe de  $\frac{d^3}{c^3}$  sous le radical sera + dans le cas de la pression intérieure, et — dans le cas de la pression extérieure. L'équation (16) ne peut se résoudre par rapport à  $c$ ; on en déduirait cette inconnue par tâtonnement, lorsque  $n$ ,  $d$ ,  $\epsilon_0$  seraient donnés.

*Application numérique.* Soient donnés  $d = 1$ ,  $n = 2$ ,  $\epsilon_0^2 = 0,01$ ; ce dernier nombre, en vertu de la relation  $\epsilon_0^2 = \frac{1}{2a_0} (a_0 - b_0)$ , suppose une différence relative de 0,005 seulement entre les deux axes primitifs. Alors l'équation (16) devient

$$c = 0,0018 \left( 1 + \sqrt{\frac{8,275}{1 \pm 0,000000516 \frac{1}{c^3}}} \right) + 0,003.$$

Cette équation est satisfaite par  $c = 0^m,0092$  ou par  $c = 0^m,0115$  suivant que l'on prend le signe + ou le signe — sous le radical, c'est-à-dire suivant que la pression effective agit au dedans ou au dehors. La formule (11), où l'on néglige l'influence de l'excentricité, aurait donné pour le premier cas  $c = 0^m,0066$ ; pour le second, il aurait fallu, d'après l'instruction ministérielle du 17 décembre 1848, prendre  $c = 0^m,0099$ .

Veut-on savoir enfin ce que seraient les pressions ou tensions maxima par unité de surface, avec une même épaisseur,  $0^m,0092$  par exemple, quand la pression effective  $p$  agit soit à l'intérieur, soit à l'extérieur? On calculera d'abord le carré de  $\epsilon^2$  de l'excentricité définitive, par les formules (13) et (14) qui donnent

Dans le cas de la pression intérieure.....  $\epsilon^2 = 0,0061$ ;

Dans le cas de la pression extérieure.....  $\epsilon^2 = 0,0297$ .

Puis on cherchera les valeurs correspondantes de la quantité

$$\frac{pa}{c} + \frac{3}{2} \frac{pa^2 \epsilon^2}{c^3},$$

qu'on trouvera respectivement égales à  $1^{\text{kg}},68.10^6$  et à  $3^{\text{kg}},84.10^6$ ; l'effort maximum, égal seulement à  $1^{\text{kg}},68$  par millimètre carré dans le cas de la pression extérieure, se trouve plus que doublé quand la même pression agit en dehors.

*Conclusion.* — En résumé, les calculs précédents démontrent :

1°. Qu'une excentricité, même assez faible, dans le profil d'une chaudière à vapeur est très-défavorable à la résistance, et entraîne à donner à ce profil une épaisseur notablement plus forte que s'il était exactement circulaire;

2°. Que le surcroît d'épaisseur à donner, même en supposant que la tôle résiste à la compression exactement comme à l'extension, serait plus fort dans le cas de la pression extérieure qu'avec la pression intérieure, si d'ailleurs l'excentricité primitive du profil était la même;

3°. Que l'épaisseur doit, dans le cas d'une pression extérieure, vérifier une certaine condition [l'inégalité (15)], indépendante de la résistance de la tôle; on peut regarder la condition dont nous parlons comme exprimant que la chaudière a une roideur suffisante, et qu'elle ne s'aplatira pas, comme pourrait le faire une membrane très-mince.

En outre, ces calculs donnent le moyen de fixer rationnellement les épaisseurs dans les différents cas.

## CHAPITRE SIXIÈME.

### PROBLÈMES PARTICULIERS SUR LES POUTRES VIBRANTES.

137. *Observations préliminaires.* — Nous avons donné au § IV du chapitre II (n° 68) les équations générales aux différences partielles, qui représentent le mouvement vibratoire d'une pièce homogène, à section constante et symétrique par rapport au plan de la fibre moyenne, quand toutes les forces extérieures sont contenues dans ce plan et que les déplacements de tous les points lui sont constamment parallèles pendant toute la durée du mouvement. Ces équations présenteront généralement des difficultés d'intégration assez grandes; et même il arrivera souvent qu'après avoir effectué l'intégration, on rencontrera des difficultés plus grandes encore quand il s'agira de déterminer les fonctions arbitraires introduites par cette opération même.

Les exemples que l'on va trouver ci-dessous s'appliqueront à des cas très-simples; ils donneront une idée des méthodes au moyen desquelles se traitent les problèmes de ce genre, ils en feront ressortir les difficultés, et fourniront enfin quelques aperçus utiles dans la pratique.

138. *Équation du mouvement vibratoire d'un prisme vertical homogène, supportant un poids à son extrémité.* — Soit AB (fig. 56) le prisme donné, dont le point B est fixe, et qui soutient en A un poids P. Voyons d'abord à quelles conditions il pourrait se trouver en équilibre.

Fig. 56.



Désignons par  $x$  la distance d'une section transversale quelconque CD au point fixe B, dans l'état primitif du système, c'est-à-dire



quand toutes ses parties, soustraites à l'action de la pesanteur, n'éprouvent aucune tension ;

$u$  le dérangement de cette section, parallèlement à  $BA$ , à une époque quelconque, par suite de l'action des forces ; cette quantité  $u$  sera fonction de  $x$  seulement s'il y a équilibre, et s'il y a mouvement elle sera tout à la fois fonction de  $x$  et du temps  $t$  ;

$E$  le coefficient d'élasticité longitudinale et  $\Pi$  le poids par mètre cube de la matière qui compose le prisme  $AB$  ;

$\omega$  l'aire de la section transversale de ce prisme ;

$l$  la longueur  $AB$  ;

$t$  le temps, compté à partir d'un instant quelconque.

L'élément prismatique compris entre les sections infiniment voisines  $CD$ ,  $FH$ , dont la distance primitive était  $dx$ , occupera, quand l'allongement aura été produit, une longueur différente ; car on aura

Pour l'abscisse de  $CD$  au temps  $t$  . . . . .  $x + u$  ;

Pour l'abscisse de  $FH$  au même instant.  $x + u + \frac{d(x + u)}{dx} dx$  ;

la distance des deux sections au temps  $t$  est donc  $\frac{d(x + u)}{dx} dx$ ,

ou bien  $dx + \frac{du}{dx} dx$  ; donc l'allongement relatif est  $\frac{du}{dx}$ , et,

par suite, la tension longitudinale dans la section  $CD$  s'exprime par  $E\omega \frac{du}{dx}$  (n° 12). Cette expression convient aussi bien au cas

du mouvement qu'à celui de l'équilibre ; mais, quand il y a mouvement,  $u$  étant fonction de  $x$  et de  $t$ , il ne faut pas ou-

blier que  $\frac{du}{dx}$  représente la dérivée partielle de  $u$  par rapport

à  $x$ . Cela posé, si l'équilibre existe, il faudra que la tension

$E\omega \frac{du}{dx}$  soit égale à la somme du poids  $P$  et du poids de la

partie  $CDA$  ; donc

$$(1) \quad E\omega \frac{du}{dx} = \Pi\omega(l - x) + P,$$

et, attendu que  $u$  est alors fonction de la seule variable  $x$ ,

$$(2) \quad u = \frac{\Pi}{2E} (2lx - x^2) + \frac{Px}{E\omega},$$

sans constante, puisque le point B est fixe, ce qui entraîne  $u = 0$  pour  $x = 0$ .

Lorsque le système sera abandonné à l'action de la pesanteur, sans que les vitesses de tous les points soient nulles, ou bien sans que  $u$  ait alors la valeur donnée en chaque point par l'équation (2), l'équilibre ne pourra pas subsister, et il se produira un mouvement dont nous allons établir directement l'équation, en supposant qu'il ait lieu suivant la verticale. A cet effet, nous remarquerons d'abord que la masse élémentaire CDFH, exprimée par  $\frac{\Pi}{g} \omega dx$ , a une accélération  $\frac{d^2(x+u)}{dt^2}$  ou  $\frac{d^2u}{dt^2}$ , puisque  $x$  est une variable indépendante du temps.

Quant aux forces qui sollicitent cette masse, il y a : 1° son poids  $\Pi \omega dx$ ; 2° la tension ascendante exercée dans CD par la partie CDB du prisme, laquelle tension s'exprime, comme on vient de le voir, par  $E\omega \frac{du}{dx}$ ; 3° la tension descendante exercée dans FH par la portion FHA, laquelle force sera  $E\omega \frac{du}{dx}$  augmentée de sa différentielle partielle relativement à  $x$ , soit  $E\omega \left( \frac{du}{dx} + \frac{d^2u}{dx^2} dx \right)$ . On aura donc

$$\frac{\Pi}{g} \omega dx \frac{d^2u}{dt^2} = \Pi \omega dx - E\omega \frac{du}{dx} + E\omega \left( \frac{du}{dx} + \frac{d^2u}{dx^2} dx \right);$$

soit, après avoir réduit et divisé par  $\frac{\Pi}{g} \omega dx$ ,

$$(3) \quad \frac{d^2u}{dt^2} = g + \frac{Eg}{\Pi} \frac{d^2u}{dx^2},$$

équation aux différences partielles du second ordre, qui représente le mouvement dont il s'agit.

Pour en obtenir l'intégrale générale, on remarquera d'abord que la valeur de  $u$ , donnée par la relation (2), satisfait à l'équa-

tion (3), dont elle est conséquemment une solution particulière. Cela permet de faire disparaître le terme constant  $g$  du second membre de l'équation (3). Il suffira en effet de poser

$$(4) \quad u = \frac{\Pi}{2E} (2lx - x^2) + \frac{Px}{E\omega} + z,$$

d'où l'on tire

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = -\frac{\Pi}{E} + \frac{d^2 z}{dx^2},$$

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = \frac{d^2 z}{dt^2};$$

et, par suite, en substituant dans l'équation (3) et posant  $\frac{Eg}{\Pi} = a^2$ ,

$$(5) \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = a^2 \frac{d^2 z}{dx^2}.$$

On retombe ainsi sur l'équation connue de la corde vibrante.

L'intégrale de l'équation (5) a été donnée sous forme finie par d'Alembert. En désignant par  $\varphi$  et  $\psi$  deux fonctions arbitraires, on a

$$z = \varphi(x + at) + \psi(x - at),$$

valeur dont la vérification est facile. Donc on aurait aussi

$$(6) \quad u = \frac{\Pi}{2E} (2lx - x^2) + \frac{Px}{E\omega} + \varphi(x + at) + \psi(x - at).$$

On peut encore donner aux quantités  $z$  et  $u$  une autre forme plus commode pour arriver à la solution complète, dans certains cas particuliers du problème qui nous occupe.  $z$  étant une fonction de  $x$  et de  $t$ , on conçoit d'abord qu'elle soit développée suivant les puissances de la variable  $x$ , c'est-à-dire exprimée par

$$z = Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + \dots,$$

$\alpha, \beta, \gamma, \dots$ , étant des exposants indéterminés, et  $A, B, C, \dots$ , des fonctions du temps  $t$ . Comme  $e^x$  est une quantité connue quand  $x$  est donné, on peut encore dire que  $z$  est fonction de  $t$  et de  $e^x$ , et poser de même

$$z = A'e^{mx} + A''e^{nx} + \dots + A'_1e^{-mx} + A''_1e^{-nx} + \dots;$$

enfin, comme les exponentielles peuvent se transformer en sinus et cosinus par la formule  $e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1} \sin x$ , on pourra écrire

$$z = A_1 \sin m_1 x + A_2 \sin m_2 x + \dots B_1 \cos m_1 x + B_2 \cos m_2 x \\ = \Sigma (A \sin mx + B \cos mx),$$

la caractéristique  $\Sigma$  désignant une somme de termes de même forme.

Les développements en série d'une fonction inconnue, sous l'une des trois formes précédentes, ou sous une forme mixte comprenant à la fois des puissances, des exponentielles et des sinus, seront sans doute quelquefois en défaut; mais, dans beaucoup de problèmes, on parviendra de cette manière à remplir toutes les conditions. On remplacera donc, dans l'équation (3),  $u$  par la valeur

$$u = \frac{\Pi}{2E} (2lx - x^2) + \frac{Px}{E\omega} + \Sigma (A \sin mx + B \cos mx),$$

et l'on trouvera

$$\Sigma \left( \frac{d^2 A}{dt^2} \sin mx + \frac{d^2 B}{dt^2} \cos mx \right) = \frac{Eg}{\Pi} \Sigma m^2 (-A \sin mx - B \cos mx) \\ = -a^2 \Sigma m^2 (A \sin mx + B \cos mx).$$

Pour que le premier et le second membre soient identiques quand  $x$  et  $t$  sont quelconques, il faut qu'on ait

$$\frac{d^2 A}{dt^2} = -m^2 a^2 A, \quad \frac{d^2 B}{dt^2} = -m^2 a^2 B,$$

d'où l'on tire, en désignant par  $C, D, H, I$ , des constantes arbitraires,

$$A = C \sin mat + D \cos mat,$$

$$B = H \sin mat + I \cos mat.$$

Donc on a

$$u = \frac{\Pi}{2E} (2lx - x^2) + \frac{Px}{E\omega} \\ + \Sigma \left[ \sin mx (C \sin mat + D \cos mat) \right. \\ \left. + \cos mx (H \sin mat + I \cos mat) \right].$$

Cette formule conviendrait même au cas où l'extrémité supérieure du prisme ne serait pas fixe ; car nous ne nous sommes point servi de cette condition. Si l'on en tient compte, c'est-à-dire si l'on fait  $u = 0$  pour  $x = 0$ , on aura

$$0 = \Sigma (H \sin mat + I \cos mat);$$

on satisfait à cette condition,  $t$  restant indéterminé, en prenant  $H = 0$  et  $I = 0$ . Donc enfin, dans les termes où la question est posée, nous aurons pour l'intégrale de l'équation (3)

$$(7) \quad u = \frac{\Pi}{2E} (2lx - x^2) + \frac{Px}{E\omega} + \Sigma \sin mx (C \sin mat + D \cos mat).$$

Cette valeur de  $u$  n'est plus exprimée au moyen de fonctions arbitraires comme celle que donne l'équation (6); mais en laissant de côté la quantité  $\frac{\Pi}{2E} (2lx - x^2) + \frac{Px}{E\omega}$ , on voit que le surplus de la valeur de  $u$  contient un nombre indéterminé de termes de la forme

$$\sin mx (C \sin mat + D \cos mat),$$

dans lesquels on peut attribuer aux constantes  $m, C, D$ , telle valeur qu'on voudra.

Soit qu'on adopte la formule (6) ou qu'on préfère la formule (7), on voit qu'après avoir intégré l'équation (3) on est encore loin de la solution complète du problème, puisque dans un cas il reste à déterminer deux fonctions  $\varphi$  et  $\psi$ , et dans l'autre un nombre infini de constantes, telles que  $m, C, D$ . Nous allons compléter la solution pour trois cas particuliers.

**139. Oscillation d'un prisme vertical et homogène sous la seule action de son poids.** — Supposons nul le poids  $P$  suspendu à l'extrémité  $A$  (fig. 56); alors l'équation (6) du n° 138 se réduit à

$$(8) \quad u = \frac{\Pi}{2E} (2lx - x^2) + \varphi(x + at) + \psi(x - at),$$

et il s'agit de déterminer les fonctions  $\varphi$  et  $\psi$ , c'est-à-dire d'en faire connaître la valeur pour une valeur quelconque attribuée

à la variable  $x + at$  de la fonction  $\varphi$ , ou à la variable  $x - at$  de la fonction  $\psi$ .

A cet effet il sera d'abord nécessaire de connaître les déplacements  $u$  et les vitesses  $\frac{du}{dt}$  de tous les points du prisme à un certain instant, par exemple celui à partir duquel on compte le temps, car ce n'est qu'à cette condition que le mouvement est déterminé. Supposons donc que pour  $t = 0$  on ait

$$u = F(x), \quad \frac{du}{dt} = f(x).$$

De l'équation (8) on tire

$$(9) \quad \frac{du}{dt} = a\varphi'(x + at) - a\psi'(x - at),$$

en désignant par  $\varphi'$  et  $\psi'$  les dérivées de  $\varphi$  et  $\psi$ , chacune par rapport à sa variable explicite  $x + at$  ou  $x - at$ . La valeur  $t = 0$  substituée dans (8) et (9) devra reproduire les fonctions données  $F(x)$  et  $f(x)$ ; donc

$$\frac{\Pi}{2E} (2lx - x^2) + \varphi(x) + \psi(x) = F(x),$$

$$a\varphi'(x) - a\psi'(x) = f(x).$$

De la première de ces deux équations on déduit  $\varphi(x) + \psi(x)$ ; la seconde, intégrée par rapport à  $x$ , donnera  $\varphi(x) - \psi(x)$ , ce qui fera connaître  $\varphi(x)$  et  $\psi(x)$ . Ainsi l'on a

$$\varphi(x) + \psi(x) = F(x) - \frac{\Pi}{2E} (2lx - x^2),$$

$$\varphi(x) - \psi(x) = \frac{1}{a} \int_0^x f(x) dx + K,$$

$K$  étant une constante arbitraire; et par suite on écrira

$$(10) \quad \varphi(x) = \frac{1}{2} F(x) - \frac{\Pi}{4E} (2lx - x^2) + \frac{1}{2a} \int_0^x f(x) dx + \frac{K}{2},$$

$$(11) \quad \psi(x) = \frac{1}{2} F(x) - \frac{\Pi}{4E} (2lx - x^2) - \frac{1}{2a} \int_0^x f(x) dx - \frac{K}{2}.$$



Les fonctions  $F(x)$  et  $f(x)$  doivent être données pour l'étendue de la pièce AB, c'est-à-dire pour  $x$  compris entre 0 et  $l$  : on connaît donc les fonctions  $\varphi$  et  $\psi$ , pour toute valeur de leur variable comprise entre les mêmes limites, sauf la constante  $K$ , dont la grandeur n'influe pas sur le résultat final, comme on le verra tout à l'heure.

Il faut maintenant introduire les équations particulières applicables aux extrémités A et B. Ce dernier point restant fixe, on doit avoir  $u=0$  pour  $x=0$ , quel que soit  $t$ . L'équation (8) donnera donc

$$(12.) \quad \varphi(at) + \psi(-at) = 0.$$

En vertu de cette relation, la fonction  $\varphi$  étant connue quand sa variable est comprise entre 0 et  $l$ , on connaîtra la fonction  $\psi$  quand sa variable sera comprise entre 0 et  $-l$ ; réciproquement, la connaissance de  $\psi$  entre les limites 0 et  $l$  de sa variable étendra la connaissance de  $\varphi$  entre les limites 0 et  $-l$ ; de sorte que les deux fonctions sont maintenant connues, quand la variable de chacune d'elles est comprise entre  $-l$  et  $+l$ .

Le point A étant libre,  $\frac{du}{dx}$  doit s'annuler pour  $x=l$ , car la tension  $E\omega \frac{du}{dx}$  équilibrant, dans chaque section, les poids et l'inertie des masses qui se trouvent au-dessous, a nécessairement une valeur nulle en A. Or l'équation (8) donne

$$\frac{du}{dx} = \frac{\pi}{E} (l-x) + \varphi'(x+at) + \psi'(x-at),$$

et par conséquent on a

$$\varphi'(l+at) + \psi'(l-at) = 0;$$

équation qui, intégrée par rapport à  $t$ , devient

$$\varphi(l+at) - \psi(l-at) = K'.$$

Il est aisé de déterminer la constante  $K'$ ; car de la dernière relation on déduit, en faisant  $t=0$ ,

$$\varphi(l) - \psi(l) = K';$$

et en faisant  $x = l$  dans la valeur de  $\varphi(x) - \psi(x)$  trouvée plus haut, on a

$$\varphi(l) - \psi(l) = \frac{1}{a} \int_0^l f(x) dx + K,$$

$$K' = \frac{1}{a} \int_0^l f(x) dx + K,$$

d'où résulte

$$(13) \quad \varphi(l + at) - \psi(l - at) = \frac{1}{a} \int_0^l f(x) dx + K.$$

Or l'équation (12), applicable à une valeur quelconque de la variable  $at$ , donne, quand on y remplace  $at$  par  $at - l$ ,

$$\psi(l - at) = -\varphi(-l + at),$$

valeur qui, substituée dans l'équation (13), fournira la relation

$$\varphi(l + at) + \varphi(-l + at) = \frac{1}{a} \int_0^l f(x) dx + K,$$

ou, en faisant  $-l + at = \zeta$ ,

$$(14) \quad \varphi(2l + \zeta) + \varphi(\zeta) = \frac{1}{a} \int_0^l f(x) dx + K.$$

Donc nous connaissons  $\varphi(2l + \zeta)$  au moyen de  $\varphi(\zeta)$ ; et puisque  $\varphi(\zeta)$  est connu pour  $\zeta$  compris entre  $-l$  et  $l$ , nous en déduisons les valeurs de la fonction  $\varphi$  pour la variable comprise entre  $l$  et  $3l$ ; de celles-ci nous passerions à celles que donnent les valeurs de la variable entre  $3l$  et  $5l$ , et ainsi de suite. On procéderait de même à l'égard de la fonction  $\psi$ ; ou si l'on veut, il est possible de l'éliminer de l'équation (8), car en vertu de l'équation (12) on peut écrire

$$(15) \quad u = \frac{\Pi}{2E} (2l - x^2) + \varphi(x + at) - \varphi(-x + at);$$

et sous cette forme il est clair qu'on peut faire abstraction de la constante  $K$  et la supposer nulle, puisqu'elle doit disparaître dans la différence  $\varphi(x + at) - \varphi(-x + at)$ .

Un des caractères des fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  qu'il est important de

mentionner, c'est la périodicité. Pour la reconnaître, on remplacera dans l'équation (14)  $\zeta$  par  $2l + \zeta$ , et l'on aura

$$\varphi(4l + \zeta) + \varphi(2l + \zeta) = \frac{1}{a} \int_0^l f(x) dx + K;$$

en éliminant  $\varphi(2l + \zeta)$  au moyen de (14), on trouve

$$\varphi(4l + \zeta) - \varphi(\zeta) = 0.$$

Ainsi la fonction  $\varphi$  ne change pas quand sa variable augmente de  $4l$ , c'est-à-dire quand  $t$  augmente de  $\frac{4l}{a}$ ; c'est donc une fonction périodique, et il en est évidemment de même de  $\psi$ . Donc après un temps  $\frac{4l}{a}$  la pièce se retrouvera dans une position et avec des vitesses identiques; le prisme exécutera donc une série indéfinie d'oscillations dont  $\frac{4l}{a}$  sera la durée. Les considérations précédentes fournissent d'ailleurs le moyen d'en avoir la loi, puisqu'on sait trouver la valeur de  $\varphi$  et de  $\psi$  pour une valeur quelconque de la variable.

Cherchons enfin quelle serait l'amplitude du mouvement vibratoire que prend l'extrémité A, en supposant, pour simplifier, que les fonctions  $F(x)$  et  $f(x)$  sont nulles toutes deux, c'est-à-dire que le prisme est abandonné sans vitesse et dans son état primitif à l'action de la pesanteur. Nous ferons de plus  $K = 0$ , ce qui est permis, comme on l'a vu. Le déplacement du point A est à chaque instant donné par l'équation (15), dans laquelle on fera  $x = l$ ; pour ce point on a donc, en désignant par  $U$  l'expression de  $u$  qui lui convient,

$$U = \frac{\pi l^2}{2E} + \varphi(l + at) - \varphi(-l + at);$$

les valeurs  $l + at$  et  $-l + at$  diffèrent de  $2l$ , et par suite en vertu de l'équation (14),  $K$  et  $f(x)$  étant nulles,  $\varphi(l + at)$  et  $\varphi(-l + at)$  sont égales et de signes contraires; donc

$$(16) \quad U = \frac{\pi l^2}{2E} + 2\varphi(l + at) = \frac{\pi l^2}{2E} - 2\varphi(-l + at).$$

Les valeurs limites de  $U$  correspondront à  $\frac{dU}{dt} = 0$ , ou à

$$\varphi'(l + at) = 0, \quad \varphi'(-l + at) = 0.$$

Or, d'après l'équation (10), entre les limites 0 et  $l$  de la variable  $\zeta$ , on aurait ici

$$(17) \quad \begin{aligned} \varphi(\zeta) &= -\frac{\Pi}{4E} (2l\zeta - \zeta^2), \\ \varphi'(\zeta) &= -\frac{\Pi}{2E} (l - \zeta). \end{aligned}$$

Cette dérivée  $\varphi'(\zeta)$  devient nulle pour  $\zeta = l$ ; donc pour rendre nulle  $\varphi'(l + at)$ , il faut poser  $l + at = l$  ou  $t = 0$ ; pour annuler  $\varphi'(-l + at)$ , il faut poser  $-l + at = l$  ou  $t = \frac{2l}{a}$ . D'ailleurs à ces deux valeurs de  $t$  répondent respectivement des valeurs de  $l + at$  et  $-l + at$  égales à  $l$ , et par conséquent comprises dans les limites assignées à la variable  $\zeta$ , pour justifier l'expression employée de  $\varphi(\zeta)$ .

En faisant  $t = 0$  et  $t = \frac{2l}{a}$ , on a pour les valeurs correspondantes de  $U$

$$\begin{aligned} U_0 &= \frac{\Pi l^2}{2E} + 2\varphi(l), \\ U_1 &= \frac{\Pi l^2}{2E} - 2\varphi(l); \end{aligned}$$

d'ailleurs l'équation (17) fait connaître  $\varphi(l)$  qui a pour valeur

$$\varphi(l) = -\frac{\Pi l^2}{4E}.$$

On déduit de là d'abord l'égalité  $U_0 = 0$ , et en second lieu l'amplitude cherchée

$$(18) \quad U_1 = \frac{\Pi l^2}{E}.$$

Dans l'état d'équilibre, le dérangement total du point A s'obtiendrait au moyen de l'équation (2) du n° 138 en y faisant  $x = l$ ,  $P = 0$ , ce qui donnerait  $\frac{\Pi l^2}{2E}$ , c'est-à-dire un déplace-

ment deux fois moindre que  $U_1$ . On voit en conséquence par cet exemple que l'inertie de la matière contribue à augmenter les déformations produites par les forces extérieures, ainsi que les tensions moléculaires correspondantes. Ici ces quantités sont portées du simple au double à certains instants du mouvement qui reviennent au bout d'intervalles de temps

$$\frac{4l}{a} \text{ ou } 4l \sqrt{\frac{\pi}{Eg}} \quad (*).$$

140. *Oscillations d'un corps pesant suspendu à l'extrémité d'un prisme vertical, homogène et de très-faible masse.* — Quand on suppose la masse du prisme AB (*fig. 56*) très-petite relativement à celle du poids P, il se présente dans le problème général mis en équation au n° 138 une simplification très-notable. En effet, les tensions développées dans la section CD à un instant quelconque doivent faire équilibre au poids P, à la force d'inertie  $-\frac{P}{g} \frac{d^2 U}{dt^2}$ , au poids de la portion CDA du prisme et aux forces d'inertie de cette portion. Or comme ces dernières quantités sont supposées négligeables, il en résulte que la tension est indépendante de la section CD que l'on choisit dans le prisme; donc

$$\frac{du}{dx} = L,$$

L étant fonction de  $t$  seulement. Donc aussi,  $u$  étant nul pour  $x = 0$  et égal à  $U$  pour  $x = l$ , on a

$$u = Lx, \quad L = \frac{u}{x} = \frac{U}{l},$$

et, par suite, la tension correspondante à l'allongement  $U$  est

(\*) Ce temps, pour une barre de fer de 1 mètre de longueur, serait environ de 0",0008, ce qui correspondrait à un son parfaitement saisissable à l'oreille, si l'amplitude des vibrations  $\frac{\pi l^2}{E}$  n'était pas excessivement faible, et s'il était possible d'ailleurs de réaliser exactement toutes les conditions de la théorie.

dans toute la tige exprimée par  $E\omega \frac{U}{l}$ , comme s'il y avait équilibre, l'allongement  $U$  restant le même.

Maintenant il est facile d'écrire l'équation du mouvement du corps  $P$ . Cette équation est

$$(19) \quad \frac{d^2 U}{dt^2} = g - \frac{E\omega g}{Pl} U,$$

ou, si l'on appelle  $\lambda$  l'allongement  $\frac{Pl}{E\omega}$  auquel correspond l'équilibre du poids  $P$ ,

$$\frac{d^2 U}{dt^2} = g \left( 1 - \frac{U}{\lambda} \right) = \frac{g}{\lambda} (\lambda - U);$$

ou bien encore

$$\frac{d^2 (U - \lambda)}{dt^2} = - \frac{g}{\lambda} (U - \lambda),$$

équation dont l'intégrale générale est

$$(20) \quad U - \lambda = A \cos t \sqrt{\frac{g}{\lambda}} + B \sin t \sqrt{\frac{g}{\lambda}},$$

$A$  et  $B$  désignant deux constantes arbitraires.

Ces deux constantes seront déterminées par les conditions initiales. Si l'on suppose, par exemple, qu'à l'instant pris pour origine du temps,  $U$  et  $\frac{dU}{dt}$  sont nuls, on aura

$$-\lambda = A, \quad B = 0,$$

et, par conséquent,

$$(21) \quad U = \lambda \left( 1 - \cos t \sqrt{\frac{g}{\lambda}} \right).$$

Si plus généralement on doit avoir  $U = U_0$  et  $\frac{dU}{dt} = v_0$  quand  $t$  est nul, on posera

$$U_0 - \lambda = A, \quad v_0 = B \sqrt{\frac{g}{\lambda}},$$



et, en substituant les valeurs de A et B dans l'équation (20),

$$(22) \quad U - \lambda = (U_0 - \lambda) \cos t \sqrt{\frac{g}{\lambda}} + v_0 \sqrt{\frac{\lambda}{g}} \sin t \sqrt{\frac{g}{\lambda}}.$$

D'après la forme de l'équation (20); on voit que si l'on donne au temps un accroissement  $2\pi \sqrt{\frac{\lambda}{g}}$ , l'arc  $t \sqrt{\frac{g}{\lambda}}$  aura augmenté d'une circonférence; ses sinus et cosinus auront repris la même valeur, et U redeviendra ce qu'il était. Le mouvement est donc périodique, et la durée de la période est  $2\pi \sqrt{\frac{\lambda}{g}}$ . Quand on donne au temps un accroissement moitié du précédent, l'arc  $t \sqrt{\frac{g}{\lambda}}$  augmente seulement d'une demi-circonférence, et, par suite,  $U - \lambda$  repasse par la même valeur absolue, mais avec un signe contraire. Par conséquent on voit que le point A oscillera également de part et d'autre du point correspondant à la valeur particulière  $U = \lambda$ .

Pour avoir les limites extrêmes du mouvement du point A, il faut chercher les valeurs de  $t$  qui rendent nulle la vitesse  $\frac{dU}{dt}$ , ce qui donne l'équation

$$-A \sin t \sqrt{\frac{g}{\lambda}} + B \cos t \sqrt{\frac{g}{\lambda}} = 0;$$

d'où l'on tire

$$\tan t \sqrt{\frac{g}{\lambda}} = \frac{B}{A}.$$

En substituant cette valeur dans l'équation (20), on trouve la valeur correspondante de  $U - \lambda$ , qui est

$$\pm \sqrt{A^2 + B^2};$$

donc l'amplitude de l'oscillation est

$$2\sqrt{A^2 + B^2},$$

et le maximum de U s'exprime par

$$\lambda + \sqrt{A^2 + B^2}.$$

Ainsi, dans l'hypothèse qui a conduit à l'équation (21), on aurait pour ce maximum

$$\lambda + \sqrt{A^2 + B^2} = \lambda + \sqrt{\lambda^2} = 2\lambda,$$

et le plus grand allongement de la tige serait double de l'allongement statique, comme on l'a déjà vu dans un autre exemple (n° 139). Dans les hypothèses plus générales qui ont donné l'équation (22), on trouve

$$(23) \quad \lambda + \sqrt{A^2 + B^2} = \lambda + \sqrt{(U_0 - \lambda)^2 + \frac{\lambda v_0^2}{g}}.$$

141. *Cas particulier du problème précédent.* — Supposons un poids  $Q$  suspendu et restant en équilibre à l'extrémité

Fig. 57.



d'une tige prismatique  $AB$  de faible masse (fig. 57). Le système est mis en mouvement par un poids  $Q'$ , qui vient choquer le poids  $Q$ , en descendant verticalement le long de la tige. La réaction est supposée non élastique, et la vitesse de  $Q'$ , à l'instant où commence le choc, est due à la hauteur  $h$ . On demande le mouvement des deux corps  $Q$  et  $Q'$  réunis après le choc.

Il est clair qu'on se trouve ici, quand le choc est terminé, dans les conditions du n° 140. Le mouvement cherché sera donc représenté par l'équation (20), ou, si l'on veut, par l'équation (22), en attribuant aux constantes des valeurs convenables. En conservant les notations du n° 140,  $\lambda$  sera l'allongement statique correspondant au poids  $P = Q + Q'$ , soit  $\frac{(Q + Q')l}{E\omega}$ ;

$U_0$  sera l'allongement statique produit par le poids  $Q$ , soit  $\frac{Ql}{E\omega}$ ;

enfin  $v_0$  sera la vitesse commune des corps  $Q$  et  $Q'$  à la fin du choc, ou bien  $\sqrt{2gh} \frac{Q'}{Q + Q'}$ . Donc si l'on cherche l'allongement maximum par la formule (23), on trouvera

$$\frac{(Q + Q')l}{E\omega} + \sqrt{\frac{Q'^2 l^2}{E^2 \omega^2} + \frac{(Q + Q')l}{E\omega} \cdot 2h \frac{Q'}{(Q + Q')^2}},$$

ou bien

$$\frac{Ql}{E\omega} + \frac{Q'l}{E\omega} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{l} \cdot \frac{E\omega}{Q + Q'}} \right).$$

Cette formule fait concevoir l'utilité qu'il y a quelquefois d'augmenter la charge permanente supportée par une pièce qui peut recevoir des chocs. Soit, par exemple, une tige de fer ayant 5 mètres de longueur, 10 millimètres carrés de section, et supportant un poids permanent de 5 kilogrammes. Supposons de plus qu'un autre poids  $Q'$  de 5 kilogrammes vienne choquer le premier en tombant d'une hauteur de 0<sup>m</sup>,25. Avec ces données, l'expression précédente devient, en faisant  $E = 2 \cdot 10^{10}$ ,

$$\frac{l}{E\omega} (Q + 46Q') \quad \text{ou} \quad 235 \frac{l}{E\omega};$$

par suite la tension correspondante est  $\frac{235}{\omega}$  ou 23<sup>kil</sup>,5 par millimètre carré. Or si l'on prenait  $Q = 45$ , c'est-à-dire une charge permanente neuf fois plus forte, les autres données restant les mêmes, on trouverait pour l'allongement maximum

$$\frac{l}{E\omega} (Q + 21Q') \quad \text{ou} \quad \frac{150l}{E\omega};$$

la tension maximum produite par le choc serait donc réduite à  $\frac{150}{\omega}$ , soit à 15 kilogrammes par millimètre carré, au lieu de 23<sup>kil</sup>,5 que nous avons précédemment quand la charge permanente était moindre.

142. *Mouvement vibratoire d'un corps pesant suspendu à l'extrémité d'un prisme vertical et homogène quand la masse de ce prisme n'est pas négligeable.* — Nous avons déjà mis le problème en équation au n° 138, et même nous avons donné sous deux formes différentes l'intégrale de l'équation aux différences partielles qui représente le phénomène dont il s'agit. Dans les numéros suivants, nous avons complété la solution par la détermination des fonctions ou constantes arbitraires en admettant certaines hypothèses restrictives, comme la nullité du poids  $P$  ou de la masse du prisme. Maintenant nous allons traiter la question en restant dans les termes généraux du n° 138.

Reprenons l'intégrale de l'équation (3) sous la seconde forme que nous lui avons donnée

$$(7) \quad u = \frac{\Pi}{2E} (2lx - x^2) + \frac{Px}{E\omega} + \sum \sin mx (C \sin mat + D \cos mat);$$

il s'agit de déterminer les constantes  $m$ ,  $C$ ,  $D$ , en nombre infini, de manière à ce que cette équation convienne à l'état initial du système et qu'elle exprime aussi le mouvement du point extrême A (*fig. 56*). Supposons que pour  $t = 0$  on ait

$$u = F(x), \quad \frac{du}{dt} = f(x);$$

en identifiant ces valeurs avec celles tirées de la dernière équation, on aura

$$(24) \quad F(x) = \frac{\Pi}{2E} (2lx - x^2) + \frac{Px}{E\omega} + \sum D \sin mx,$$

$$(25) \quad f(x) = a \sum m C \sin mx.$$

D'un autre côté, on sait que la tension en un point quelconque du prisme est exprimée par  $E\omega \frac{du}{dx}$ , ou, en vertu de l'équation (7), par

$$\Pi\omega(l-x) + P + E\omega \sum m \cos mx (C \sin mat + D \cos mat);$$

donc au point A la valeur de cette tension sera

$$P + E\omega \sum m \cos ml (C \sin mat + D \cos mat).$$

L'accélération du point A sera de même ce que devient  $\frac{d^2 u}{dt^2}$  pour  $x = l$ ; or on a, d'après l'équation (7),

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = -a^2 \sum m^2 \sin mx (C \sin mat + D \cos mat);$$

donc l'accélération commune du point A et du corps P a pour valeur

$$-a^2 \sum m^2 \sin ml (C \sin mat + D \cos mat).$$

Comme cette accélération est due au poids  $P$  diminué de la tension au point extrême du prisme, on posera

$$\begin{aligned} & -\frac{Pa^2}{g} \sum m^2 \sin ml (C \sin mat + D \cos mat) \\ & = P - P - E\omega \sum m \cos ml (C \sin mat + D \cos mat), \end{aligned}$$

ou, en réduisant et remplaçant  $\alpha^2$  par  $\frac{Eg}{11}$ ,

$$\frac{PE}{11} \approx m \left( m \sin ml - \frac{11\omega}{P} \cos ml \right) (C \sin mat + D \cos mat) = 0.$$

Cette équation doit être vérifiée identiquement, quel que soit  $t$ ; il faut donc poser

$$m \sin ml - \frac{11\omega}{P} \cos ml = 0,$$

ou, en désignant par  $b^2$  le rapport, nécessairement positif, du poids  $11\omega l$  de la tige au poids  $P$ ,

$$(26) \quad ml \tan ml = b^2.$$

L'équation (26) donnera pour  $ml$ , et par suite pour  $m$ , une infinité de valeurs réelles, deux à deux égales et de signes contraires. En effet, lorsque  $ml$  variera depuis  $-\infty$  jusqu'à  $+\infty$ , le premier membre s'annulera chaque fois que  $ml$  deviendra un multiple de la demi-circonférence. Ainsi on aura  $ml \tan ml = 0$  pour  $ml = i\pi$  et pour  $ml = (i+1)\pi$ ,  $i$  étant un nombre entier quelconque. De plus, entre ces deux limites de  $ml$ , qui comprennent l'étendue d'une demi-circonférence,  $\tan ml$ , ainsi que  $ml \tan ml$ , passent par tous les états de grandeur entre  $-\infty$  et  $+\infty$ . Donc, entre ces mêmes limites,  $ml \tan ml$  devenant une fois égale à  $b^2$ , il se trouve une racine de l'équation (26). On peut de plus reconnaître que cette équation n'a pas de racines imaginaires. En effet, pour que  $\alpha + \beta\sqrt{-1}$  fût une racine, il faudrait qu'on eût

$$(\alpha + \beta\sqrt{-1}) \sin(\alpha + \beta\sqrt{-1}) = b^2 \cos(\alpha + \beta\sqrt{-1}),$$

soit, en développant le sinus et cosinus,

$$\begin{aligned} & (\alpha + \beta\sqrt{-1}) (\sin \alpha \cos \beta\sqrt{-1} + \cos \alpha \sin \beta\sqrt{-1}) \\ & = b^2 (\cos \alpha \cos \beta\sqrt{-1} - \sin \alpha \sin \beta\sqrt{-1}). \end{aligned}$$

Or on sait que

$$\cos \beta\sqrt{-1} = \frac{1}{2}(e^{\beta} + e^{-\beta}), \quad \sin \beta\sqrt{-1} = \frac{1}{2}\sqrt{-1}(e^{\beta} - e^{-\beta});$$

donc l'équation précédente devient

$$\begin{aligned} & (\alpha + \beta\sqrt{-1}) [\sin \alpha (e^{\beta} + e^{-\beta}) + \cos \alpha (e^{\beta} - e^{-\beta})\sqrt{-1}] \\ & = b^2 [\cos \alpha (e^{\beta} + e^{-\beta}) - \sin \alpha (e^{\beta} - e^{-\beta})\sqrt{-1}], \end{aligned}$$

ou bien

$$\alpha \sin \alpha (e^{\beta} + e^{-\beta}) - \beta \cos \alpha (e^{\beta} - e^{-\beta}) - b^2 \cos \alpha (e^{\beta} + e^{-\beta}) \\ + \sqrt{-1} [\alpha \cos \alpha (e^{\beta} - e^{-\beta}) + \beta \sin \alpha (e^{\beta} + e^{-\beta}) + b^2 \sin \alpha (e^{\beta} - e^{-\beta})] = 0.$$

Cette dernière équation ne peut être satisfaite que si la partie réelle et la partie imaginaire sont séparément nulles; or en examinant le multiplicateur de  $\sqrt{-1}$ , on voit qu'il se compose de termes tous positifs quand  $\alpha$  et  $\beta$  le sont, et changeant tous de signe avec  $\alpha$  ou  $\beta$ . Ces termes ont donc tous le même signe, et alors il faut qu'ils soient tous nuls, ce qui exige la nullité de l'une des deux quantités  $\alpha$  ou  $\beta$ . Mais si  $\alpha$  était nul, la partie réelle de la dernière équation serait réduite à

$$-\beta (e^{\beta} - e^{-\beta}) - b^2 (e^{\beta} + e^{-\beta}),$$

quantité forcément négative, qui ne pourrait s'annuler pour aucune valeur de  $\beta$ . Donc c'est  $\beta$  qui doit être nul; donc enfin l'équation (26) n'admet que des racines réelles.

Les racines de l'équation (26) étant déterminées, on mettra les valeurs correspondantes de  $m$  dans l'expression (7) de  $u$ . Il ne restera plus alors qu'à déterminer les coefficients constants  $C$  et  $D$ , en nombre infini, de manière à satisfaire aux équations (24) et (25), c'est-à-dire de manière que les séries exprimées par  $\sum D \sin mx$  et par  $\sum m C \sin mx$  soient égales respectivement aux fonctions données

$$F(x) = \frac{11}{2E} (2lx - x^2) - \frac{Px}{E\omega} \quad \text{et} \quad \frac{1}{a} f(x),$$

entre les limites  $x = 0$  et  $x = l$ . On peut suivre à cet effet la méthode suivante, indiquée par Poisson (\*).

Supposons le problème résolu, et soit, par exemple, l'égalité

$$F(x) = \frac{11}{2E} (2lx - x^2) - \frac{Px}{E\omega} = D \sin mx + D' \sin m'x + \dots,$$

dans laquelle  $D, D', \dots$ , représentent les constantes à chercher, et  $m, m', \dots$ , les racines de l'équation (26). Ces racines sont deux à deux égales et de signe contraire. Mais on ne diminuera en rien la généralité de l'intégrale (7) en se bornant à prendre les racines positives. En effet, les valeurs  $m$  et  $-m$  donneraient lieu dans cette intégrale à l'ensemble de

(\*) *Journal de l'École Polytechnique*, XVIII<sup>e</sup> cahier, tome XI. Mémoire sur la manière d'exprimer les fonctions par des séries de quantités périodiques, et sur l'usage de cette transformation dans la résolution de différents problèmes.



termes

$$\sin mx (C \sin mat + D \cos mat) - \sin mx (-C_1 \sin mat + D_1 \cos mat),$$

qui peut se mettre sous la forme

$$\sin mx [(C + C_1) \sin mat + (D - D_1) \cos mat],$$

ou sous la forme

$$\sin mx (C_2 \sin mat + D_2 \cos mat),$$

$C_2$  et  $D_2$  désignant des constantes comme  $C$ ,  $D$ ,  $C_1$ ,  $D_1$ . Si l'on admettait les racines négatives, on aurait donc un développement réductible à la même forme que si l'on prenait exclusivement les racines positives : on est donc en droit de s'arrêter à ce dernier parti.

Cela posé, désignons par  $\varphi(x)$ , pour abréger, la dérivée du premier membre de l'équation précédente prise par rapport à  $x$ ;  $\varphi(x)$  sera une fonction connue de  $x$ , ayant pour expression

$$\frac{dF(x)}{dx} - \frac{\Pi}{E}(l-x) - \frac{P}{E\omega} = \varphi(x).$$

Les inconnues  $D$ ,  $D'$ , ..., devront donc aussi vérifier l'égalité

$$\varphi(x) = mD \cos mx + m'D' \cos m'x + \dots,$$

soit, en remplaçant  $x$  par une autre variable  $\zeta$ ,

$$\varphi(\zeta) = mD \cos m\zeta + m'D' \cos m'\zeta + \dots$$

Multiplions les deux membres par  $\cos \zeta d\zeta$  et intégrons entre les limites 0 et  $l$ , il viendra

$$\int_0^l \varphi(\zeta) \cos m\zeta d\zeta = Dm \int_0^l \cos^2 m\zeta d\zeta + D'm' \int_0^l \cos m\zeta \cos m'\zeta d\zeta + \dots$$

Or on a la formule connue

$$\int \cos^2 m\zeta d\zeta = \frac{1}{2m} (m\zeta + \sin m\zeta \cos m\zeta) = \frac{1}{4m} (2m\zeta + \sin 2m\zeta),$$

et, par conséquent,

$$\int_0^l \cos^2 m\zeta d\zeta = \frac{1}{4m} (2ml + \sin 2ml).$$

D'un autre côté, l'intégration par parties donne les relations

$$\int \cos m\zeta \cos m'\zeta d\zeta = \frac{1}{m'} \sin m'\zeta \cos m\zeta + \frac{m}{m'} \int \sin m'\zeta \sin m\zeta d\zeta,$$

$$\int \sin m\zeta \sin m'\zeta d\zeta = -\frac{1}{m'} \cos m'\zeta \sin m\zeta + \frac{m}{m'} \int \cos m'\zeta \cos m\zeta d\zeta;$$

d'où résulte, par l'élimination de  $\int \sin m\zeta \sin m'\zeta d\zeta$ ,

$$(m^2 - m'^2) \int \cos m\zeta \cos m'\zeta d\zeta = m \sin m\zeta \cos m'\zeta - m' \sin m'\zeta \cos m\zeta,$$

ou, en prenant l'intégrale définie,

$$\begin{aligned} & (m^2 - m'^2) \int_0^l \cos m\zeta \cos m'\zeta d\zeta \\ &= m \sin ml \cos m'l - m' \sin m'l \cos ml \\ &= \frac{1}{l} \cos ml \cos m'l (ml \operatorname{tang} ml - m'l \operatorname{tang} m'l). \end{aligned}$$

Puisque  $m$  et  $m'$  satisfont à l'équation (26), on a

$$ml \operatorname{tang} ml = m'l \operatorname{tang} m'l = b^2;$$

donc si  $m$  est différent de  $m'$ , le facteur  $m^2 - m'^2$  n'étant pas nul, il faudra nécessairement qu'on ait

$$\int_0^l \cos m\zeta \cos m'\zeta d\zeta = 0.$$

En vertu de ces calculs, on pourra donc écrire

$$\int_0^l \varphi(\zeta) \cos m\zeta d\zeta = \frac{D}{4} (2ml + \sin 2ml),$$

d'où l'on tire l'un des coefficients

$$D = \frac{4}{2ml + \sin 2ml} \int_0^l \varphi(\zeta) \cos m\zeta d\zeta.$$

On aurait trouvé pareillement

$$D' = \frac{4}{2m'l + \sin 2m'l} \int_0^l \varphi(\zeta) \cos m'\zeta d\zeta,$$

et ainsi de suite pour les autres. Le même procédé servirait pour les coefficients  $C$ , et donnerait l'expression générale

$$C = \frac{4}{ma(2ml + \sin 2ml)} \int_0^l \frac{df(\zeta)}{d\zeta} \cos m\zeta d\zeta.$$

Ainsi donc finalement, si l'on nomme  $\sum$  une somme étendue à toutes

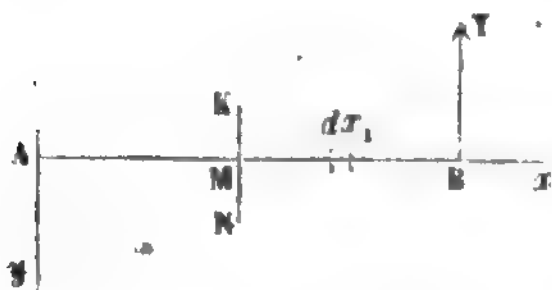
les racines positives de l'équation (26), la valeur de  $u$  sera

$$(27) \quad \left\{ \begin{aligned} u &= \frac{11}{2E} (2lx - x^2) + \frac{Px}{E\omega} \\ &+ 4 \sum \left[ \frac{\sin mx \sin mat}{ma(2ml + \sin 2ml)} \int_0^l \frac{df(\zeta)}{d\zeta} \cos m\zeta d\zeta \right] \\ &+ 4 \sum \left[ \frac{\sin mx \cos mat}{2ml + \sin 2ml} \int_0^l \psi(\zeta) \cos m\zeta d\zeta \right]; \end{aligned} \right.$$

les applications numériques n'exigeraient plus que des quadratures.

**143. Vibrations transversales d'une poutre homogène uniformément chargée et reposant sur deux appuis simples.** — Soit AB (fig. 58) la fibre moyenne de la poutre donnée qui est

Fig. 58.



homogène et à section constante; nous la supposons chargée uniformément suivant sa longueur et nous considérerons la charge comme participant au mouvement vibratoire transversal de la pièce. Prenons la ligne AB pro-

longée pour axe des  $x$ , et pour axe des  $y$  la perpendiculaire Ay menée dans un plan que nous supposons contenir toutes les positions de la fibre moyenne. Appelons :

$x$  la distance d'une section quelconque KMN à l'extrémité A ;

$l$  la distance  $\overline{AB}$  des points d'appui ;

$y$  le dérangement vertical du point M à un instant quelconque ;

$e$  le ressort longitudinal (n° 13) de la section transversale ;

$r$  son rayon de gyration relativement à l'axe autour duquel s'opère la flexion ;

$p$  le poids de la charge par mètre courant, y compris le poids propre de la pièce ;

$p'$  le poids de la pièce seule, également par mètre courant ;

$Y$  la réaction de l'appui B ;

$t$  le temps compté à partir d'une origine quelconque.

Si l'équilibre existait, on aurait (n° 47)

$$er^3 \frac{d^2 y}{dx^2} = X = \frac{1}{2} p (l-x)^2 - Y (l-x),$$

ou, à cause de  $Y = \frac{1}{2} pl$ ,

$$er^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{2} p (x^2 - lx);$$

donc aussi

$$er^2 \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} p \left( \frac{x^3}{3} - \frac{lx^2}{2} + \frac{l^3}{12} \right),$$

car  $\frac{dy}{dx}$  doit s'annuler pour  $x = \frac{1}{2} l$ ; donc enfin

$$(28) \quad er^2 y = \frac{1}{2} p \left( \frac{x^4}{12} - \frac{lx^3}{6} + \frac{l^3 x}{12} \right) = \frac{1}{24} px (x^3 - 2lx^2 + l^3).$$

L'équilibre n'existerait que si le dérangement  $y$  avait partout la valeur donnée par cette formule, et si la vitesse antérieurement acquise était nulle; dans tout autre cas, il y aura un mouvement dont il s'agit de trouver l'équation.

A cet effet on pourra se servir de la même équation (9) du n° 47, qui exprime l'équilibre entre les forces extérieures et les actions moléculaires dues aux dérangements  $y$ , pourvu que, conformément au principe de d'Alembert, on compte les forces d'inertie parmi les forces extérieures. Or pour une portion de pièce de longueur  $dx_1$ , répondant à l'abscisse  $x_1$ , entre M et B, la masse sera  $\frac{p dx_1}{g}$  et l'accélération  $\frac{d^2 y_1}{dt^2}$ ,  $y_1$  étant la valeur de  $y$  pour  $x = x_1$ ; par conséquent la force d'inertie s'exprimera par  $-\frac{p}{g} dx_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2}$ , et sa direction sera de bas en haut si  $\frac{d^2 y_1}{dt^2}$  a le signe  $+$ . Il faut observer en outre que l'élément

de masse  $\frac{p' dx_1}{g}$ , appartenant à la poutre proprement dite, a un mouvement de rotation autour de son centre de gravité, mouvement qui donne lieu à des forces d'inertie dont l'ensemble forme un couple résultant. On sait par des théories connues que l'intensité de ce couple est le produit de l'accélération angulaire par le moment d'inertie de la masse  $\frac{p' dx_1}{g}$  relative-

ment à l'axe de rotation. Le premier facteur s'évalue en remarquant que  $-\frac{dy_1}{dx_1}$  exprime l'angle variable de la section normale avec l'axe des  $y$ ; l'accélération angulaire, comptée dans le sens de  $Ay$  vers  $Ax$ , sera donc  $-\frac{d^3y_1}{dx_1 dt^2}$ . D'ailleurs, à cause de l'homogénéité de l'élément  $\frac{p' dx_1}{g}$ , son rayon de gyration est le même que celui de la section transversale; donc le couple d'inertie dû à la rotation de cet élément a pour valeur  $-\frac{p' r^2 dx_1}{g} \frac{d^3y_1}{dx_1 dt^2}$ , et il doit être regardé comme agissant contrairement au sens de l'accélération angulaire, ou bien dans le sens d'une rotation de  $Ax$  vers  $Ay$ . Le moment  $X$ , en tenant compte des forces d'inertie dans la partie  $MB$ , aura donc pour expression

$$er^2 \frac{d^2y}{dx^2} = \int_x^l \left(1 - \frac{1}{g} \frac{d^2y_1}{dt^2}\right) (x_1 - x) p dx_1 \\ - \int_x^l \frac{p' r^2}{g} \cdot \frac{d^3y_1}{dx_1 dt^2} dx_1 - Y(l - x).$$

Pour faire disparaître le signe  $\int$  sous lequel entre une fonction inconnue  $y_1$ , on différenciera deux fois par rapport à  $x$ , et on trouvera successivement :

$$er^2 \frac{d^3y}{dx^3} = - \int_x^l \left(1 - \frac{1}{g} \frac{d^2y_1}{dt^2}\right) p dx_1 + \frac{p' r^2}{g} \frac{d^3y}{dx dt^2} + Y, \\ (29) \quad er^2 \frac{d^4y}{dx^4} = p - \frac{p}{g} \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{p' r^2}{g} \frac{d^4y}{dx^2 dt^2}.$$

L'équation (29), dont on vient de donner la démonstration directe, aurait pu également se déduire des formules (2) et (3) établies au n° 68, dans un cas plus général. La fibre moyenne étant supposée droite, il faudrait d'abord faire

$$s = x, \quad \rho = \infty, \quad v = y,$$

ce qui réduit ces formules aux suivantes :

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = R + \frac{Eg}{\Omega} \frac{d^2 u}{dx^2},$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = T + \frac{g}{\Omega \Omega} \frac{dP}{dx},$$

$$r^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} = M + r^2 \frac{Eg}{\Omega} \frac{d^2 \theta}{dx^2} - \frac{g}{\Omega \Omega} P;$$

la formule (3) devient de même

$$\frac{dy}{dx} + \theta = 0.$$

Pour évaluer les forces désignées par R et T, ainsi que le couple M, on se rappellera qu'un élément répondant à la portion  $dx$  de la fibre moyenne supporte seulement des forces verticales, qui sont : 1° son poids  $p' dx$ ; 2° la pression due à la charge  $(p - p') dx$ , laquelle, eu égard à la force d'inertie de cette charge possédant l'accélération  $\frac{d^2 y}{dt^2}$ , s'exprime par

$$(p - p') \left( 1 - \frac{1}{g} \frac{d^2 y}{dt^2} \right) dx.$$

Ainsi donc R et M sont nuls, et T, force verticale rapportée à l'unité de masse, s'obtient en divisant par  $\frac{p'}{g} dx$  l'expression précédente augmentée de  $p' dx$ , ce qui donne

$$T = - \frac{p - p'}{p'} \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{p}{p'} g.$$

Si l'on substitue ces valeurs, on trouve :

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = \frac{Eg}{\Omega} \frac{d^2 u}{dx^2},$$

$$\frac{p}{p'} \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{p}{p'} g + \frac{g}{\Omega \Omega} \frac{dP}{dx},$$

$$r^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} = r^2 \frac{Eg}{\Omega} \frac{d^2 \theta}{dx^2} - \frac{g}{\Omega \Omega} P,$$

$$\frac{dy}{dx} + \theta = 0.$$

La première donne la loi des vibrations longitudinales; c'est l'équation connue de la corde vibrante, et nous croyons inutile de nous y arrêter davantage. Entre la seconde et la troisième on peut d'abord éliminer P,



et il vient

$$\frac{p}{p'} \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{p}{p'} g + r^2 \frac{d^3 \theta}{dx dt^2} - r^2 \frac{E g}{\Pi} \frac{d^3 \theta}{dx^3} = 0;$$

puis faisant  $\theta = -\frac{dy}{dx}$ , et observant que des relations  $p' = \Pi \Omega$  et  $c = E \Omega$

résulte  $\frac{E}{\Pi} = \frac{c}{p'}$ , on aura

$$\frac{p}{p'} \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{p}{p'} g - r^2 \frac{d^4 y}{dx^2 dt^2} + \frac{er^2 g}{p'} \frac{d^4 y}{dx^4} = 0,$$

équation ne différant de l'équation (29) que par l'ordre des termes et le facteur  $\frac{g}{p'}$ .

Maintenant il s'agit d'intégrer cette équation aux différences partielles du quatrième ordre.

L'expression de  $y$  donnée par l'équation (28) en est une solution particulière, car il en résulterait

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{p}{er^2}, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^4 y}{dx^2 dt^2} = 0,$$

valeurs qui rendent bien identiques les deux membres de l'équation (29). Posons

$$y = \frac{p}{24 er^2} x (x^3 - 2 lx^2 + l^3) + z;$$

l'inconnue auxiliaire  $z$  devra satisfaire à la relation obtenue en substituant cette valeur dans l'équation (29) : or on a d'abord

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{p}{er^2} + \frac{d^4 z}{dx^4}, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d^2 z}{dt^2}, \quad \frac{d^4 y}{dx^2 dt^2} = \frac{d^4 z}{dx^2 dt^2},$$

et par suite, si l'on effectue la substitution, il vient

$$p + er^2 \frac{d^4 z}{dx^4} = p - \frac{p}{g} \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{p' r^2}{g} \frac{d^4 z}{dx^2 dt^2},$$

ou, en réduisant et posant  $a^4 = \frac{er^2 g}{p}$ ,  $b^2 = \frac{p'}{p} r^2$ ,

$$(30) \quad a^4 \frac{d^4 z}{dx^4} - b^2 \frac{d^4 z}{dx^2 dt^2} + \frac{d^2 z}{dt^2} = 0.$$

Cette dernière équation s'intègre au moyen du procédé général indiqué plus haut (n° 138) : on en cherchera une solution de la forme

$$z = \sum A \sin mx,$$

laquelle a une généralité suffisante pour le problème actuel, comme la suite le montrera. Cette valeur substituée dans l'équation (30) donne

$$a^4 \sum m^4 A \sin mx + b^2 \sum m^2 \frac{d^2 A}{dt^2} \sin mx + \sum \frac{d^2 A}{dt^2} \sin mx = 0,$$

ou bien

$$\sum \left[ m^4 a^4 A + (m^2 b^2 + 1) \frac{d^2 A}{dt^2} \right] \sin mx = 0;$$

comme la nullité de cette somme doit avoir identiquement lieu quel que soit  $x$ , il faut que chaque multiplicateur de  $\sin mx$  soit nul en particulier, c'est-à-dire que les fonctions du temps désignées par  $A$  doivent satisfaire à la relation

$$m^4 a^4 A + (m^2 b^2 + 1) \frac{d^2 A}{dt^2} = 0.$$

On en tire

$$A = C \sin \frac{m^2 a^2 t}{\sqrt{m^2 b^2 + 1}} + D \cos \frac{m^2 a^2 t}{\sqrt{m^2 b^2 + 1}},$$

$C$  et  $D$  désignant deux constantes arbitraires. Nous avons donc

$$y = \frac{P}{24er^2} x (x^3 - 2lx^2 + l^3) + \sum \sin mx \left( C \sin \frac{m^2 a^2 t}{\sqrt{m^2 b^2 + 1}} + D \cos \frac{m^2 a^2 t}{\sqrt{m^2 b^2 + 1}} \right).$$

Il ne reste plus qu'à déterminer les constantes telles que  $m$ ,  $C$ ,  $D$ , qui sont en nombre infini.

A cet effet, exprimons d'abord que les extrémités de la pièce reposent sur des appuis simples : cela exige que l'ordonnée  $y$  et le moment fléchissant (ou la dérivée  $\frac{d^2 y}{dx^2}$ , qui lui est proportionnelle) soient nuls quand on fait  $x = 0$  et  $x = l$ , indé-

pendamment de toute valeur attribuée à  $t$ . Or on voit que l'expression précédente de  $y$  et sa dérivée seconde par rapport à  $x$  s'annulent d'elles-mêmes pour  $x = 0$ ; afin que la même chose ait lieu pour  $x = l$ , il faut poser les deux équations

$$\sum \sin ml \left( C \sin \frac{m^2 a^2 t}{\sqrt{m^2 b^2 + 1}} + D \cos \frac{m^2 a^2 t}{\sqrt{m^2 b^2 + 1}} \right) = 0,$$

$$\sum m^2 \sin ml \left( C \sin \frac{m^2 a^2 t}{\sqrt{m^2 b^2 + 1}} + D \cos \frac{m^2 a^2 t}{\sqrt{m^2 b^2 + 1}} \right) = 0,$$

et puisque  $t$  reste indéterminé, on en conclut

$$\sin ml = 0,$$

ce qui montre que  $ml$  doit être un multiple exact de la demi-circonférence. Si donc on appelle  $i$  un nombre entier quelconque, on aura

$$(31) \quad ml = i\pi,$$

relation qui fournit toutes les valeurs de  $m$  à mettre dans l'expression de  $y$ . Donc

$$(32) \quad \left\{ \begin{aligned} y &= \frac{p}{24er^2} x (x^3 - 2lx^2 + l^3) \\ &+ \sum \sin \frac{i\pi x}{l} \left( C \sin \frac{i^2 \pi^2 a^2 t}{l \sqrt{i^2 \pi^2 b^2 + l^2}} + D \cos \frac{i^2 \pi^2 a^2 t}{l \sqrt{i^2 \pi^2 b^2 + l^2}} \right). \end{aligned} \right.$$

Maintenant supposons que pour  $t = 0$ , on donne les valeurs de  $y$  et de  $\frac{dy}{dt}$  en fonction de  $x$ , savoir  $y = F(x)$  et  $\frac{dy}{dt} = f(x)$ , ce qui serait nécessaire pour définir l'état initial du système : alors les constantes  $C$  et  $D$  doivent vérifier les égalités

$$(33) \quad F(x) = \frac{p}{24er^2} x (x^3 - 2lx^2 + l^3) + \sum D \sin \frac{i\pi x}{l},$$

$$(34) \quad f(x) = \frac{\pi^2 a^2}{l} \sum \frac{i^2 C}{\sqrt{i^2 \pi^2 b^2 + l^2}} \sin \frac{i\pi x}{l}.$$

Les choses étant à ce point, la solution se complète sans peine

au moyen d'un théorème dû à Lagrange (\*), que l'on peut énoncer ainsi : Quelle que soit une fonction  $\varphi(x)$ , continue ou discontinue, mais toujours finie quand  $x$  varie de 0 à  $l$ , si l'on représente par  $i$  un nombre entier positif, par  $\zeta$  une quantité variable entre les limites 0 et  $l$ , et par  $\sum$  une somme étendue à toutes les valeurs de  $i$  depuis 1 jusqu'à l'infini, on aura

$$\varphi(x) = \frac{2}{l} \sum_{i=1}^{i=\infty} \left[ \sin \frac{i\pi x}{l} \int_0^l \sin \frac{i\pi \zeta}{l} \varphi(\zeta) d\zeta \right],$$

pour toutes les valeurs de  $x$  intermédiaires entre 0 et  $l$ , et même pour ces limites lorsque  $\varphi(0)$  et  $\varphi(l)$  sont nulles. Or  $F(x)$  et  $f(x)$  doivent précisément remplir la condition de s'annuler aux deux limites 0 et  $l$ , entre lesquelles se trouve toujours comprise la variable  $x$ , et de plus ces fonctions, par leur nature, sont toujours finies dans le même intervalle; donc si l'on pose

$$\varphi(x) = F(x) - \frac{p}{24er^2} x(x^2 - 2lx^2 + l^3),$$

et si l'on observe que le multiplicateur de  $p$  remplit également les conditions dont nous venons de parler, on en conclura qu'il est possible de satisfaire aux égalités (33) et (34) en supposant  $C=0$ ,  $D=0$ , pour toutes les valeurs négatives de  $i$ , et prenant, dans le cas de  $i$  positif,

$$(35) \quad D = \frac{2}{l} \int_0^l \sin \frac{i\pi \zeta}{l} \varphi(\zeta) d\zeta,$$

$$(36) \quad C = \frac{2\sqrt{i^2\pi^2b^2 + l^2}}{i^2\pi^2a^2} \int_0^l \sin \frac{i\pi \zeta}{l} f(\zeta) d\zeta.$$

---

(\*) *Mémoire sur la théorie du son*, faisant partie de la collection de l'Académie de Turin, tome I des anciens Mémoires. Cette formule se trouve encore reproduite : 1° dans la *Mécanique analytique* de Lagrange, tome I, section VI, § IV; 2° dans le *Traité de Mécanique* de Poisson, 2<sup>e</sup> édition, tome I, n° 325; 3° dans le *Mémoire* du même, déjà cité (note de la page 337). Nous renvoyons à ces auteurs pour la démonstration de la formule et les remarques auxquelles elle donne lieu.

On aurait donc définitivement

$$(37) \quad \begin{aligned} y = & \frac{p}{24er^2} x (x^3 - 2lx^2 + l^3) \\ & + \frac{2}{l} \sum_{i=1}^{i=\infty} \left[ \sin \frac{i\pi x}{l} \cos \frac{i^2 \pi^2 a^2 t}{l \sqrt{i^2 \pi^2 b^2 + l^2}} \int_0^l \sin \frac{i\pi \zeta}{l} \varphi(\zeta) d\zeta \right] \\ & + \frac{2}{\pi^2 a^2} \sum_{i=1}^{i=\infty} \left[ \frac{\sqrt{i^2 \pi^2 b^2 + l^2}}{i^2} \sin \frac{i\pi x}{l} \sin \frac{i^2 \pi^2 a^2 t}{l \sqrt{i^2 \pi^2 b^2 + l^2}} \int_0^l \sin \frac{i\pi \zeta}{l} f(\zeta) d\zeta \right]. \end{aligned}$$

Quand le temps  $t$  reçoit un accroissement exprimé par  $\frac{2l\sqrt{i^2\pi^2b^2+l^2}}{\pi a^2}$ , l'arc  $\frac{i^2\pi^2a^2t}{l\sqrt{i^2\pi^2b^2+l^2}}$  augmente de  $2i^2\pi$ , c'est-à-

dire d'un nombre entier de circonférences; ses sinus et cosinus redeviennent donc les mêmes. Il en résulte que chacun des termes qui composent  $y$  est une fonction périodique du temps; mais comme la durée de la période varie pour chacun d'eux en fonction de  $i$ , nous ne pouvons pas en conclure que le mouvement de la pièce est lui-même périodique: nous devons seulement affirmer qu'il est produit par la superposition d'une infinité de mouvements périodiques. La périodicité n'existerait rigoureusement que si  $b^2$  était nul, ce qu'on pourrait supposer dans le cas où  $p'$  deviendrait négligeable devant  $p$ , car d'après la définition de  $b$  on a  $b^2 = \frac{p'}{p} r^2$ . La durée de

la période serait alors  $\frac{2l^2}{\pi a^2}$ , ou bien en remplaçant  $a^2$  par sa va-

leur,  $\frac{2l^2}{\pi r} \sqrt{\frac{p}{eg}}$ ; elle pourrait d'ailleurs, dans certains cas particuliers, comprendre plusieurs sous-périodes. Lorsque  $b$  n'est pas nul, la durée de la période augmente pour chaque terme de  $y$  en particulier; le système partant d'une position arbitrairement choisie emploie donc plus de temps pour y revenir à peu près.

144. *Cas particulier de la question traitée au n° 143.* — Lorsque les fonctions  $\varphi$  et  $f$  sont des polynômes algébriques entiers, ne contenant que des puissances entières et positives

de la variable, le calcul des intégrales définies

$$\int_0^l \sin \frac{i\pi\zeta}{l} \varphi(\zeta) d\zeta \quad \text{et} \quad \int_0^l \sin \frac{i\pi\zeta}{l} f(\zeta) d\zeta$$

peut s'effectuer assez simplement. La méthode étant identique pour les deux, nous prendrons par exemple la première. En désignant par  $\varphi'$ ,  $\varphi''$ ,  $\varphi'''$ , etc., les dérivées successives de  $\varphi$ , et intégrant par parties, on aura

$$\int \sin \frac{i\pi\zeta}{l} \varphi(\zeta) d\zeta = -\frac{l}{i\pi} \cos \frac{i\pi\zeta}{l} \varphi(\zeta) + \frac{l}{i\pi} \int \cos \frac{i\pi\zeta}{l} \varphi'(\zeta) d\zeta,$$

$$\int \cos \frac{i\pi\zeta}{l} \varphi'(\zeta) d\zeta = \frac{l}{i\pi} \sin \frac{i\pi\zeta}{l} \varphi'(\zeta) - \frac{l}{i\pi} \int \sin \frac{i\pi\zeta}{l} \varphi''(\zeta) d\zeta.$$

On mettra successivement dans la première équation  $\varphi''$ ,  $\varphi^{iv}$ ,  $\varphi^{vi}$ , ..., au lieu de  $\varphi$ , et de même, dans la seconde,  $\varphi'''$ ,  $\varphi^v$ ,  $\varphi^{vii}$ , ..., au lieu de  $\varphi'$ ; entre la série d'équations obtenues ainsi, on élimine sans peine les diverses intégrales, sauf celle que l'on cherche et celle dans laquelle entre la dérivée de  $\varphi$  de l'ordre le plus élevé; on trouve ainsi

$$(38) \left\{ \begin{aligned} \int \sin \frac{i\pi\zeta}{l} \varphi(\zeta) d\zeta &= -\frac{l}{i\pi} \cos \frac{i\pi\zeta}{l} \varphi(\zeta) + \frac{l^2}{i^2\pi^2} \sin \frac{i\pi\zeta}{l} \varphi'(\zeta) \\ &+ \frac{l^3}{i^3\pi^3} \cos \frac{i\pi\zeta}{l} \varphi''(\zeta) - \frac{l^4}{i^4\pi^4} \sin \frac{i\pi\zeta}{l} \varphi'''(\zeta) \\ &- \frac{l^5}{i^5\pi^5} \cos \frac{i\pi\zeta}{l} \varphi^{iv}(\zeta) + \frac{l^6}{i^6\pi^6} \sin \frac{i\pi\zeta}{l} \varphi^v(\zeta) \\ &+ \dots \dots \dots \end{aligned} \right.$$

La loi de cette série est évidente; d'ailleurs la série se terminera d'elle-même, car si  $\varphi(\zeta)$  est un polynôme de degré  $n$ , la  $(n+1)^{ième}$  dérivée et les dérivées suivantes seront nulles.

L'intégrale fournie par l'équation (38) devant être prise entre les limites 0 et  $l$ , cette circonstance donne lieu à une simplification notable. En effet,  $\sin \frac{i\pi\zeta}{l}$  s'annule à ces deux

limites;  $\cos \frac{i\pi\zeta}{l}$  est égal à l'unité pour  $\zeta = 0$ , et à  $(-1)^i$  pour  $\zeta = l$ ; enfin on sait que  $\varphi(0)$  ainsi que  $\varphi(l)$  sont nulles, et



qu'il en est de même de  $\varphi''(0)$  et de  $\varphi''(l)$ , à cause de la nullité constante de  $\frac{d^2\gamma}{dx^2}$  aux points A et B; donc on peut écrire

$$(39) \left\{ \begin{aligned} & \int_0^l \sin \frac{i\pi\zeta}{l} \varphi(\zeta) d\zeta \\ &= -\frac{l^5}{i^5\pi^5} [(-1)^i \varphi^{iv}(l) - \varphi^{iv}(0)] + \frac{l^7}{i^7\pi^7} [(-1)^i \varphi^{vii}(l) - \varphi^{vii}(0)] \\ & \quad - \frac{l^9}{i^9\pi^9} [(-1)^i \varphi^{viiii}(l) - \varphi^{viiii}(0)] + \dots \end{aligned} \right.$$

S'il s'agissait de la fonction  $f$ , on aurait bien encore

$$f(0) = f(l) = 0;$$

mais comme les dérivées secondes  $f''(0)$  et  $f''(l)$  ne s'annuleraient pas nécessairement, on écrirait

$$(40) \left\{ \begin{aligned} & \int_0^l \sin \frac{i\pi\zeta}{l} f(\zeta) d\zeta \\ &= \frac{l^3}{i^3\pi^3} [(-1)^i f''(l) - f''(0)] - \frac{l^5}{i^5\pi^5} [(-1)^i f^{iv}(l) - f^{iv}(0)] \\ & \quad + \frac{l^7}{i^7\pi^7} [(-1)^i f^{vi}(l) - f^{vi}(0)] - \dots \end{aligned} \right.$$

Ces deux formules permettent d'obtenir les valeurs de toutes les intégrales définies qui entrent comme coefficients constants dans l'équation (37).

Prenons comme exemple le cas où la poutre serait à l'origine du temps dans son état primitif, c'est-à-dire sans déformation et sans vitesse initiale. Il faut faire alors

$$F(x) = 0, \quad f(x) = 0,$$

et, par suite,

$$\varphi(x) = -\frac{P}{24er^2} (x^4 - 2lx^3 + l^3x);$$

$\varphi^{iv}(x)$  se réduit à la constante  $-\frac{P}{er^2}$ , et toutes les dérivées suivantes sont nulles. Donc

$$\int_0^l \sin \frac{i\pi\zeta}{l} \varphi(\zeta) d\zeta = \frac{P}{er^2} \cdot \frac{l^5}{i^5\pi^5} (\pm 1 - 1),$$

le double signe dans la parenthèse devant être + ou —, suivant qu'on prend  $i$  pair ou impair. Ainsi l'intégrale sera nulle dans le premier cas, et dans le second elle aura pour valeur

$-\frac{2p}{er^2} \cdot \frac{l^3}{i^3\pi^3}$ ; d'ailleurs  $f$  étant nulle,  $\int_0^l \sin \frac{i\pi\zeta}{l} f(\zeta) d\zeta$  l'est

aussi. Donc l'équation (37) devient

$$(41) \quad \begin{cases} \frac{24er^2}{p} y = x^4 - 2lx^3 + l^3x \\ - \frac{96l^4}{\pi^3} \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{1}{i^3} \sin \frac{i\pi x}{l} \cos \frac{i^2\pi^2 a^2 t}{l\sqrt{i^2\pi^2 b^2 + l^2}} \right), \end{cases}$$

la somme  $\sum$  ne s'étendant plus qu'aux valeurs impaires de  $i$ .

Lorsque  $x$  est changé en  $l - x$ , on reconnaît aisément que le second membre de cette équation ne change pas; deux points à égale distance du milieu de la poutre auront donc un mouvement identique, ce qui était évident a priori, à cause de la symétrie. Nous avons déjà vu (n° 143) que le mouvement de la pièce est produit par la superposition d'une infinité de mouvements périodiques: on peut ajouter ici qu'il remplit lui-même assez approximativement la condition de périodicité,

car la somme  $\sum$  développée devient

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi x}{l} \cos \frac{\pi^2 a^2 t}{l\sqrt{\pi^2 b^2 + l^2}} + \frac{1}{243} \sin \frac{3\pi x}{l} \cos \frac{9\pi^2 a^2 t}{l\sqrt{9\pi^2 b^2 + l^2}} \\ + \frac{1}{3125} \sin \frac{5\pi x}{l} \cos \frac{25\pi^2 a^2 t}{l\sqrt{25\pi^2 b^2 + l^2}} + \dots \end{aligned}$$

On voit que la série converge rapidement et que le premier terme est prédominant; il a en effet pour limite l'unité, tandis

que le second a pour limite  $\frac{1}{243}$ , le troisième  $\frac{1}{3125}$ , celui du

rang  $n$  le nombre  $\frac{1}{(2n-1)^5}$ . En se bornant au premier terme,  $y$  deviendrait une fonction périodique du temps ayant pour durée

de la période  $\frac{2l\sqrt{\pi^2 b^2 + l^2}}{\pi a^2}$ , soit  $\frac{2l}{\pi r} \sqrt{\frac{\pi^2 r^2 p' + l^2 p}{eg}}$ .

La dérivée partielle  $\frac{dy}{dx}$  est constamment nulle pour  $x = \frac{l}{2}$ , indépendamment de  $t$ ; on peut s'en assurer au moyen de l'expression (41), ou bien regarder ce fait comme une conséquence de ce qui a été dit tout à l'heure sur l'identité du mouvement de deux points pris à égale distance du milieu. Le milieu de la poutre est donc le point où la flèche est à chaque instant la plus grande. Appelons-la  $y_1$ ; nous aurons  $y_1$  en faisant  $x = \frac{l}{2}$  dans le second membre de l'équation (41), ce qui donne

$$(42) \quad \frac{24er^2}{pl^4} y_1 = \frac{5}{16} - \frac{96}{\pi^5} \left( \cos \frac{\pi^2 a^2 t}{l\sqrt{\pi^2 b^2 + l^2}} - \frac{1}{243} \cos \frac{9\pi^2 a^2 t}{l\sqrt{9\pi^2 b^2 + l^2}} + \frac{1}{3125} \cos \frac{25\pi^2 a^2 t}{\sqrt{25\pi^2 b^2 + l^2}} + \dots \right).$$

Si nous supposons  $t = 0$ , nous savons d'avance que  $y_1$  doit s'annuler, aussi bien que l'ordonnée  $y$  de tout point de la fibre moyenne; or tous les cosinus deviennent alors égaux à l'unité: donc on peut écrire

$$\frac{5}{16} \cdot \frac{\pi^5}{96} = \frac{5\pi^5}{1536} = 1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \dots \quad (*)$$

(\*) On a d'autres procédés en Analyse pour effectuer la sommation de cette suite. Par exemple, Poisson la déduit de la relation connue entre les sinus des multiples impairs d'un angle aigu:

$$\sin \theta - \sin 3\theta + \sin 5\theta - \sin 7\theta + \dots = 0.$$

Il intègre cinq fois cette équation (voir le XVIII<sup>e</sup> cahier, tome XI, du *Journal de l'École Polytechnique*, pages 315 et 316) et trouve ainsi

$$\frac{\pi^2 \theta^2}{32} - \frac{\pi \theta^4}{96} + c' = -\cos \theta + \frac{\cos 3\theta}{3^5} - \frac{\cos 5\theta}{5^5} + \frac{\cos 7\theta}{7^5} - \dots;$$

le second membre s'annulant pour  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , on en conclut la constante  $c'$ , qui est  $c' = -\frac{11\pi^5}{1536}$ ; puis, faisant  $\theta = 0$ , il viendra

$$-c' = 1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \dots = \frac{11\pi^5}{1536}.$$

La différence entre ce résultat et celui que nous obtenons tient à une faute de

La même valeur  $y_1 = 0$  se reproduit approximativement toutes les fois que  $t$  devient un multiple pair de  $\frac{l\sqrt{\pi^2 b^2 + l^2}}{\pi a^2}$ , car le premier cosinus de la parenthèse reprend sa valeur maximum, égale à l'unité; et les autres, comme on l'a déjà dit, n'ont pas d'influence sensible, à cause de la petitesse de leurs coefficients. Quand, au contraire,  $t$  se trouve être un multiple impair du même temps, le premier cosinus devient égal à  $-1$ , de sorte que le second membre de l'équation (42) atteint une valeur à peu près double de  $\frac{5}{16}$ . La flèche varie donc, à peu près périodiquement, entre un minimum et un maximum respectivement peu différents de 0 et de  $\frac{5}{8 \cdot 24} \frac{pl^4}{er^2}$ ; cette dernière quantité n'est autre chose que le double de la flèche d'équilibre. Une propriété analogue a été déjà constatée sur deux exemples (nos 139 et 140).

**143. Effet produit sur une poutre par une charge roulante.** — On suppose une poutre homogène à section constante reposant sur deux appuis au même niveau; cette poutre supporte une charge permanente uniformément répartie et un poids qui se meut suivant sa longueur avec une vitesse constante  $v$ .

La recherche du mouvement vibratoire que la poutre prend dans ces circonstances donne lieu à des calculs trop laborieux pour qu'il soit possible de les exposer ici. Divers cas particuliers de la question sont traités dans un savant Mémoire de M. Phillips, ingénieur des Mines (\*); nous y renverrons le lec-

---

calcul numérique dans la troisième intégration, par suite de laquelle Poisson donne à une constante  $c$  la valeur  $-\frac{\pi^2}{16}$  au lieu de  $-\frac{\pi^2}{32}$ . En rétablissant ce dernier nombre, on trouve bien  $c' = -\frac{5\pi^2}{1536}$ .

(\*) *Annales des Mines*, tome VII, 1855. Nous croyons toutefois devoir faire deux observations. La première c'est que M. Phillips a négligé les forces d'inertie produites par la rotation des sections normales de la pièce, à laquelle il attribue simplement un mouvement vertical: il trouve ainsi, au lieu de l'équation (30) du n° 143, qui serait réellement applicable au problème, la même équation pri-

teur qui désirerait des développements sur ce sujet. M. Phillips a supposé un poids isolé  $Q$  concentré à chaque instant sur un point unique de la poutre ; il a étudié d'ailleurs les poutres simplement appuyées à leurs deux extrémités et celles qui sont au contraire terminées par deux encastremens. Voici les principales conclusions qui résultent de son travail :

1°. S'il s'agit d'une poutre reposant librement sur deux appuis, le moment fléchissant maximum se produira dans la section à égale distance des appuis et aura pour valeur

$$\frac{1}{8} pl^2 \left( 1 + \frac{Ql}{2er^2} \cdot \frac{v^2}{2g} \right) + \frac{1}{4} Ql \left( 1 + \frac{2Ql}{3er^2} \cdot \frac{v^2}{2g} \right),$$

les notations  $p, l, e, r, g$  conservant le même sens qu'au n° 143. Cette expression dans laquelle on ferait  $v = 0$  donnerait la valeur du moment fléchissant maximum, sous l'action de la charge permanente et du poids  $Q$  placé en repos au milieu de la poutre, savoir :

$$\frac{1}{8} pl^2 + \frac{1}{4} Ql.$$

Afin de tenir compte de la vitesse  $v$ , on voit que le terme  $\frac{1}{4} pl^2$ , représentant le moment limite produit par l'action isolée de la charge permanente, doit être augmenté dans le rapport de 1 à  $1 + \frac{Ql}{2er^2} \cdot \frac{v^2}{2g}$ , et que le second terme donnant le moment limite sous le poids  $Q$  isolé et privé de sa vitesse, doit pareillement subir une augmentation dans le rapport de 1 à  $1 + \frac{2Ql}{3er^2} \cdot \frac{v^2}{2g}$ .

vée du terme  $-b^2 \frac{d^2 z}{dx^2 dt^2}$ . Ses calculs ne semblent donc bien rigoureux que dans le cas où la section aurait un très-petit rayon de gyration, et dans celui où le poids propre de la poutre serait négligeable devant la charge permanente complète, circonstances qui tendraient à rendre nulle la quantité  $b^2$ . En second lieu, si l'on répète les calculs indiqués au chapitre III du Mémoire, pour le cas d'une poutre encastree à ses deux extrémités, on trouve une inexactitude dans le second membre de l'équation (76) : l'excès de la seconde parenthèse sur l'unité doit être réduit de moitié. Cet erratum nous a conduit à modifier légèrement les conclusions de l'auteur.

2°. Si la poutre est encastrée à ses deux extrémités, et qu'elle supporte à l'état d'équilibre le poids permanent  $pl$  et le poids  $Q$ , ce dernier étant concentré au milieu, on sait (n° 71) que le moment fléchissant a deux maxima, l'un au milieu, égal à

$$\frac{1}{24} pl^2 + \frac{1}{8} Ql,$$

l'autre dans les sections extrêmes, ayant pour expression

$$\frac{1}{12} pl^2 + \frac{1}{8} Ql.$$

L'existence de la vitesse  $v$  leur donnera respectivement les valeurs

$$\left( \frac{1}{24} pl^2 + \frac{1}{8} Ql \right) \left( 1 + \frac{Ql}{4er^2} \cdot \frac{v^2}{2g} \right),$$

$$\frac{1}{12} pl^2 \left( 1 + \frac{Ql}{8er^2} \cdot \frac{v^2}{2g} \right) + \frac{1}{8} Ql \left( 1 + \frac{Ql}{4er^2} \cdot \frac{v^2}{2g} \right).$$

Le premier est augmenté dans le rapport de 1 à  $1 + \frac{Ql}{4er^2} \cdot \frac{v^2}{2g}$ ; le second s'accroît dans un rapport intermédiaire entre celui de 1 à  $1 + \frac{Ql}{8er^2} \cdot \frac{v^2}{2g}$  ou de 1 à  $1 + \frac{Ql}{4er^2} \cdot \frac{v^2}{2g}$ , suivant l'importance comparative de la charge permanente et du poids  $Q$ .

3°. Les résultats précédents ne sont assez approchés de la vérité que s'ils indiquent de faibles accroissements relatifs dans les valeurs des moments qui correspondent à  $v = 0$ , c'est-à-dire si les quantités  $\frac{2Ql}{3er^2} \cdot \frac{v^2}{2g}$ ,  $\frac{Ql}{2er^2} \cdot \frac{v^2}{2g}$ ,  $\frac{Ql}{4er^2} \cdot \frac{v^2}{2g}$ ,  $\frac{Ql}{8er^2} \cdot \frac{v^2}{2g}$  (suivant les cas) sont de petites fractions : cette condition étant remplie, on voit que l'accroissement relatif varie proportionnellement à la force vive du corps roulant, à l'écartement des appuis, et en raison inverse du moment de flexibilité de la section transversale. On a supposé d'ailleurs qu'à l'instant où le poids  $Q$  vient s'engager sur la poutre, celle-ci était en équilibre sous la charge permanente.

4°. Dans la pratique, lorsqu'on voudra calculer les dimen-



sions d'une poutre, on le fera d'abord sans avoir égard à la vitesse de la charge  $Q$ ; puis, dans le cas de deux appuis simples on vérifiera si  $\frac{2Ql}{3er^2} \cdot \frac{v^2}{2g}$  est une petite fraction, et dans le cas

de deux encastrements on fera cette vérification sur  $\frac{Ql}{4er^2} \cdot \frac{v^2}{2g}$ .

Si la vérification réussit, la vitesse de la charge n'aura pas d'influence notable sur la résistance; sinon il faudrait diminuer l'écartement des appuis, ou augmenter le moment de flexibilité, dans la mesure qui serait nécessaire.

Voici enfin un cas particulier que M. Phillips a omis de considérer et dans lequel la théorie fournit, au moyen de calculs fort simples, des aperçus intéressants. Soit donnée une poutre horizontale reposant librement sur deux appuis extrêmes, dont  $l$  représente l'écartement, et soutenant une charge  $pl$  uniformément répartie sur sa longueur, à raison de  $p$  kilogrammes par unité linéaire. L'équilibre existe à un instant donné : alors on communique subitement une vitesse  $v$  à une portion de la charge, dont  $q$  représente le poids par unité de longueur. Il est visible que de cette manière l'équilibre serait troublé, car les poids animés de la vitesse  $v$  se mouvant suivant des courbes égales et parallèles à celle de la fibre moyenne, exerceraient sur la poutre des pressions plus grandes que dans l'état statique, en raison de leurs forces d'inertie centrifuges; mais on conçoit la possibilité idéale de donner à la poutre un accroissement de courbure capable de compenser l'augmentation de pression, de sorte que l'équilibre subsisterait malgré la vitesse  $v$  donnée au poids  $ql$ , pourvu toutefois que ce poids fût sans cesse renouvelé à une extrémité de la poutre à mesure qu'il s'écoule par l'autre, ce qui rendrait le phénomène permanent. Dans ces hypothèses, on peut d'abord chercher la figure d'équilibre, sous les actions simultanées du poids mort  $(p - q)l$  et du poids  $ql$  animé de la vitesse  $v$ .

Représentons par  $AB$  (*fig. 59*) la fibre moyenne de la pièce dans son état primitif; prenons cette ligne pour axe des  $x$ , et pour axe des  $y$  la verticale descendante  $Cy$  qui passe en son milieu  $C$ . La courbe  $AC'B$  étant la figure d'équilibre demandée, appelons :

$x, y$  les coordonnées d'un point quelconque  $M'$  de cette

Fig. 59.



courbe, lequel était primitivement en  $M$ ;

$x_1, y_1$  les coordonnées d'un point quelconque de la partie  $M'B$ ;

$a$  la distance  $\overline{CB}$ , ou la moitié de l'écartement  $l$  des appuis;

$e$  le ressort longitudinal de la section trans-

versale;  $r$  son rayon de gyration relativement à l'axe de flexion;

$\theta$  l'inclinaison sur l'axe des  $x$ , de la tangente menée au point  $B$  à la courbe  $C'B$ , c'est-à-dire la valeur particulière que prend  $\frac{dy}{dx}$  en ce point;

$\rho_1$  le rayon de courbure de la courbe  $C'B$ , répondant aux coordonnées  $x_1, y_1$ ;

$Y$  la réaction de l'appui  $B$ .

Si nous prenons un élément  $dx_1$  de la fibre moyenne, dans la partie  $MB$ , l'élément correspondant de la pièce supportera :

1° le poids  $pdx_1$ ; 2° l'excès de pression  $\frac{qdx_1}{g} \cdot \frac{v^2}{\rho_1}$  dû à la force centrifuge. Or on a

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{d^2 y_1}{dx_1^2} \left[ 1 + \left( \frac{dy_1}{dx_1} \right)^2 \right]^{-\frac{3}{2}},$$

ou plus simplement, attendu la faible courbure de la pièce qui rend  $\left( \frac{dy_1}{dx_1} \right)^2$  négligeable devant l'unité,

$$\frac{1}{\rho_1} = \pm \frac{d^2 y_1}{dx_1^2}.$$

Ici, quand on veut avoir la valeur absolue de  $\rho_1$ , c'est le signe — qu'il faut prendre, car la courbe tourne sa concavité du côté des  $y$  négatifs, d'où il résulte que  $\frac{dy_1}{dx_1}$  est décroissant algébri-

quement et  $\frac{d^2 y_1}{dx_1^2}$  négatif. D'ailleurs la petitesse de  $\frac{dy_1}{dx_1}$  autorise à considérer la force centrifuge comme très-sensiblement verticale; la pression totale sur l'élément  $dx_1$  a donc pour valeur

$$p dx_1 - \frac{qv^2 dx_1}{g} \cdot \frac{d^2 y_1}{dx_1^2},$$

ce qui produit dans la section faite en M un moment fléchissant élémentaire

$$\left( p - \frac{qv^2}{g} \cdot \frac{d^2 y_1}{dx_1^2} \right) (x_1 - x) dx_1.$$

Le moment fléchissant total X dans ladite section comprendra l'intégrale de ces moments élémentaires et le moment de Y; ainsi

$$X = -Y(a - x) + \int_x^a \left( p - \frac{qv^2}{g} \cdot \frac{d^2 y_1}{dx_1^2} \right) (x_1 - x) dx_1.$$

L'intégration peut s'effectuer, car on a :

$$\int (x_1 - x) dx_1 = \frac{1}{2} (x_1 - x)^2,$$

$$\int \frac{d^2 y_1}{dx_1^2} (x_1 - x) dx_1 = \frac{dy_1}{dx_1} (x_1 - x) - y_1,$$

et par suite,  $y_1$  étant nul en B,

$$\int_x^a (x_1 - x) dx_1 = \frac{1}{2} (a - x)^2,$$

$$\int_x^a \frac{d^2 y_1}{dx_1^2} (x_1 - x) dx_1 = 0(a - x) + y_1.$$

D'un autre côté, l'équilibre exige que Y soit égal à la somme des pressions exercées sur la demi-pièce C'B; donc

$$Y = \int_0^a \left( p - \frac{qv^2}{g} \cdot \frac{d^2 y_1}{dx_1^2} \right) dx_1,$$

ou, en effectuant immédiatement l'intégration,

$$Y = pa - \frac{qv^2\theta}{g}.$$

La valeur de  $X$  pourra donc s'écrire

$$X = -\left(pa - \frac{qv^2\theta}{g}\right)(a-x) + \frac{1}{2}p(a-x)^2 - \frac{qv^2}{g}[\theta(a-x) + \gamma],$$

soit, après toute réduction,

$$(43) \quad X = -\frac{1}{2}p(a^2 - x^2) - \frac{qv^2}{g}\gamma.$$

L'équation (43) met déjà en évidence un fait assez remarquable : c'est que, dans l'équilibre dont il s'agit, les forces centrifuges développées par la vitesse de la charge  $q$  équivalent à deux forces égales et contraires  $\frac{qv^2}{g}$ , agissant aux extrémités A et B, suivant l'axe primitif AB, et de manière à produire une compression.

Maintenant, afin d'avoir l'équation de la courbe AC'B, appliquons l'équation (9) du n° 47 : elle devient ici

$$(44) \quad er^2 \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{2}p(a^2 - x^2) - \frac{qv^2}{g}y.$$

On cherche d'abord une solution particulière de cette équation différentielle au moyen d'un binôme du second degré de la forme

$$\alpha + \beta x^2,$$

qui, mis à la place de  $y$ , fournit, pour déterminer les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$ , la relation

$$2\beta er^2 = -\frac{1}{2}p(a^2 - x^2) - \frac{qv^2}{g}(\alpha + \beta x^2).$$

Comme il faut que l'identité des deux membres ait lieu indépendamment de la valeur attribuée à  $x$ , on tire de là

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}p - \beta \frac{qv^2}{g} &= 0, \\ 2\beta er^2 &= -\frac{1}{2}pa^2 - \frac{qv^2\alpha}{g}, \end{aligned}$$

et ensuite

$$\beta = \frac{pg}{2qv^2}, \quad \alpha = -\frac{pg^2er^2}{q^2v^4} - \frac{pga^2}{2qv^2}.$$

Cela fait, posons

$$y = \frac{pg}{2qv^2} \left( x^2 - a^2 - \frac{2er^2g}{qv^2} \right) + z,$$

$z$  étant une inconnue auxiliaire; la substitution de cette valeur dans (44) nous donnera

$$\begin{aligned} \frac{er^2pg}{qv^2} + er^2 \frac{d^2z}{dx^2} &= -\frac{1}{2} p (a^2 - x^2) \\ &\quad - \frac{1}{2} p \left( x^2 - a^2 - \frac{2er^2g}{qv^2} \right) - \frac{qv^2}{g} z, \end{aligned}$$

ou, en réduisant,

$$er^2 \frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{qv^2}{g} z.$$

L'intégrale de la dernière équation est connue; nommant  $A$  et  $B$  deux constantes arbitraires, on a

$$z = A \sin \frac{vx}{r} \sqrt{\frac{q}{eg}} + B \cos \frac{vx}{r} \sqrt{\frac{q}{eg}},$$

et par conséquent

$$y = \frac{pg}{2qv^2} \left( x^2 - a^2 - \frac{2er^2g}{qv^2} \right) + A \sin \frac{vx}{r} \sqrt{\frac{q}{eg}} + B \cos \frac{vx}{r} \sqrt{\frac{q}{eg}}.$$

On déterminera  $A$  et  $B$  par la double condition d'avoir  $\frac{dy}{dx} = 0$  pour  $x = 0$ , et  $y = 0$  pour  $x = a$ ; d'où résulte

$$A = 0, \quad B = \frac{pg^2er^2}{q^2v^4} \cdot \frac{1}{\cos \frac{va}{r} \sqrt{\frac{q}{eg}}}.$$

Donc enfin nous pourrons écrire

$$(45) \quad y = \frac{pg}{2qv^2} (x^2 - a^2) + \frac{pg^2er^2}{q^2v^4} \left\{ \frac{\cos \frac{vx}{r} \sqrt{\frac{q}{eg}}}{\cos \frac{va}{r} \sqrt{\frac{q}{eg}}} - 1 \right\}.$$

La flèche  $f = \overline{CC'}$  s'obtient en faisant  $x = 0$  dans l'équation (45); on en déduit

$$(46) \quad f = -\frac{pga^2}{2qv^2} + \frac{pg^2er^2}{q^2v^4} \left( \frac{1}{\cos \frac{va}{r} \sqrt{\frac{q}{eg}}} - 1 \right).$$

Il est encore intéressant de connaître le maximum absolu du moment fléchissant  $X$ : d'après l'équation (43) ce maximum répond à  $x = 0$  et a pour valeur

$$X_0 = \frac{1}{2} pa^2 + \frac{qv^2f}{g} = \frac{1}{2} pa^2 \left( 1 + \frac{2qv^2f}{pga^2} \right).$$

La quantité  $\frac{1}{2} pa^2$  exprimerait le moment fléchissant maximum si la vitesse  $v$  s'annulait; donc  $1 + \frac{2qv^2f}{pga^2}$  exprime le nombre  $n$  par lequel on doit multiplier ce moment pour tenir compte de l'accroissement dû à  $v$ . Ainsi

$$n = 1 + \frac{2qv^2f}{pga^2},$$

ou, en mettant à la place de  $f$  sa valeur (46),

$$n = \frac{2er^2g}{qv^2a^2} \left( \frac{1}{\cos \frac{va}{r} \sqrt{\frac{q}{eg}}} - 1 \right);$$

ce qu'on peut encore écrire

$$(47) \quad n = \frac{2}{u^2} \left( \frac{1}{\cos u} - 1 \right),$$

si l'on pose, pour abréger,

$$u = \frac{va}{r} \sqrt{\frac{q}{eg}}.$$

L'égalité (47) permettra de calculer le rapport  $n$  quand on



donnera l'arc  $u$ , ou inversement. Par exemple, pour  $u = \frac{\pi}{4}$ , on trouve  $n = 1,343$ ; cela ferait un accroissement relatif de  $\frac{1}{3}$  environ dans le moment fléchissant maximum et dans les pressions ou tensions longitudinales correspondantes, ce qui ne semble pas avoir d'inconvénients bien sérieux en pratique, parce que la matière des poutres construites ne doit supporter, sous l'action des charges mortes, que  $\frac{1}{6}$  au plus de la tension produisant la rupture (*voir* le chapitre suivant). On pourrait donc poser avec assez de sécurité

$$\frac{va}{r} \sqrt{\frac{q}{eg}} = \frac{\pi}{4},$$

ou bien

$$\frac{qv^2}{g} = \frac{er^2\pi^2}{16a^2},$$

ce qui donnerait une limite des valeurs non dangereuses de la force vive  $\frac{qv^2}{g}$  que possède le convoi roulant, sur chaque unité de longueur. Avec  $u = \frac{\pi}{2}$ , au contraire, soit pour une valeur de  $\frac{qv^2}{g}$  quadruple de la précédente et représentée en conséquence par  $\frac{er^2\pi^2}{4a^2}$ , le rapport  $n$  deviendrait infini, de sorte que la poutre se romprait. Ce résultat est conforme à la théorie des pièces chargées debout, car on sait (n° 89) qu'une compression  $\frac{er^2\pi^2}{4a^2}$  agissant seule suivant l'axe mettrait la pièce en danger, et l'on a vu tout à l'heure que les forces centrifuges équivalent à une compression suivant l'axe, ayant pour intensité  $\frac{qv^2}{g}$ .

Tous ces calculs supposent que la poutre reste en équilibre sous une charge uniformément répartie, dont une portion

forme un convoi roulant, sans cesse renouvelé. Cela se produirait assez exactement si le convoi placé d'abord sans vitesse au-dessus de la poutre prenait ensuite une vitesse très-lentement croissante, jusqu'à la valeur finale  $v$ . On pourrait alors négliger les forces d'inertie tangentielles du convoi, et la poutre tendrait à prendre peu à peu la forme d'équilibre que nous avons calculée; comme de plus elle y arriverait sans vitesse sensible, elle ne s'en écarterait plus après qu'elle l'aurait atteinte. Mais ce n'est point ainsi que les choses se passent généralement. La poutre étant en équilibre sous sa charge permanente  $(p - q) l$ , le convoi, pesant  $q$  par unité de longueur, arrive avec toute sa vitesse  $v$  antérieurement acquise; il s'engage progressivement au-dessus de la poutre et finit par la couvrir entièrement, s'il est assez long; puis au bout d'un certain temps son extrémité d'arrière ayant passé à son tour, la poutre continue à osciller en vertu du mouvement qu'elle vient de recevoir et de son inertie jointe à celle de la charge permanente. Nous pouvons bien encore dire qu'elle tend à prendre, pendant le passage du convoi, la forme d'équilibre représentée par l'équation (45); mais elle aura de la vitesse au moment où elle l'atteindra, et par suite elle ira au delà. Il n'en résulte pas moins, cependant, que la flèche cesserait d'être petite si  $\frac{qv^2}{g}$  prenait la valeur  $\frac{er^2\pi^2}{4a^2}$ , puisque ce fait a déjà lieu en supposant que la poutre s'arrête à la position d'équilibre, tandis que, en réalité, elle va plus loin : il serait donc dangereux, en tout cas, de laisser  $\frac{qv^2}{g}$  croître jusqu'à la limite dont il s'agit. Quant à la limite quatre fois moindre, qui produisait tout à l'heure un accroissement relatif de  $\frac{1}{3}$  dans le moment fléchissant maximum, elle pourra produire, eu égard aux oscillations de la poutre, un accroissement plus grand; mais en admettant, par analogie avec d'autres exemples, que l'accroissement doit être doublé (nos 139, 140 et 144) et même, au besoin, triplé, il n'y aurait là rien d'inquiétant pour la stabilité, à moins que la limite des tensions, calculée dans l'hypothèse d'une charge

morte, ne fût déjà très-élevée et sensiblement supérieure aux chiffres habituellement admis.

Les augmentations des moments de flexion, qui ont lieu quand une partie de la charge prend une certaine vitesse, étant produits par les forces d'inertie centrifuges, un bon moyen pratique d'en atténuer, et souvent d'en faire disparaître les effets, consisterait à établir primitivement la poutre avec une fibre moyenne légèrement arquée en dessus de l'horizontale : cette fibre tendrait alors à se redresser pendant le passage des convois, et si elle ne devenait pas concave en sens inverse de la courbe de pose, les forces centrifuges ne pourraient que diminuer la pression statique.



## CHAPITRE SEPTIÈME.

### RÉSULTATS D'EXPÉRIENCES SUR L'ÉLASTICITÉ DES MATÉRIAUX.

#### § I. — Extension.

146. *Précautions à prendre dans les expériences.* — On conçoit facilement comment peuvent se faire des expériences sur l'extension des matériaux. Un prisme, suspendu par l'une de ses extrémités, soutient à l'autre un plateau de balance, dans lequel on met des poids. Pour chaque poids total mis dans la balance, on tient note de l'allongement correspondant. On augmente successivement la charge jusqu'à produire la rupture; mais avant d'arriver à ce point, on peut laisser chaque charge plus ou moins longtemps dans la balance, pour constater l'influence du temps sur l'étendue du phénomène; on peut aussi observer les effets qui subsistent après l'enlèvement de la charge.

Les précautions à prendre dans l'exécution de ces expériences sont les suivantes : 1°. Quand les allongements sont mesurés simplement en constatant le déplacement vertical que prend l'extrémité inférieure du prisme, il faut que les points d'appui soient aussi résistants que possible; sans cela ils céderaient à l'action de la charge, et la mesure des allongements serait entachée d'erreur. Cette cause d'incertitude pourrait être évitée si l'on mesurait le déplacement relatif de deux points du prisme primitivement séparés par une distance connue. 2°. Les poids doivent être posés très-doucement dans le plateau, et même il faut soutenir celui-ci pendant que l'allongement se produit. On a vu en effet, dans divers exemples traités au chapitre VI, que, même en faisant agir la charge sans vitesse initiale, l'allongement statique pourrait être doublé, et cette proportion serait même dépassée si les poids qu'on met dans le plateau tombaient d'une certaine hauteur. 3°. Lorsqu'on

opère sur un prisme qui n'a pas de petites dimensions transversales, et qui, en conséquence, n'est pas très-flexible, il faut que la résultante des charges passe bien par la fibre moyenne du prisme. Si cette condition n'était pas remplie, on sait (§ IV du chapitre I<sup>er</sup>) que la tension et l'allongement de la fibre moyenne resteraient néanmoins les mêmes ; seulement la flexion qui se produirait alors, en même temps que l'extension, déterminerait en certains points des actions moléculaires plus fortes, et la rupture se produirait sous une charge moindre.

147. *Expériences sur l'extension du fer.* — Le fer est la matière qui a été le plus essayée ; elle se classe en effet parmi les plus utiles, à cause de sa grande résistance, et l'attention devait naturellement se porter sur ses propriétés. Parmi les ingénieurs ou physiciens qui s'en sont occupés, on peut citer en particulier Duleau et M. Eaton Hodgkinson. Les expériences de ce dernier sont plus multipliées et plus complètes. Nous citons ci-après une série de ces expériences faites sur une tige en fer forgé de la meilleure qualité. La tige ayant environ 15 mètres de longueur totale, afin de rendre sensibles les allongements à mesurer, était formée de plusieurs parties réunies au moyen de manchons ; sa section était, en millimètres carrés, environ 135<sup>mm</sup>,4. Pour chaque charge, on mesurait d'abord l'allongement total ; puis on enlevait la charge afin de constater l'allongement permanent qui pouvait subsister ; la différence de ces deux quantités est ce qu'on nomme *allongement élastique*. Le coefficient d'élasticité longitudinale est égal, comme l'on sait (n° 12), au quotient obtenu en divisant la charge rapportée à l'unité de surface par l'allongement rapporté à l'unité de longueur ; ordinairement on l'exprime en prenant le mètre carré pour unité de surface et le kilogramme pour unité de force. Dans le tableau ci-après, les charges sont exprimées en multiples de 1<sup>kg</sup>,87 par millimètre carré ; les allongements, en millièmes de la longueur primitive. Ce tableau, sauf quelques simplifications et quelques détails complémentaires, est emprunté aux *Leçons de Mécanique pratique (Résistance des Matériaux)*, par M. le général A. Morin.

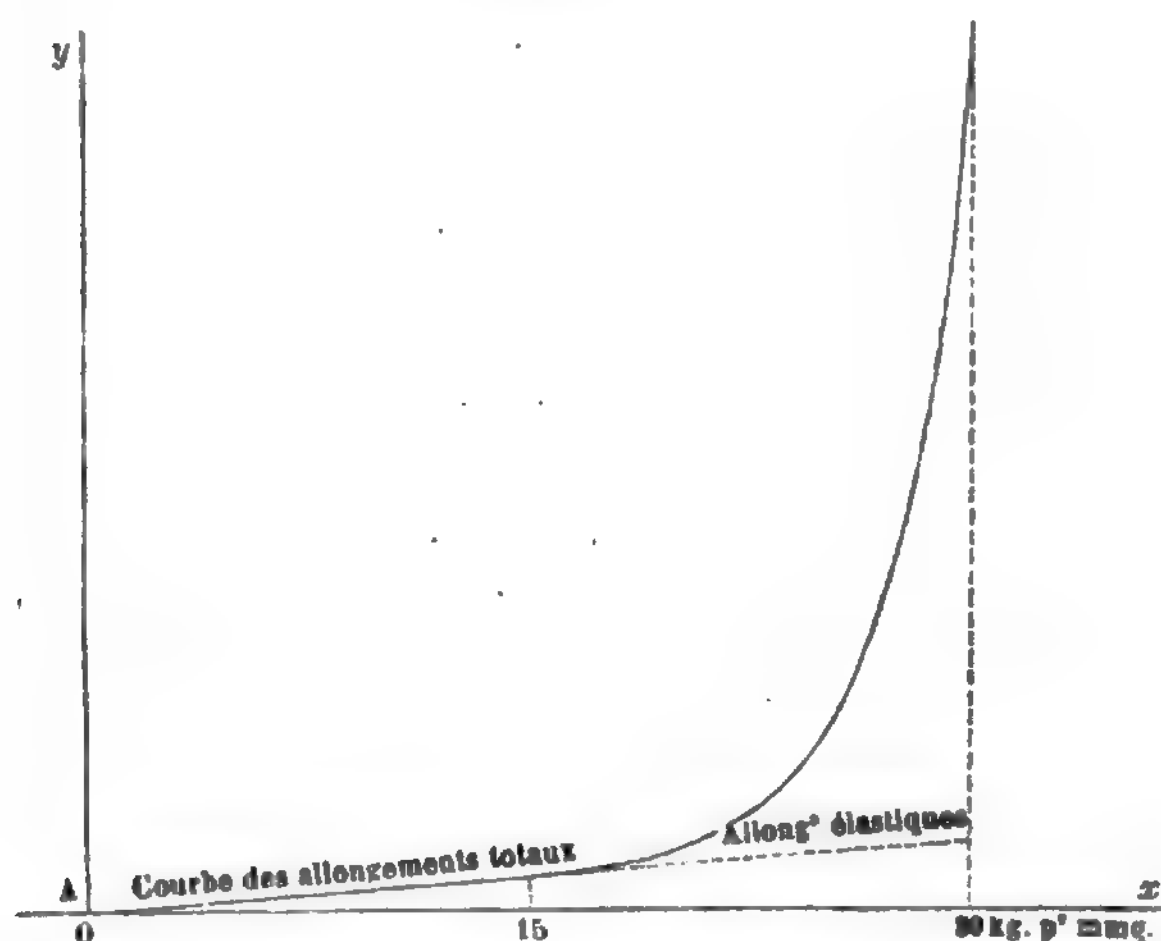
**Expériences pour déterminer les allongements d'une barre de fer,  
sous divers poids.**

CHARGES par millimètre carré.	NOMBRES propor- tionnels aux charges.	ALLONGEMENTS RELATIFS exprimés en millièmes de la longueur primitive.			QUOTIENT DE LA CHARGE rapportée au mètre carré, divisée par l'allongement relatif.	
		Total.	Permanent	Élastique	Total.	Elastique.
1,87	1	0,082	"	0,082	$10^8 \times 22,8$	$10^8 \times 22,8$
3,75	2	0,185	"	0,185	20,2	20,2
5,62	3	0,284	0,003	0,281	19,8	20,0
7,50	4	0,380	0,003	0,377	19,8	19,9
9,37	5	0,475	0,004	0,471	19,7	19,9
11,25	6	0,571	0,005	0,566	19,7	19,9
13,12	7	0,666	0,007	0,659	19,7	19,9
15,00	8	0,760	0,010	0,750	19,3	20,0
16,87	9	0,873	0,033	0,840	19,3	20,1
18,75	10	1,013	0,083	0,930	18,4	20,2
20,64	11	1,283	0,262	1,021	16,1	20,2
22,50	12	2,360	1,130	1,230	9,5	18,1
24,37	13	4,287	3,071	1,216	5,6	20,0
26,25	14	9,951	8,574	1,377	2,9	19,1
28,12	15	10,493	9,102	1,391	2,7	20,0
la même après 1 <sup>b</sup>	"	11,750	"	"	2,4	"
— 3	"	11,934	"	"	2,4	"
— 5	"	11,959	"	"	2,4	"
— 7	"	12,027	"	"	2,3	"
— 10	"	12,027	"	"	2,3	"
30,00	16	17,888	16,515	1,373	1,7	21,8
"	"	20,220	18,889	1,331	1,5	22,5
31,87	17	21,486	19,795	1,691	1,5	18,9
"	"	21,702	"	"	1,5	"
33,75	18	24,774	22,709	2,065	1,4	16,3
"	"	25,225	"	"	1,3	"
35,62	19	34,935	32,820	2,115	1,0	17,0
"	"	35,202	"	"	1,0	"
37,46	20	rupture de la tige.		"	"	"



Si, pour rendre plus sensibles les résultats du tableau précédent, nous portons sur un axe  $Ax$  (*fig. 60*) les charges par

Fig. 60.



millimètre carré, et en ordonnées parallèles à  $Ay$  les allongements totaux ou élastiques, après avoir corrigé quelques irrégularités qui viennent sans doute des erreurs d'expérience, nous constaterons :

Que les allongements totaux du fer sont sensiblement proportionnels aux charges tant que celles-ci ne dépassent pas la limite de 15 kilogrammes par millimètre carré ; que, au delà de cette limite, les allongements totaux croissent suivant une loi qui devient progressivement beaucoup plus rapide, de telle sorte que le coefficient d'élasticité devient à la fin quinze ou vingt fois plus petit qu'au commencement ;

Que les allongements élastiques restent toujours à peu près proportionnels aux charges, même quand celles-ci se rapprochent de celle qui entraîne la rupture immédiate ;

Que la valeur du coefficient d'élasticité longitudinale  $E$ , pour l'extension du fer, est en nombres ronds de  $2 \cdot 10^{10}$ , le mètre carré étant pris pour unité de surface et le kilogramme pour unité de force.

L'ensemble des expériences de M. Hodgkinson a confirmé

ces résultats. Voici encore d'autres propriétés qui ont été observées par ce physicien. Les charges les plus faibles donnent lieu, dans le fer, à une déformation permanente; mais on voit que les allongements permanents sont très-petits tant que les allongements totaux restent proportionnels aux charges. En effet, pour la charge de 15 kilogrammes par millimètre carré, l'allongement permanent n'est encore que 0,01 de millimètre par mètre, soit  $\frac{1}{76}$  de l'allongement total. Un caractère remar-

quable de cet allongement permanent, c'est qu'il n'augmente plus lorsque, après avoir laissé reposer quelque temps la barre, on la soumet de nouveau à une traction plus faible. Ainsi une barre de fer, de 10 mètres de longueur primitive, ayant été soumise à une traction de 22<sup>k</sup>,5 par millimètres carré, conservera, après l'enlèvement de la charge, une longueur de 10<sup>m</sup>,0113, d'après le tableau ci-dessus; cette barre de 10<sup>m</sup>,0113, soumise ensuite à de nouvelles tensions moindres que 22<sup>k</sup>,5 par millimètre carré, reprendra toujours la longueur de 10<sup>m</sup>,0113 après l'enlèvement de la charge, et éprouvera pour chaque tension un allongement proportionnel à cette tension, pourvu, bien entendu, que dans la mesure de l'allongement on considère 10<sup>m</sup>,0113 comme la longueur primitive. Il y a donc dans le fait de soumettre une barre à une certaine tension en quelque sorte une fabrication nouvelle qui, comme le martelage ou le passage au laminoir, change dans une certaine mesure les qualités physiques du métal.

148. *Remarques sur les résultats précédents. Limites dans lesquelles on peut appliquer les formules de la Résistance des Matériaux.* — Anciennement on admettait que tout corps soumis à une force reprenait sa forme primitive quand la force cessait d'agir, pourvu que cette force fût en dessous d'une certaine limite. C'est en cela qu'on faisait consister l'élasticité de la matière, et l'on disait que la limite de l'élasticité se trouvait dépassée quand, après la suppression de la force, il y avait un retour incomplet vers la forme primitive. Aujourd'hui, cette notion de la limite d'élasticité ne peut plus être admise en toute rigueur, puisqu'il y a toujours après l'action d'une force une

déformation permanente. Le retour incomplet vers la forme primitive après l'action d'une certaine force ne prouve pas que la matière ait perdu son élasticité, mais seulement que la force a dépassé la limite de celles auxquelles on avait précédemment soumis le corps dans des circonstances analogues, ce qui en fait un corps nouveau ayant ses molécules dans un état d'équilibre différent du premier.

Les formules fondamentales de la Résistance des Matériaux reposent sur plusieurs hypothèses, et entre autres sur celle de la proportionnalité des allongements et des forces qui les produisent. En ce qui concerne le fer, on voit que cette proportionnalité existe en effet pour des charges bien supérieures à celles que les constructeurs regardent comme limites des efforts auxquels on peut soumettre les pièces de fer; mais quand on se rapproche du point de rupture, la loi change complètement, et les allongements croissent dans une proportion bien plus rapide que les charges.

Ces remarques sont importantes. Souvent on donne aux formules théoriques de la Résistance des Matériaux une généralité qu'elles ne doivent pas avoir, en continuant de les appliquer quelles que soient les tensions intérieures des pièces que l'on considère. C'est ainsi qu'on détermine le poids qui, suspendu au milieu d'une poutre reposant sur deux appuis, serait capable de la rompre, en exprimant par le calcul que la tension longitudinale maximum des fibres atteint la limite indiquée par l'expérience pour produire la rupture. Mais, dans cette question et dans toutes les applications analogues qu'on pourrait imaginer, on oublie que l'expression de la tension maximum repose sur l'hypothèse de la proportionnalité entre les tensions et les allongements, laquelle cesse d'être vraie dans les environs de la rupture. Il n'y a donc pas lieu de s'étonner, quand on procède ainsi, du désaccord entre les données de l'expérience et les résultats du calcul, car il y aurait lieu plutôt de s'étonner du fait contraire; et les reproches qui, pour cette cause, ont été adressés à la théorie, paraissent en réalité peu fondés. Les formules ne doivent être soumises à la vérification expérimentale qu'en se tenant dans de justes limites quant à la grandeur des déformations et des forces moléculaires

prises en jeu ; nous ne croyons pas, moyennant cette restriction, que l'expérience soit venue les démentir, et nous pourrions au contraire citer bien des faits pour les confirmer, comme la suite le montrera.

149. *Expérience sur l'extension de la fonte.* — M. Hodgkinson a constaté pour l'extension de la fonte des propriétés tout à fait analogues à celles qu'on a vues au sujet du fer. Il se produit toujours, même pour les charges les plus faibles, un allongement permanent qui subsiste après l'enlèvement de la charge. La proportionnalité entre les allongements et les tensions subsiste assez approximativement jusqu'à une charge moitié de celle qui produirait la rupture immédiate ; elle subsisterait même au delà si l'on ne considérait que les allongements élastiques.

D'après les résultats moyens des expériences de M. Hodgkinson, le coefficient d'élasticité longitudinale pour l'extension de la fonte serait environ de  $9 \cdot 10^9$ . Précédemment on admettait le chiffre de  $12 \cdot 10^9$  ; M. Stephenson a proposé  $8 \cdot 10^9$  ; enfin, il y a quelques années, MM. Desplaces et Collet-Meygret ont attribué à ce coefficient, dans les arcs du viaduc de Tarascon, la valeur de  $6 \cdot 10^9$ , et, d'après leurs expériences, ce ne serait là qu'une moyenne de nombres variant depuis  $3 \cdot 10^9$  jusqu'à  $12 \cdot 10^9$ . Des divergences aussi considérables ne viennent pas sans doute uniquement de la différence d'origine des fontes essayées, laquelle a cependant une influence marquée sur une matière de propriétés physiques aussi changeantes. Suivant MM. Desplaces et Collet-Meygret, il y aurait en réalité dans toute pièce de fonte de dimensions transversales un peu fortes deux métaux essentiellement différents : le métal extérieur, occupant la surface de la pièce sur une profondeur de quelques millimètres, et le métal intérieur. Le premier, refroidi plus rapidement par le contact du moule au moment du coulage, serait plus dur, plus dense, doué d'un coefficient plus considérable que le second, pour lequel le resserrement des molécules aurait été gêné et contrarié par l'enveloppe déjà refroidie. En admettant cette distinction comme fondée, on comprend aisément que l'essai d'une pièce mince fasse attribuer une valeur

plus forte au coefficient d'élasticité longitudinale de la fonte que l'essai d'une pièce à grande épaisseur ; car dans le premier cas l'influence du métal extérieur serait dominante, et dans le second elle serait plus ou moins effacée.

Il est bien difficile, quand on doit faire des calculs sur les déformations d'une pièce de fonte, de fixer à priori la valeur exacte du coefficient dont il s'agit. Suivant que la pièce aura des épaisseurs faibles, moyennes ou fortes, il conviendra de se rapprocher des nombres  $12 \cdot 10^9$ ,  $9 \cdot 10^9$ ,  $6 \cdot 10^9$ , à défaut de données plus précises. Mais il vaudrait mieux faire quelques expériences directes sur des morceaux analogues, pour les dimensions et la provenance, avec ceux qu'on doit définitivement employer. D'ailleurs si l'on avait besoin de connaître le coefficient d'élasticité longitudinale maximum dans une section, il serait assez plausible de le supposer toujours égal à  $12 \cdot 10^9$ .

150. *Expériences sur l'extension des bois.* — Les résultats suivants ont été donnés par MM. Chevandier et Wertheim, comme conséquence de nombreux essais :

1°. La densité d'un bois varie peu avec l'âge ; mais le coefficient d'élasticité longitudinale  $E$  diminue à partir d'un certain âge ; il dépend, en outre, de la sécheresse, de l'exposition et de la constitution géologique du terrain. Il est plus grand pour les expositions nord, nord-est, nord-ouest et pour les terrains secs, toutes choses étant égales d'ailleurs.

2°. La résistance à l'extension est soumise à des influences analogues.

3°. Les arbres coupés en pleine sève et ceux d'une même essence qui sont coupés avant la sève, ont à peu près la même élasticité.

4°. L'épaisseur des couches ligneuses n'a pas d'influence notable sur le coefficient d'élasticité longitudinale, excepté quand il s'agit du sapin ; la valeur de ce coefficient est d'autant plus grande, que l'épaisseur des couches est plus petite.

5°. Il se produit toujours un allongement permanent en même temps qu'un allongement élastique.

Quant à la valeur du coefficient d'élasticité longitudinale



pour l'extension des bois, elle est naturellement très-variable, suivant les essences et les circonstances particulières qui influent sur la qualité de chaque échantillon. Dans le cas du chêne et du sapin, on a trouvé généralement  $E$  variable de  $9.10^8$  à  $12.10^8$ ; mais ces chiffres sont loin d'être absolus, et nous ne les citons que pour donner une idée de l'ordre de grandeur du nombre dont nous parlons.

**151. Résistance de diverses matières à l'extension ; limites pratiques de la tension longitudinale par unité de surface. —**

La résistance du fer à la rupture par extension est assez variable avec la nature des fers essayés et leur mode de fabrication. Certains fils de fer de très-bonne qualité peuvent ne se rompre que sous une charge de 90 kilogrammes par millimètre carré, tandis que 25 suffiraient pour des fers en barre médiocres et de gros échantillon. On peut admettre comme charges moyennes produisant la rupture par extension des pièces en fer :

70 <sup>kil</sup>	pour le fil de fer, les limites extrêmes étant	50 et 90
40 <sup>kil</sup>	pour le fer en barre.....	25 et 60
38 <sup>kil</sup>	pour la tôle.....	35 et 40

La tôle est, comme on le voit, sujette à des variations moins considérables.

Lorsqu'il s'agit de la fonte, il faut s'attendre à trouver des variations encore bien plus grandes que pour le fer. M. Hodgkinson a reconnu que la rupture s'opérait pour des charges comprises entre 9 et 14 kilogrammes par millimètre carré; la section des barres essayées était de 10 centimètres carrés au moins et de 26 au plus. MM. Minard et Desormes, en 1815, avaient indiqué un chiffre sensiblement égal à la moyenne de M. Hodgkinson. Mais ces chiffres paraissent devoir être considérablement diminués dans le cas de dimensions transversales assez fortes. Ainsi, dans la construction du pont tubulaire sur le détroit de Menai, le fond du cylindre d'une presse hydraulique s'est détaché sous une tension qui ne dépassait guère 2 kilogrammes par millimètre carré. Une aussi grande



réduction de résistance tenait sans doute d'abord à l'épaisseur des parois latérales du cylindre, qui allait jusqu'à 0<sup>m</sup>,254. Il y a probablement ici une influence analogue à celle que nous avons signalée précédemment en nous occupant du coefficient d'élasticité E (n° 149). Peut-être aussi n'avait-on pas assez pris soin d'éviter les inégalités d'épaisseur des parties adjacentes, ce qui donne souvent lieu à des défauts intérieurs dans la pièce, au moment où elle se solidifie dans le moule qui a servi à la couler.

Parmi les bois de construction ordinaire, le chêne et le sapin du Nord se rompent par extension sous des charges de 6 à 9 kilogrammes par millimètre carré; pour le sapin des Vosges, ce chiffre est réduit à 4 kilogrammes environ.

On n'a point déterminé jusqu'à présent d'une manière bien précise les limites que peut atteindre la tension longitudinale permanente des matériaux de diverses natures dans les constructions. Les expériences sont en effet difficiles, à cause de l'influence mal connue de la durée des efforts, ce qui exigerait qu'on les prolongeât pendant des années; cette difficulté s'augmente encore à cause de la variété infinie de circonstances secondaires que présente la pratique. Quand il s'agit des métaux, on recommande en général d'adopter comme limite des tensions permanentes  $\frac{1}{6}$  de celle qui entraîne la rupture im-

médiate, et d'aller à  $\frac{1}{10}$  au plus pour les autres matières. Ce que

l'on doit dire pour justifier ces chiffres, c'est que l'habitude et le sentiment des constructeurs les ont consacrés, et que d'assez nombreuses applications sur les échelles très-variées n'ont pas encore fait reconnaître l'utilité de les modifier. On verra cependant plus loin que le rapport de  $\frac{1}{6}$  ne donne pas une sécurité exagérée, au moins quand on emploie la fonte.

Les rapports ci-dessus  $\frac{1}{6}$  et  $\frac{1}{10}$  sont observés non-seulement quand il s'agit de l'extension simple, mais aussi des diverses natures d'actions que nous allons passer successivement en revue.

## § II. — Compression.

152. *Élasticité longitudinale du fer et de la fonte comprimés.* — Les expériences faites par M. Hodgkinson sur la compression du fer et de la fonte ont donné divers résultats analogues à ceux qu'on a déjà vus tout à l'heure, au sujet de l'extension. Ainsi tant que la charge d'une barre de fer ne dépasse pas 15 à 18 kilogrammes par millimètre carré, les raccourcissements restent sensiblement proportionnels aux charges qui les produisent; mais au delà les raccourcissements croissent suivant une loi de plus en plus rapide. Les charges les plus faibles donnent lieu à un raccourcissement permanent, qui subsiste après la charge, mais qui n'est qu'une petite fraction du raccourcissement total, tant que la charge est elle-même peu considérable.

Le coefficient d'élasticité longitudinale du fer, relatif à la compression, serait, d'après l'expérimentateur que nous citons, un peu inférieur à celui de l'extension, et la différence relative serait de 15 à 20 pour 100 environ. Pour la fonte, l'inégalité subsisterait dans le même sens, mais serait de quelques centièmes seulement. Le fait dont il s'agit n'est pas encore établi d'une manière bien irrécusable; il a d'ailleurs peu d'importance pratique. On peut donc toujours admettre l'égalité des deux coefficients d'élasticité longitudinale; ce qui ne signifie pas, comme on le dit quelquefois, que la charge de rupture est la même dans les deux cas de l'extension et de la compression.

On connaît peu d'expériences entreprises dans le but de mesurer spécialement le coefficient d'élasticité longitudinale, relatif à la compression, pour d'autres matières que le fer et la fonte. D'autres exemples de l'inégalité dont nous venons de parler n'ont été signalés par aucun observateur.

153. *Généralités sur la rupture par compression; deux cas à distinguer.* PREMIER CAS. — On comprend difficilement au premier abord comment un corps peut se rompre par compression. La rupture, en effet, consiste dans la séparation des diverses molécules, et il semble que la compression ne peut

produire cet effet, puisqu'elle tend au contraire à les rapprocher les unes des autres. Cela serait vrai s'il n'y avait qu'une compression simple telle que nous l'avons étudiée au commencement du Cours (n° 12 et 13); mais la compression est presque toujours accompagnée d'effets secondaires, et c'est à eux qu'est due la disjonction des parties, quand les forces deviennent assez grandes. Ainsi, par exemple, dans le cas d'un prisme de longueur notable, chargé suivant son axe, la charge en croissant progressivement finira par produire la flexion du prisme (n° 89); alors il y aura des fibres tendues et la rupture pourra s'ensuivre. Si la longueur du prisme est trop faible pour que la flexion soit possible (n° 89), on observe que la compression longitudinale est accompagnée d'une dilatation latérale, et de déformation par glissement de certaines parties relativement à d'autres, ce qui finit par amener la division du corps en plusieurs fragments.

Les explications précédentes n'ont pas seulement pour but de faire comprendre la possibilité de la rupture par compression; elles montrent en outre qu'il y a deux cas essentiellement différents à distinguer, parce que la cause de rupture n'y est point la même. Ces deux cas sont : 1° celui de la rupture par compression d'un prisme trop court pour fléchir sous l'action d'une force dirigée suivant son axe; 2° celui de la rupture par compression d'un prisme dont la longueur est assez considérable pour rendre la flexion possible.

Dans le premier cas, la charge capable de produire l'écrasement est indépendante de la longueur et proportionnelle à la section transversale. Elle est de 25 kilogrammes environ par millimètre carré quand il s'agit du fer; s'il s'agit de la fonte, d'après M. Hodgkinson, le chiffre est moyennement de 63 kilogrammes par millimètre carré, c'est-à-dire cinq fois et demie ce que nous avons indiqué pour l'extension (n° 151) : ces nombres sont d'ailleurs très-variables. Suivant Rondelet, le chêne et le sapin du Nord s'écraseraient sous une charge de 4 kilogrammes à 4<sup>kil</sup>,5 par millimètre carré; mais cette résistance peut être augmentée par la dessiccation, ainsi que M. Hodgkinson l'a constaté; et même l'augmentation peut aller jusqu'à doubler le chiffre relatif à certaines essences de bois.

Les pierres et les maçonneries ont donné des résultats extrêmement variables. Nous reproduirons plus loin, dans le recueil des tables numériques, quelques chiffres bons à connaître.

154. DEUXIÈME CAS : *rupture par compression des prismes qui peuvent fléchir.* — On a déjà vu (n° 89) quelle est la condition théorique nécessaire pour qu'un prisme puisse fléchir sous l'action d'une force dirigée suivant la fibre moyenne. En appelant :

$2a$  la longueur du prisme ;

$r$  le rayon de gyration de la section transversale relativement à l'axe autour duquel s'opère la flexion ;

$E_1$  le plus grand coefficient d'élasticité longitudinale pour une fibre quelconque du prisme ;

$R_2$  la compression par unité de surface capable de produire l'écrasement ;

$\pi$  le rapport de la circonférence au diamètre ;

il faut que l'on ait

$$2a > \pi r \sqrt{1 + \frac{E_1}{R_2}};$$

on doit d'ailleurs choisir pour axe de flexion celui qui donne le minimum de  $r$ , car c'est lui autour duquel la flexion est la plus facile, et auquel correspond la plus petite limite inférieure de la longueur  $2a$ . Ainsi quand la base est un rectangle homogène dont la plus petite dimension est  $h$ , il faut prendre

$r = h \sqrt{\frac{1}{12}} = 0,29h$  ; quand la base est un cercle homogène de diamètre  $d$ , on a  $r = 0,25d$ .

On s'est peu préoccupé de déterminer expérimentalement la limite inférieure dont nous parlons. Seulement M. Hodgkinson a énoncé ce fait : tant que la longueur d'une barre de fonte carrée ou circulaire ne dépasse pas cinq fois le diamètre, la rupture se fait par écrasement simple ; quand la longueur est de cinq à vingt-cinq fois le diamètre, il y a rupture mixte, à la fois par écrasement et par flexion ; au delà de vingt-cinq fois le diamètre, la flexion devient irrésistible. Or, si dans la for-

mule rappelée tout à l'heure, on fait  $r = 0,29h$ ,  $E_1 = 12 \cdot 10^8$ ,  $R_1 = 63 \cdot 10^6$  (nos 149 et 153), on trouve  $2a > 12h$ , résultat qui concorde assez bien avec l'indication de M. Hodgkinson; ce résultat varierait d'ailleurs avec les échantillons de fonte, par le changement des nombres  $E_1$  et  $R_1$ .

Quand un corps de forme prismatique a une longueur assez longue pour commencer à fléchir avant de s'écraser, si la charge acquiert une intensité suffisante pour que la flexion puisse exister en effet, on sait (n° 89) qu'un faible supplément de charge peut entraîner un grand accroissement de flèche, et par conséquent la rupture de la pièce. Ainsi donc, si l'on désigne par  $e$  le ressort longitudinal du prisme (n° 13), la moindre charge capable de maintenir la pièce fléchie étant exprimée par  $\frac{er^2\pi^2}{4a^2}$  (n° 89), ce sera là aussi l'expression théorique de la charge de rupture, puisqu'on ne saurait la dépasser d'une manière sensible sans très-grand danger. Dans le cas d'une section transversale homogène, ayant la forme d'un cercle plein, de diamètre  $d$ , on aurait  $er^2 = \frac{1}{64} \pi E d^4$ ; dans le cas d'une section rectangulaire homogène,  $h$  étant son petit côté et  $l$  le grand, on aurait  $er^2 = \frac{1}{12} E l h^3$ . Par conséquent la force  $N$  capable de produire la rupture serait exprimée théoriquement par

$$\frac{1}{256} \pi^3 E \frac{d^4}{a^2}, \text{ pour la section circulaire;}$$

$$\frac{1}{48} \pi^3 E \frac{l h^3}{a^2}, \text{ pour la section rectangulaire.}$$

Il est indispensable de se rappeler que l'expression  $\frac{er^2\pi^2}{4a^2}$  de la force de rupture a été obtenue dans l'hypothèse où les sections extrêmes de la pièce ne seraient pas encastrees, et pourraient au contraire tourner librement, tout en conservant leur centre sur la direction même de l'effort total de compression. Dans le cas où l'encastrement existerait et empêcherait rigoureusement toute rotation des sections extrêmes, la force de



rupture serait quadruplée (n° 90). Or, ce dernier cas se rapproche peut-être plus que l'autre des circonstances pratiques les plus ordinaires; car les poteaux et colonnes sont toujours terminés par des surfaces plates s'appuyant aussi sur des plans, en sorte que l'étendue même de ces surfaces d'appui s'oppose plus ou moins complètement à leur rotation et constitue tout au moins un encastrement partiel. L'expérience confirme cette manière de voir. M. Hodgkinson a trouvé en effet que les colonnes de fonte à extrémités arrondies résistaient trois fois moins à la rupture par compression que celles dont les extrémités présentaient une section plane. Ainsi donc, en admettant la substitution de ce multiplicateur 3 au multiplicateur théorique 4, pour tenir compte par aperçu de l'imperfection de l'encastrement, on aurait, dans le cas des bases plates :

$$N = \frac{3}{256} \pi^3 E \frac{d^4}{a^2}, \text{ pour la section circulaire, pleine et homogène;}$$

$$N = \frac{1}{16} \pi^2 E \frac{lh^3}{a^2}, \text{ pour la section rectangulaire, également pleine et homogène.}$$

A la vérité, comme nous l'avons déjà fait observer (n° 148), on ne doit pas compter sur l'exactitude des formules théoriques lorsqu'il s'agit de calculer les forces de rupture; néanmoins M. Hodgkinson a reconnu que la charge capable de rompre un poteau de chêne, à section rectangulaire et à bases plates, était représentée par la formule empirique

$$N = 2565 \cdot 10^6 \frac{lh^3}{4a^2},$$

le kilogramme et le mètre étant pris pour unités. On voit que  $N$  varie proportionnellement à  $l$  et au cube de  $h$ , et en raison inverse du carré de la longueur  $2a$ , comme l'indique la théorie; de plus, en comparant la valeur de la constante  $\frac{2565 \cdot 10^6}{4}$  avec l'expression  $\frac{1}{16} \pi^2 E$ , on en conclurait  $E = 10^9$  environ, valeur s'accordant à peu près avec les nombres admis. Nous devons dire que les expériences du physicien anglais n'ont pas été très-nombreuses et se rapportaient à de petits échantillons.



Le même expérimentateur a proposé pour déterminer charge de rupture des colonnes pleines en fonte à bases plates, la formule

$$N = 3290 \cdot 10^6 \frac{d^{3,6}}{(2a)^{1,7}};$$

et dans le cas de colonnes creuses,  $c$  étant le diamètre du vide supposé concentrique au plein,

$$N = 3290 \cdot 10^6 \frac{d^{3,6} - c^{3,6}}{(2a)^{1,7}}.$$

La théorie aurait donné, au lieu de l'exposant 3,6, l'exposant 4; 2 au lieu de 1,7; au lieu de  $3290 \cdot 10^6$  la quantité  $\frac{3}{64} \pi^3 E$ , soit en faisant  $E = 9 \cdot 10^9$  (valeur moyenne pour la fonte) le nombre  $13080 \cdot 10^6$ . Mais ces discordances paraissent toutes naturelles si l'on veut bien se reporter aux considérations du n° 148, et nous ne saurions trop répéter qu'on risque beaucoup de s'engager dans une fausse voie, quand on veut calculer les charges de rupture à l'aide des formules fondées sur les théories de la Résistance des Matériaux, puisque les hypothèses premières qui leur servent de base, suffisamment vraies pour le cas de faibles efforts moléculaires, deviennent radicalement inexactes si la rupture est sur le point de se produire.

En résumé, pour les solides pouvant fléchir, la résistance à la rupture par compression directe est, à section égale, décroissante avec la longueur et croissante avec la petite dimension de l'équarrissage : on voit aussi qu'il est difficile de la représenter par une formule qui convienne à tous les cas.

M. Hodgkinson a observé en outre les deux faits suivants :

1°. A égalité de matière employée, le renflement vers le milieu augmente peu la résistance; il ne l'augmente que de  $\frac{1}{7}$  ou  $\frac{1}{8}$  seulement.

2°. Sous la même condition d'une égale dépense de matière, les colonnes creuses résistent mieux que les colonnes pleines; elles sont également préférables à celles dont la section transversale est en forme de croix. Cependant leur emploi exige

des précautions; le moule peut se déranger pendant le coulage, et le vide ne plus être bien concentrique avec la circonférence extérieure, ce qui produirait une diminution notable de résistance. Quant à l'explication théorique de ce deuxième fait, elle consisterait à dire que la charge de rupture est proportionnelle au moment de flexibilité, lequel est plus grand, à égalité d'aire, pour une section annulaire que pour une section ayant la forme d'un cercle plein ou d'une croix.

**155. Limites pratiques des efforts de compression permanente.** — Ces limites sont fixées absolument de la même manière que pour l'extension (n° 151), comme nous l'avons déjà dit.

### § III. — Glissement transversal; glissement longitudinal des fibres dans les pièces de bois.

**156. Difficulté de procéder à une mesure directe de l'élasticité transversale; comment on peut l'évaluer indirectement.** — Le glissement relatif simple des sections transversales d'un prisme, tel qu'il a été défini et étudié au n° 14, est difficile à produire isolément. Si, par exemple, on cherche à le faire naître en suspendant un poids à l'extrémité d'un prisme horizontal encastré à l'autre bout, il est clair que cette charge aura un moment par rapport aux divers centres d'élasticité des sections successives, en sorte qu'elle engendrera tout à la fois un glissement et une flexion. On peut dire qu'il en sera toujours ainsi quand le prisme ne sera soumis qu'à des forces perpendiculaires à sa longueur; car s'il n'y avait pas de flexion, le moment fléchissant serait constamment nul: or la dérivée de cette quantité, considérée comme variable d'une section à l'autre, représente la valeur de la force transversale de glissement, ainsi qu'on a eu occasion de le voir (n° 76); donc cette force serait elle-même toujours nulle, et le glissement n'existerait pas. Ainsi la production isolée du glissement transversal exigerait qu'on fît usage tout à la fois de forces perpendiculaires et de forces parallèles à la longueur du prisme; et bien que cette combinaison ne soit pas absolument impossible à

réaliser, nous croyons cependant que l'expérience directe présenterait d'assez grandes difficultés.

Mais si le glissement simple ne se produit pas isolément sans beaucoup de précautions, on peut aisément mettre en jeu l'élasticité transversale dans un autre phénomène, qui est celui de la torsion simple. Il suffira, par exemple, d'encaster un cylindre par une extrémité et d'appliquer à l'autre un couple contenu dans un plan perpendiculaire à l'axe. Appelons  $V$  le moment du couple,  $a$  et  $b$  les rayons de gyration principaux (n° 3) de la section transversale,  $\omega$  un élément de cette section, dont  $G$  serait le coefficient d'élasticité transversale. Comme les actions moléculaires développées dans une section quelconque doivent faire équilibre au couple  $V$ , la rotation relative de deux sections distantes d'une longueur  $ds$  aura pour expression

$\frac{V ds}{(a^2 + b^2) \Sigma G \omega}$  (n° 17), et cette rotation s'effectuera autour de l'axe de la pièce. Entre deux sections quelconques il y aura donc une rotation relative proportionnelle à leur distance, et

la quantité  $\frac{V}{(a^2 + b^2) \Sigma G \omega}$ , représentant cette rotation rapportée à l'unité de longueur, est ce que l'on appelle ordinairement *angle de torsion par unité de longueur*. Quand la matière est supposée homogène, l'angle de torsion par unité de lon-

gueur a simplement pour valeur  $\theta = \frac{V}{G \Omega (a^2 + b^2)}$ , en appelant  $\Omega$  la section totale. On comprend maintenant sans peine que si l'expérience a donné pour un cylindre déterminé la valeur de  $\theta$  correspondante à un couple  $V$ , l'égalité précédente, où tout serait connu sauf  $G$ , ferait connaître ce coefficient.

Une telle manière de procéder serait à l'abri de toute critique si l'hypothèse en vertu de laquelle nous avons établi que la torsion simple correspond à l'action d'un couple était elle-même rigoureuse. Or les beaux travaux de M. de Saint-Venant sur la théorie mathématique de l'élasticité (\*) tendent à dé-

---

(\*) Voir l'ouvrage intitulé : *De la torsion des prismes, etc.*, par M. de Saint-Venant, extrait du tome XIV des Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences de Paris.

montrer que cela n'est pas, sauf dans le cas d'une section circulaire. Il nous semblerait donc préférable, sans les difficultés dont il a été question tout à l'heure, de chercher le coefficient  $G$  par la mesure d'un glissement transversal simple plutôt que de le déduire d'un effet qui en dépend suivant une loi plus ou moins compliquée et peut-être imparfaitement connue. Par la même raison, il semble plus sage de déterminer le coefficient  $E$  par la mesure d'extensions simples que par des expériences sur la flexion, phénomène qui met bien en jeu l'élasticité longitudinale, mais d'une manière plus complexe et moins facile à saisir. Tout au moins, quand on déduira  $G$  d'expériences sur la torsion, conviendra-t-il d'écarter une cause d'erreur en employant de préférence les cylindres à base circulaire.

Voici les valeurs du coefficient d'élasticité transversale  $G$  pour quelques matières usuelles :

Fer. ....	$6,7 \cdot 10^9,$
Fonte. ....	$2,0 \cdot 10^9,$
Bois de chêne.....	$4,0 \cdot 10^8.$

157. *Résistance transversale.* — La résistance transversale des matériaux a été beaucoup moins étudiée par les ingénieurs et les physiciens que les résistances à l'extension et à la compression. Cependant on ne rencontre pas ici les difficultés que nous avons signalées dans le n° 156, à propos du coefficient d'élasticité ; la mesure de la résistance dont il s'agit pourrait être opérée simplement et d'une manière directe en encastrant un prisme horizontal par une extrémité et suspendant une charge verticale très-près du point d'encastrement.

M. Vicat, à qui l'on doit quelques expériences sur ce sujet, n'a pas procédé tout à fait comme on vient de le dire. Il a opéré sur des cubes de plâtre, sur des briques, des mortiers et des pierres calcaires. Les solides étaient percés de deux trous cylindriques opposés de même diamètre ; on mesurait la force nécessaire pour détacher le solide intermédiaire qui restait entre ces trous, en l'obligeant, par la pression d'un piston, à glisser dans le sens parallèle à l'axe commun des deux cylindres. Si l'on nomme  $F$  cette force,  $\rho$  le rayon des trous,

« l'épaisseur restant pleine entre les fonds des trous, le quotient  $\frac{F}{2\pi\rho s}$  mesurera la résistance transversale à la rupture par unité de surface. Voici les valeurs données par les expériences de M. Vicat pour la quantité  $\frac{F}{2\pi\rho s}$  :

Plâtre ordinaire gâché.....	de 21.10 <sup>4</sup> à 53.10 <sup>4</sup>
Brique crue. ....	» 30.10 <sup>4</sup>
Mortier de chaux grasse et de sable âgé de quatorze ans.....	» 28.10 <sup>4</sup>
Pierre calcaire.....	» 121.10 <sup>4</sup>
Calcaire lithographique.....	» 239.10 <sup>4</sup>

La méthode de M. Vicat semble bonne pour les corps grenus comme ceux sur lesquels il a opéré; mais elle laisserait quelque incertitude pour les corps fibreux, car la résistance au glissement pourrait ne pas être constante sur tout le contour du cylindre restant dans l'intervalle des trous.

La résistance transversale du fer est connue par des expériences sur le cisaillement des rivets employés dans les constructions et appareils en tôle, c'est-à-dire sur leur rupture par un glissement de la tête parallèlement à son plan. D'après les résultats suffisamment concordants obtenus par diverses personnes, on admet généralement comme un fait acquis que la résistance transversale du fer et sa résistance longitudinale à la rupture par extension sont à peu près identiques; ou, en d'autres termes, qu'il faut, pour cisailer une barre de fer, une force à peu près égale à celle qui serait capable d'en produire la rupture par extension. Cependant l'expérience semblerait plutôt indiquer une légère infériorité dans la résistance transversale; peut-être serait-il plus exact d'admettre qu'elle est seulement les  $\frac{4}{5}$  de l'autre, comme l'avait indiqué Navier

d'après certaines considérations théoriques. Au reste, le fait a pratiquement peu d'importance; pour les rivets en particulier, la résistance au cisaillement est beaucoup augmentée par le frottement dû au serrage, frottement en vertu duquel une



partie de la force totale est transmise, sans l'intermédiaire des rivets, de l'une à l'autre des deux pièces de tôle qu'ils servent à réunir.

La résistance transversale de la fonte n'a pas été, à notre connaissance, l'objet d'essais directs; elle a été déduite seulement d'expériences sur la torsion. En conservant les notations du n° 156, et appelant en outre  $\rho$  le rayon d'un cylindre circulaire et homogène soumis à la torsion, la quantité  $\rho\theta$  serait la valeur du glissement transversal maximum des fibres par unité de longueur; la tension transversale maximum par unité de

surface serait donc  $G\rho\theta$ , ou bien  $\frac{V\rho}{\Omega(a^2 + b^2)}$ ; et, attendu que

dans une section circulaire homogène on a  $a^2 = b^2 = \frac{1}{4}\rho^2$ ,

$\Omega = \pi\rho^2$ , cette tension maximum s'exprimerait définitivement

par  $\frac{2V}{\pi\rho^3}$ . Par conséquent, si l'on admet que les formules con-

tinuent à s'appliquer jusqu'à la rupture, et qu'on la produise en augmentant convenablement le couple  $V$ , le calcul de l'ex-

pression  $\frac{2V}{\pi\rho^3}$  donnera la résistance transversale à la rupture,

rapportée à l'unité de surface. On a trouvé ainsi, dans le cas de la fonte, des nombres variables de  $17 \cdot 10^6$  à  $26 \cdot 10^6$  et moyennement  $22 \cdot 10^6$ . Outre l'inconvénient déjà signalé (nos 148 et 154) d'appliquer les formules théoriques de la Résistance des Matériaux à la détermination de forces de rupture, ce procédé suppose l'homogénéité de la fonte, tandis que plus vraisemblablement la partie centrale n'a pas la même élasticité que la partie extérieure. Mais la plupart des déductions que l'on a tirées des expériences faites sur la fonte sont également fondées sur l'hypothèse d'une matière homogène, et peut-être est-ce là une des causes qui en rendent les résultats si divergents.

158. *Limites pratiques des tensions transversales.* — Il est assez rare que dans les constructions telles que peuvent avoir à en établir les ingénieurs des Ponts et Chaussées, les tensions transversales jouent un rôle important; presque toujours les dimensions qu'on est obligé de donner aux pièces pour



résister à des actions d'une autre nature sont plus que suffisantes pour les mettre en état de résister aussi aux forces de glissement. Cependant l'ingénieur ne doit pas perdre ces forces de vue, surtout quand, pour économiser la matière, il réduit les dimensions des diverses sections d'une pièce à ce qui est strictement nécessaire, comme dans les solides d'égale résistance. Il peut arriver alors que dans certaines sections déterminées, la force de glissement fatigue plus la pièce que les forces qui résultent de l'extension longitudinale.

En pareil cas, suivant la règle indiquée au n° 151, on s'assurera que le maximum de la tension transversale par unité de surface dans une pièce de métal ne dépasse pas  $\frac{1}{6}$  de celle qui entraînerait la rupture immédiate ; la fraction  $\frac{1}{6}$  sera réduite à  $\frac{1}{10}$  pour les autres matières.

Dans les machines, il y a certaines pièces, les arbres de rotation par exemple, qui sont plus particulièrement exposés à des tensions transversales produites par la torsion. Il convient ici, non-seulement que les efforts moléculaires ne compromettent pas la pièce, mais encore que l'angle de torsion n'atteigne pas une grandeur bien sensible, afin d'assurer la régularité dans les transmissions de mouvement et de ne pas donner lieu à des suppléments de frottement plus ou moins considérables. On comprend alors qu'il est bon de restreindre le maximum des efforts qui seraient parfaitement admissibles dans d'autres circonstances. Si donc il s'agit d'arbres ayant une section circulaire ou en forme de polygone régulier,  $\rho$  étant le rayon du cercle inscrit, au lieu d'égaliser la quantité  $\frac{2V}{\pi\rho^3}$  (n° 157) au sixième ou au dixième de la résistance à la rupture par unité de surface, on devra l'égaliser à une constante C, que la pratique des constructeurs de machines et des exemples connus auront permis de déterminer pour chaque matière. M. le général A. Morin a proposé les valeurs suivantes, que nous transcrivons en nombres ronds :

Pour le fer et l'acier.....	$C = 4 \cdot 10^6$
Pour la fonte.....	$133 \cdot 10^4$
Pour le bois de chêne.....	$27 \cdot 10^4$
Pour le bois de sapin.....	$29 \cdot 10^4$

Les valeurs ci-dessus conviennent au cas des arbres allégés; si l'on veut avoir des arbres forts, on prend  $C$  deux fois plus petit. Dans le cas d'arbres creux,  $\rho'$  étant le rayon intérieur,

$C$  devrait être égalé à  $\frac{2V\rho}{\pi(\rho^4 - \rho'^4)}$ .

159. *Résistance au glissement longitudinal des fibres.* — On a vu au n° 87 que si une poutre droite chargée de forces transversales fléchit comme le suppose la théorie, alors il y a dans chaque élément de la poutre compris entre deux sections consécutives une force qui tend à faire glisser l'une sur l'autre les deux moitiés de cet élément parallèlement à la longueur des fibres. Il se développe ainsi une nature particulière de résistance, dont nous ne dirons que quelques mots. Quand on considère une poutre en fonte ou en tôle, on peut admettre, faute de données suffisantes, que les forces de rupture par glissement longitudinal et par glissement transversal sont sensiblement les mêmes. Pour les bois de chêne et de sapin, d'après MM. Chevandier et Wertheim, cette force de rupture serait de 30 à 40 kilogrammes par centimètre carré de surface, soit de  $30 \cdot 10^4$  à  $40 \cdot 10^4$  kilogrammes par mètre carré.

#### § IV. — Expériences sur la flexion et sur les effets d'une charge en mouvement.

160. *Vérification expérimentale de diverses notions théoriques relatives à la flexion des pièces droites chargées transversalement.* — Considérons, pour fixer les idées, une poutre droite horizontale reposant sur des appuis et supportant des poids. Dans ce cas, la théorie nous apprend (n° 19) que les tensions longitudinales et les variations de longueur des éléments de fibre qui traversent une même section, sont proportionnelles aux distances qui les séparent de la fibre moyenne,

en sorte que celle-ci n'est ni pressée ni tendue; nous avons vu de plus que les fibres sont tendues ou comprimées suivant qu'elles se trouvent d'un côté ou de l'autre de l'axe de flexion.

Comme vérification de ces faits, on peut d'abord citer les expériences anciennement faites par Duhamel du Monceaux, insérées dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* de Paris, pour l'année 1767. Duhamel du Monceaux ayant fait préparer une série de barreaux en bois de saule, identiques autant que possible, les plaça successivement sur des appuis de même niveau qui en soutenaient les extrémités, et les rompit par un poids placé au milieu, dans les circonstances suivantes : Une partie des barreaux n'avait pas subi de modification quand on les soumettait à l'action de la charge; d'autres avaient reçu un trait de scie dans le plan de la section du milieu, et cette partie sciée occupait le tiers de la hauteur de l'équarrissage, à partir de la face supérieure et sur toute la largeur; d'autres barreaux avaient pareillement des traits de scie sur la moitié et sur les trois quarts de la hauteur. Le petit vide produit par l'épaisseur du trait était rempli par une planchette en bois dur. Or, l'expérience a montré que tous ces barreaux se rompaient à peu près sous la même charge, et les différences peu sensibles des charges de rupture s'expliqueraient suffisamment par l'impossibilité de se procurer des barreaux absolument identiques. Cela se comprend aisément au moyen des notions théoriques sur la flexion; car en sciant les fibres en travers, dans la partie de la section qui est comprimée, et remplissant le vide par du bois dur, on n'empêche pas les actions répulsives dues à la compression de s'exercer tout aussi bien qu'avant la solution de continuité, et par conséquent on n'affaiblit pas la pièce, en tant qu'on la considère comme résistant à la flexion; on ne produit pas encore d'affaiblissement notable quand on scie au delà du milieu de la hauteur, jusqu'aux trois quarts, car les fibres situées près de la fibre moyenne ne supportent que de faibles pressions ou tensions, et il y a peu d'inconvénient à les scier, lors même qu'elles sont tendues.

M. Charles Dupin et Duleau ont également fait des expériences en petit sur des pièces de bois et de fer, desquelles il résulte que dans les pièces droites courbées par la flexion due

à des charges perpendiculaires à leur axe, les sections normales restent planes, et que dans le cas d'une section rectangulaire l'allongement de la partie convexe est égal au raccourcissement de la partie concave, comme l'indique la théorie, puisque ces deux parties sont également éloignées de l'axe neutre.

M. le général Morin a fait exécuter au Conservatoire des Arts et Métiers, à Paris, des expériences nombreuses sur des poutres en bois ou en métal de 4 mètres de portée, les poutres métalliques ayant des sections en forme de double T à branches égales ou inégales. La conclusion à laquelle il a été conduit confirme les notions théoriques rappelées au commencement du n° 160, et montre que ces notions peuvent être admises, non comme vérité absolue et mathématique, mais comme représentation suffisamment exacte des faits réels, dans les limites de charges qu'exige la pratique des constructions.

En nous occupant de la flèche que prend une poutre horizontale reposant sur deux appuis simples, quand elle supporte un poids placé au milieu, nous avons trouvé (n° 70) la formule

$$f = \frac{Ra^3}{3er^2},$$

dans laquelle  $f$  désigne la flèche,  $R$  la moitié de la charge,  $a$  la demi-distance des appuis,  $er^2$  le moment de flexibilité de la section transversale. Si la section est un rectangle homogène de hauteur  $h$  et de largeur  $b$  parallèlement à l'axe de flexion, en appelant  $E$  le coefficient d'élasticité longitudinale on a  $er^2 = \frac{1}{12} Ebh^3$ , et par suite

$$f = \frac{4R}{E} \frac{a^3}{bh^3};$$

ce qui montre : 1° que la flèche est proportionnelle à la charge et au cube de la portée; 2° qu'elle est en raison inverse de la largeur de l'équarrissage et du cube de la hauteur. On sait en outre qu'une charge uniformément répartie produit la même flèche qu'une charge concentrée au milieu, ayant pour inten-

sité les cinq huitièmes de la précédente. Tous ces faits ont été vérifiés expérimentalement par M. Charles Dupin, sur des barreaux de faibles dimensions : ils le sont aussi par les expériences de M. Hodgkinson sur la flexion des pièces de fonte, au moins dans les limites de charge admissibles en pratique.

161. *Résistance à la rupture par flexion.* — Une poutre droite étant posée sur deux appuis au même niveau et chargée en son milieu, si l'on conserve les notations du n° 160 et qu'on appelle en outre  $p$  le poids de la pièce par mètre courant, on sait (n° 70) que le maximum du moment fléchissant est exprimé par  $Ra + \frac{1}{2} pa^2$ . Supposons, par exemple, que la section soit rectangulaire et homogène : alors la tension ou compression longitudinale maximum par unité de surface sera égale à  $\frac{(Ra + \frac{1}{2} pa^2) \frac{1}{2} h}{\frac{1}{12} bh^3}$  (n° 19) ou bien à  $\frac{6a(R + \frac{1}{2} pa)}{bh^2}$ ; avec d'autres sections, on pourrait aussi facilement obtenir des résultats analogues.

Cela posé, on a quelquefois déterminé par expérience la valeur de la charge  $2R$  qui entraîne la rupture immédiate ; puis en calculant, comme on vient de le rappeler, la tension maximum correspondante (c'est-à-dire la quantité  $\frac{6a(R + \frac{1}{2} pa)}{bh^2}$ , dans le cas de la section rectangulaire et homogène), on a ce qu'on appelle *résistance à la rupture par flexion*, pour la matière formant la pièce essayée. Nous avons déjà dit (n° 148) pourquoi cette méthode est vicieuse et il serait inutile d'en répéter la raison. En définitive, quand une pièce est rompue par flexion, c'est que la tension ou la compression longitudinale de certaines fibres a pris la grandeur nécessaire pour entraîner la rupture : donc la résistance à la rupture par flexion devrait être la même que la moindre des deux qu'on a trouvées pour l'extension et la compression longitudinales : si l'on parvient à un résultat différent, c'est sans doute parce qu'il y a quelque chose d'inexact dans les raisonnements qu'on a faits ou dans les formules qu'on a employées ; et nous savons, en effet, qu'on ne doit plus compter sur la vérité des formules théoriques



lorsque les actions moléculaires s'approchent de la limite extrême pour laquelle la rupture se produit.

D'après cela, il ne faut point s'attendre à ce que le chiffre de la résistance à la rupture par flexion soit identique avec le moindre des deux qui se rapportent à l'extension et à la compression, comme cela devrait être. La discordance sur ce point est le résultat ordinaire de l'expérience. Ainsi, dans le cas de la fonte, on sait qu'une tension longitudinale de 11 kilogrammes par millimètre carré est suffisante pour produire la rupture, tandis que la résistance à la rupture par flexion serait deux ou trois fois plus grande. D'ailleurs on a déjà vu (n° 157) que pour la fonte, il y a une cause particulière d'erreur, qui consiste dans le défaut d'homogénéité du métal, défaut d'où résulte l'évaluation incertaine du moment de flexibilité de la section transversale.

162. *Effet d'une charge en mouvement et des vibrations en général.* — En 1847, le gouvernement anglais, à la suite de plusieurs accidents arrivés à des ponts de chemins de fer, nomma une commission pour faire une enquête sur les conditions que les ingénieurs doivent observer, lorsqu'ils emploient le fer et la fonte dans les constructions exposées à de violentes secousses et à des vibrations.

La commission a examiné les deux questions suivantes (\*) :

Lorsqu'une pièce métallique a été soumise pendant longtemps à des chocs et à des vibrations, s'opère-t-il dans l'arrangement de ses molécules quelque altération qui diminue sa résistance?

Quels sont les effets mécaniques des chocs et du passage des corps pesants pour courber et rompre les barres ou les poutres sur lesquelles ils agissent?

Sur la première question, on a constaté une grande diver-

---

(\*) Le Rapport de la commission, traduit par M. Busche, inspecteur général des Ponts et Chaussées, est inséré dans les *Annales des Ponts et Chaussées*, 1851, 1<sup>er</sup> semestre. Nous ne faisons ici que l'analyser brièvement et en reproduire les principales conclusions relatives à l'effet des charges en mouvement et des vibrations.



gence d'opinions chez les hommes de pratique, les uns se prononçant pour l'affirmative, les autres pour la négative, et attribuant l'état cristallin soit au mode de fabrication, soit au mode de rupture. — Pour étudier la question, la commission a exécuté des expériences de divers genres. 1° Une barre de fonte à section carrée, de 0<sup>m</sup>,076 de côté, a été placée sur des supports écartés de 4<sup>m</sup>,27; une boule pesante suspendue à un fil de fer de 5<sup>m</sup>,48 de longueur, était ensuite écartée de la verticale du point de suspension, et venait en retombant frapper la barre par le milieu. Le nombre de chocs ainsi produits sur une même barre est allé jusqu'à 4000; on en faisait varier l'intensité, en changeant soit le poids de la boule, soit simplement son écart de la verticale. 2° On a plié des barres de même force, au moyen d'une came tournante, qui les fléchissait lentement et les laissait ensuite reprendre leur forme primitive; d'autres fois on employait un moyen par suite duquel la flexion était accompagnée d'une violente trépidation. Ce genre d'épreuves a été répété, dans certains cas, jusqu'à 100 000 fois sur chaque barre. 3° Enfin, on a fait promener lentement, et jusqu'à 96 000 fois sur certaines barres, un poids égal à la moitié du poids de rupture.

Dans les deux premiers genres d'épreuves, on a reconnu que les barres de fonte n'avaient subi aucun affaiblissement tant que la flèche passagère, prise sous l'action du choc ou de la came tournante, ne dépassait pas le tiers de celle qui aurait eu pour conséquence la rupture instantanée, et l'on s'assurait du fait en constatant qu'il n'y avait pas de diminution dans la charge morte capable de produire la rupture. Au contraire, les barres étaient affaiblies, quand la flèche passagère atteignait la moitié du maximum, et dans ce cas moins de 900 flexions suffisaient pour briser la pièce. On conclut de là que la flèche passagère, mais répétée, prise par une poutre en fonte, ne doit pas dépasser le tiers du maximum; et comme les chocs aussi bien que le mouvement imprimé à la charge peuvent augmenter beaucoup la flèche déjà produite par le poids mort, il suit de là qu'en réduisant le maximum de la charge totale au sixième de celle qui entraînerait la rupture, on aura une limite à peine suffisante pour la sécurité, même en admettant

que la poutre soit parfaitement saine. Le troisième genre d'épreuves ne conduit pas à modifier cette conclusion, car la flèche passagère pourrait alors atteindre la moitié au lieu du tiers de la flèche de rupture.

Le Rapport entre dans moins de détails au sujet du fer. Cependant il mentionne ce fait qu'aucun affaiblissement notable n'est résulté, pour les barres en fer forgé, de 10000 flexions produites par une came tournante, chaque flexion étant due à la moitié du poids qui, par sa pression statique, produirait une grande flexion permanente. Nous ne savons quel est ce poids, et il reste ici un peu de vague. D'ailleurs la commission conclut, pour le fer comme pour la fonte, qu'il faut limiter la charge au sixième du poids de rupture.

Sur la seconde question indiquée tout à l'heure, de nombreuses expériences ont également été faites. Elles ont donné les résultats suivants, relativement à l'effet des chocs. 1° Une barre de fonte ayant pour section un rectangle dont un côté est quadruple de l'autre, et reposant sur deux appuis, exige, pour être rompu, un choc de même intensité, soit que le coup porte sur le petit côté, soit qu'il porte sur le grand côté du rectangle. Les barres de même longueur et de même poids, quelle que soit la forme de leur section, présentent la même résistance au choc. 2° La flexion produite par un choc sur une barre de fer est proportionnelle à la vitesse du choc; pour la fonte, les flexions croissent dans un rapport plus grand que les vitesses. 3° Un poids additionnel uniformément réparti sur une poutre la rend capable de résister à un choc vertical plus intense; dans certains cas, la résistance a pu être doublée de cette manière.

Il reste enfin la dernière partie de la seconde question, celle qui concerne le passage des corps pesants sur les poutres, avec une vitesse plus ou moins considérable. Pour l'étudier, entre autres méthodes suivies, on a fait construire un appareil par le moyen duquel un chariot, chargé de poids variables à volonté, était abandonné à lui-même au sommet d'un plan incliné : les poutres soumises à l'expérience formaient au bas du plan incliné, un chemin de fer sur lequel le chariot s'engageait avec la vitesse acquise pendant la descente. Le maximum du

poids roulant a été de 2000 kilogrammes environ, et le maximum de la vitesse 13 mètres par seconde. Les barres avaient 2<sup>m</sup>,74 de portée. Les expériences faites à l'aide de cet appareil prouvent que la flèche augmente avec la vitesse du chariot, quand le poids de celui-ci reste constant; on a quelquefois observé des flexions doubles de la flexion statique. On a aussi remarqué que le point où se produit la plus grande flèche n'est plus au milieu de la barre, mais au delà, en suivant le sens du mouvement du chariot; de même la fracture a lieu au delà du centre, et quelquefois la barre se brise à la fois en plusieurs morceaux.

Telle est, en résumé, la partie du rapport qui concerne les effets des charges en mouvement et des vibrations. On voit que la commission anglaise ne paraît pas redouter beaucoup les efforts et secousses passagères, tant que leurs effets restent en dessous d'une certaine limite. Sur ce point, le temps est peut-être un élément indispensable pour qu'on puisse décider la question en parfaite connaissance de cause. L'avenir nous donnera la réponse; il montrera si les constructions en métal, employées si fréquemment aujourd'hui dans les chemins de fer et les édifices publics ou privés, finissent par cristalliser et perdre leur résistance après une certaine durée. Quant à l'accroissement de la flèche statique, dû spécialement aux chocs et à la vitesse des convois qui passent sur les ponts, nous ne croyons pas qu'il y ait en général à s'en inquiéter beaucoup, lorsqu'il s'agit de ponts à grande ouverture. Les expériences de la commission anglaise avec le chariot mobile étaient faites dans des conditions toutes différentes de celles qu'on peut rencontrer dans les ouvrages d'art, parce que la charge roulante était considérable relativement au poids de la poutre, tandis que dans la pratique le poids mort de la construction l'emporte ordinairement, ce qui atténue beaucoup l'importance des accroissements de flèche produits par la vitesse. Ainsi, dans un cas cité par la commission elle-même, la vitesse étant de 22 mètres par seconde environ, l'accroissement était seulement  $\frac{1}{7}$  de la flèche statique; c'est-à-dire que cette vitesse considérable équivalait, au point de vue de la flèche produite, à augmenter la

charge mobile d'un septième de sa valeur, pour la faire ensuite stationner sur le pont. Diverses expériences faites par M. Jules Poirée, sur plusieurs ponts du chemin de fer de Lyon et sur le pont du Carrousel à Paris (\*), viennent à l'appui de notre opinion, que confirment encore les applications numériques des formules de M. Philipps (n° 145).

---

(\*) *Annales des Ponts et Chaussées*, 1854, 1<sup>er</sup> semestre.

## CHAPITRE HUITIÈME.

### ÉQUILIBRE DES SYSTÈMES ARTICULÉS SANS FROTTEMENT.

#### § I. — Systèmes articulés simples.

163. *Définitions; propriété caractéristique des articulations sans frottement.* — On appelle *articulation* la liaison de deux corps solides, en vertu de laquelle ils ne peuvent prendre relativement l'un à l'autre, que des mouvements de rotation autour d'axes passant par un point géométriquement commun aux deux corps, et occupant une position déterminée dans l'un et l'autre. Ce point se nomme *le centre d'articulation*.

L'articulation est dite *cylindrique* lorsque l'axe de rotation relative est une ligne déterminée dans chaque corps; elle est dite *sphérique* dans le cas contraire. L'assemblage à charnière donne la réalisation pratique de la première espèce d'articulation; elle consiste essentiellement, comme on le sait, en deux cylindres circulaires, ayant même axe et même rayon, l'un creux et attaché au premier corps, l'autre plein et attaché au second corps. Pareillement l'articulation sphérique est réalisée dans l'appareil qu'on nomme *assemblage à genou*, consistant essentiellement en deux sphères concentriques et de même rayon, respectivement attachées aux deux corps. Dans la suite de ce chapitre, nous supposerons constamment les articulations sphériques; mais dans certains cas la solution des problèmes ne cessera pas d'être applicable en les prenant cylindriques. C'est ce qui arriverait notamment si le système considéré était formé de lignes et de forces toutes contenues dans le même plan.

L'articulation sera sans frottement, quand les deux corps solides qui sont réunis par elle n'exerceront l'un sur l'autre que des forces normales aux surfaces de contact. Dans ce cas, on sait que pour tout déplacement réel ou possible du sys-



tème la somme des travaux de ces actions mutuelles est nulle : or cette somme de travaux ne dépend que du mouvement relatif ; donc on peut conclure que pour tout mouvement de rotation de l'un des deux corps autour d'un axe passant par le centre d'articulation, le travail total des actions qu'il reçoit de l'autre corps est nul. Et puisque le travail d'une force dans la rotation d'un solide autour d'un axe est proportionnel au moment de la force par rapport au même axe, nous énoncerons la proposition suivante :

*Dans une articulation cylindrique sans frottement, la somme des moments des actions d'un des deux corps sur l'autre, par rapport à l'axe de leur rotation relative, est nécessairement nulle.*

*Dans une articulation sphérique, la somme des moments de ces mêmes actions par rapport à un axe quelconque contenant le centre d'articulation est nulle, c'est-à-dire que ces actions doivent se réduire à une force unique passant au centre d'articulation.*

La proposition est évidente dans le cas d'un assemblage à genou ou à charnière ; mais la démonstration qui précède a l'avantage d'être indépendante du procédé employé pour réaliser matériellement la liaison.

Les systèmes de corps liés par des articulations sans frottement n'existent point en réalité et sont une pure abstraction. Cependant la théorie que nous allons donner trouvera son application dans bien des problèmes pratiques. Ainsi les différentes pièces d'une charpente sont fréquemment reliées entre elles par des assemblages de faibles dimensions, incapables de résister à un effort notable qui tendrait à produire une rotation autour de leur centre. Il est donc nécessaire que l'équilibre existe en les considérant comme des articulations parfaites, et cette hypothèse ne peut pas conduire à des conséquences très-éloignées de la réalité.

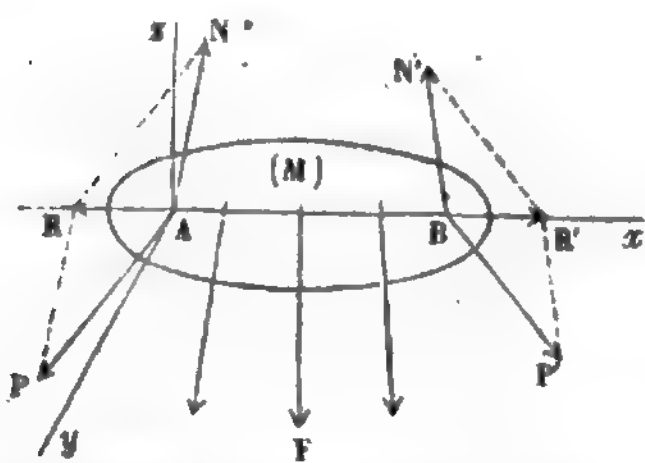
Nous nous proposons principalement, dans ce chapitre, d'arriver, par l'étude de l'équilibre, à la connaissance des forces que chaque corps faisant partie d'un système articulé reçoit de la part des autres corps qui le touchent. Cela fait, on serait en mesure d'appliquer, pour vérifier la stabilité ou pour chercher



les déformations, les théories de la Résistance des Matériaux, exposées dans les deux premiers chapitres de ce Cours. Subsidièrement nous établirons diverses propriétés qui présentent un certain intérêt en elles-mêmes.

**164. Équilibre d'un corps solide articulé en deux points fixes.** — Le corps  $M$  (fig. 61) est articulé sphériquement en  $A$

Fig. 61.



et en  $B$  avec deux appuis fixes, de telle sorte que les centres d'articulation  $A$  et  $B$  ne pouvant prendre aucun mouvement, le corps conserve seulement la liberté de tourner autour de la ligne  $AB$ . Il est d'ailleurs sollicité par des forces quelconques,

désignées généralement par  $F$ . Il s'agit de trouver : 1° la condition d'équilibre du système solide  $M$ ; 2° les réactions des points fixes  $A$  et  $B$ .

Les forces qui proviennent des appuis devant nécessairement se réduire à deux forces  $N, N'$  passant par les points  $A$  et  $B$  (n° 163), il y aura équilibre entre  $N, N'$  et toutes les forces  $F$ ; et comme, en vertu d'un théorème de Statique élémentaire, un système de forces en équilibre doit avoir une somme de moments nulle par rapport à un axe quelconque, on en conclura que la somme des moments des forces  $F$  seules, par rapport à la ligne qui joint les centres d'articulation, est nulle. Cette condition à remplir par le système des forces  $F$  est une condition nécessaire de l'équilibre : elle est d'ailleurs suffisante, car si le corps, primitivement en équilibre, se mettait en mouvement, on pourrait empêcher ce mouvement en appliquant à chaque point une force en sens contraire de l'élément de cercle qu'il tend à décrire, et alors l'équilibre existerait. Donc la somme des moments, relativement à  $AB$ , des anciennes forces  $F$  et des nouvelles forces introduites serait nulle, et par conséquent elle serait nulle pour les forces nouvelles prises séparément puisqu'elle l'était déjà pour les anciennes. Or, toutes ces nouvelles forces ont des moments de

même sens et qui ne peuvent pas se détruire algébriquement. Donc le mouvement supposé n'existe pas. Ce qu'il fallait démontrer.

La condition d'équilibre étant établie, cherchons  $N$  et  $N'$ . On sait que le système des forces  $F$  peut être remplacé par un autre, équivalent au point de vue de l'équilibre des forces extérieures appliquées au solide, cet autre système étant formé de deux forces dont l'une passe en un point donné,  $A$  par exemple. Alors la seconde devra se trouver dans un même plan avec  $AB$ ; donc on pourra la décomposer en deux dont l'une passe en  $A$  et l'autre en  $B$ , de manière que finalement les forces  $F$  seront remplacées par deux forces  $P, P'$  passant respectivement en  $A$  et  $B$ . Soit  $R$  la résultante de  $N$  et de  $P$ ,  $R'$  la résultante de  $N'$  et de  $P'$ . L'équilibre du corps  $M$ , soumis uniquement à  $R$  et à  $R'$  exige que ces deux forces soient égales et contraires, et par conséquent dirigées toutes deux suivant la ligne  $AB$ ; donc la projection  $Q$  de  $N$  sur un plan perpendiculaire à  $AB$  est égale et opposée à la projection de  $P$  sur le même plan, et une relation identique existe entre  $N'$  et  $P'$ . Ainsi les réactions totales des appuis se trouvent déterminées quant à la grandeur et à la direction, en projection sur le plan perpendiculaire à la ligne qui joint les centres d'articulation; mais leurs composantes  $S, S'$  suivant cette ligne restent indéterminées.  $S$  et  $S'$  ne sont en effet assujetties qu'à une condition, c'est que leur somme algébrique soit égale et contraire à la somme algébrique des projections de  $P$  et de  $P'$  sur  $AB$ , le sens positif étant le même, bien entendu, pour  $S, S'$  et les deux projections de  $P$  et  $P'$ .

Le procédé géométrique indiqué ci-dessus n'étant pas toujours d'une application facile, il convient de savoir comment on le remplacerait par le calcul. Pour le montrer, prenons trois axes rectangulaires  $Ax, Ay, Az$ , dont le premier coïncide avec  $AB$ ; désignons généralement par les notations  $F_x, F_y, F_z, M_x F, M_y F, M_z F$ , les projections d'une force  $F$  sur les trois axes et ses moments par rapport aux mêmes axes; appelons  $a$  la distance  $\overline{AB}$  et  $\Sigma$  une somme étendue à toutes les forces autres que les réactions des points d'appui. Les six équations connues

de l'équilibre d'un solide donneront

$$\begin{aligned} N_x + N'_x + \Sigma F_x &= 0, \\ N_y + N'_y + \Sigma F_y &= 0, \\ N_z + N'_z + \Sigma F_z &= 0, \\ \Sigma M_x F &= 0, \\ -aN'_z + \Sigma M_y F &= 0, \\ aN'_y + \Sigma M_z F &= 0. \end{aligned}$$

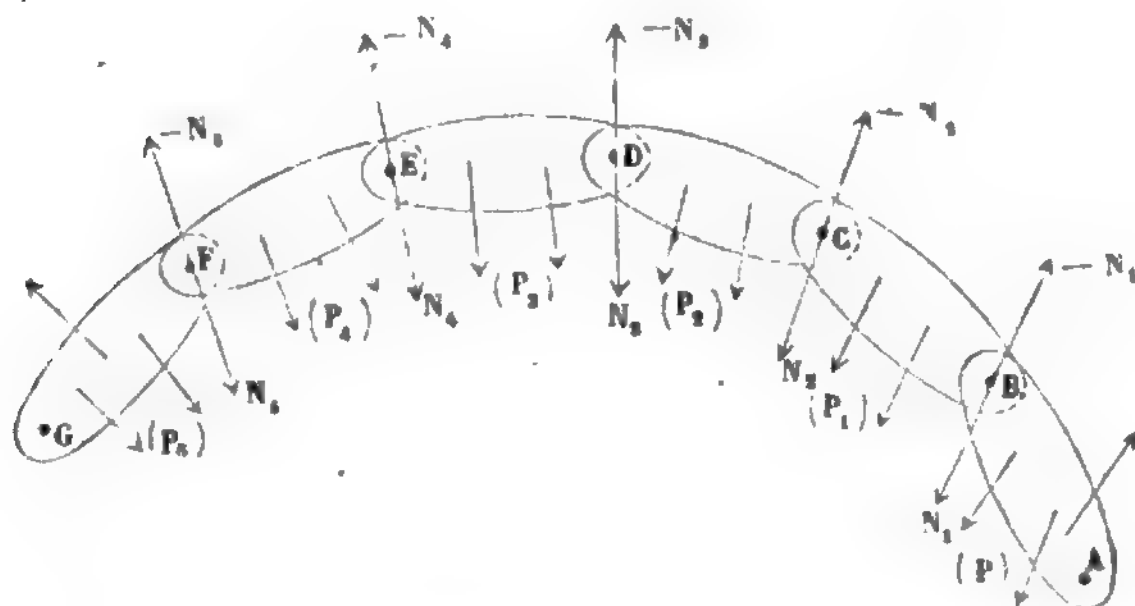
La quatrième équation est la condition d'équilibre indépendante de  $N$  et de  $N'$ ; la seconde et la troisième jointes à la cinquième et à la sixième déterminent  $N_y$ ,  $N_z$ ,  $N'_y$ ,  $N'_z$ , c'est-à-dire les composantes de  $N$  et de  $N'$  perpendiculairement à  $AB$ ; la première détermine seulement la somme  $N_x + N'_x$ . Nous arrivons donc à des résultats identiques avec ceux trouvés par l'autre méthode.

L'indétermination que l'on rencontre ici dans la recherche des composantes  $N_x$ ,  $N'_x$  n'a rien qui doive surprendre. Dans la réalité physique, les réactions des points d'appui ont une valeur déterminée pour chaque point; mais pour arriver à les connaître, il ne suffit pas de savoir que le corps  $M$  est actuellement en équilibre. En effet, on ne trouble pas l'équilibre par l'addition de deux forces égales et contraires dirigées suivant  $AB$ ; ce qui prouve qu'il y a une infinité de systèmes de réactions compatibles avec l'état d'équilibre. Lequel se produira réellement? Pour répondre à cette question, il faudrait connaître toutes les circonstances qui ont précédé l'état d'équilibre, c'est-à-dire l'établissement du corps sur ses appuis et ses déformations sous les forces qui lui sont appliquées. Au reste, l'indétermination cesse, comme on va le voir, quand on considère des systèmes de plusieurs corps articulés entre eux.

165. *Équilibre d'un système polygonal articulé.* — Nous allons prendre un système  $ABCDEFG$  (*fig. 62*) formé d'une série de corps solides, dont les corps intermédiaires  $BC$ ,  $CD$ ,  $DE$ ,... présentent chacun deux articulations, l'une avec le so-

lido précédent, l'autre avec le suivant. B, C, D, . . . , F sont les centres d'articulations. Indépendamment de leurs actions mu-

Fig. 62.



tuelles, les solides supportent diverses forces extérieures : il s'agit d'établir les conditions d'équilibre et de trouver les réactions mutuelles qui s'exercent dans les points d'articulation.

Désignons collectivement par  $(P)$  le système de forces appliquées au premier corps AB, et de même par  $(P_1)$ ,  $(P_2)$ ,  $(P_3)$ , . . . , les systèmes de forces qui sollicitent respectivement BC, CD, DE, . . . , ces systèmes n'étant pas censés comprendre les réactions que chaque corps reçoit de ses deux voisins, mais devant comprendre au contraire les réactions des articulations extrêmes placées en A et G, si ces articulations existent. Soit  $N_1$  la résultante de translation de  $(P)$ ,  $N_2$  la résultante de translation de  $(P)$  et de  $(P_1)$ ,  $N_3$  celle de  $(P)$ ,  $(P_1)$  et  $(P_2)$ , et ainsi de suite. Les groupes  $(P)$ ,  $(P_1)$ ,  $(P_2)$ , . . . , sont regardés provisoirement comme des données immédiates d'où l'on déduira sans peine  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_3$ , . . . .

Cela posé, considérons un certain nombre de corps consécutifs à partir d'une extrémité, trois par exemple à partir de la droite. Ce système ABCD doit être en équilibre sous l'action des forces extérieures  $(P)$ ,  $(P_1)$ ,  $(P_2)$ , et de la réaction qu'il reçoit en D ; donc la somme des moments de  $(P)$ ,  $(P_1)$ ,  $(P_2)$ , relativement à un axe quelconque passant au point D, doit être égale à zéro. Une condition analogue doit être remplie pour chaque centre d'articulation. Pour énoncer ce fait, nous dirons :

*Lorsqu'un système polygonal articulé se trouve en équilibre,*

*si l'on considère l'ensemble d'un certain nombre de corps consécutifs de ce système, à partir d'une extrémité jusqu'à un centre d'articulation quelconque qui le termine, le moment résultant de toutes les forces extérieures appliquées à cet ensemble doit être nul relativement au centre d'articulation dont on vient de parler.*

Il faut de plus que le système pris en entier satisfasse aux six conditions générales que doivent remplir toujours les forces extérieures appliquées à un système matériel en équilibre.

Réciproquement, si toutes ces conditions sont remplies, les forces se feront équilibre, c'est-à-dire que les corps AB, BC, . . . , FG, supposés primitivement en repos, ne se mettront pas en mouvement. C'est ce que nous allons démontrer à l'aide du théorème du travail virtuel (\*). A cet effet, nous remarquerons qu'on peut, sans changer la somme des travaux virtuels dans un déplacement possible quelconque du système articulé : 1° appliquer en B, au corps AB, une force  $-N_1$ , pourvu qu'on applique la même force en sens contraire au corps BC, également en B, car ces deux forces, agissant sur deux points dont les déplacements sont identiques, feront toujours une somme de travaux nulle; 2° faire agir en C deux forces égales et contraires, la première  $-N_2$  sollicitant le corps BC, la seconde  $N_2$  le corps CD; 3° procéder de la même manière pour les articulations suivantes : par exemple appliquer en D les forces  $-N_3$  et  $N_3$  respectivement aux corps CD et DE, et ainsi de suite. Si l'équilibre existe après les opérations que nous venons de faire, c'est que déjà il existait auparavant, puisque nous n'avons pas altéré la somme des travaux virtuels dans l'un quelconque des déplacements permis par les liaisons. Or, d'après l'introduction des forces nouvelles, il est aisé de reconnaître que chaque corps est sollicité par des forces ayant une résultante nulle. Ainsi, le groupe (P), appliqué au premier corps, donne une résultante égale à  $N_1$  passant par le point B, puisque la

---

(\*) Le théorème du travail virtuel s'énonce ainsi : *Pour qu'un système matériel soit en équilibre, il est nécessaire et suffisant que la somme des travaux virtuels des forces tant intérieures qu'extérieures qui le sollicitent, soit nulle, pour un déplacement virtuel quelconque, compatible avec les liaisons du système.*



somme des moments des forces  $(P)$  est nulle relativement à tout axe mené par B; donc cette résultante s'équilibre avec la force  $-N_1$  que nous avons ajoutée au corps AB. Pareillement, le corps BC est soumis à  $N_1$  et au groupe  $(P_1)$ ; attendu l'équivalence de  $N_1$  et de  $(P)$  d'une part, et la nullité des moments de l'ensemble  $(P), (P_1)$  relativement aux axes qui passent par C, d'autre part, le groupe  $(P_1)$ , composé avec  $N_1$ , donnera une résultante  $N_2$  passant au point C, qui sera équilibrée par la force  $-N_2$  que nous avons appliquée en dernier lieu à ce même point du corps BC. Le raisonnement serait identique pour les autres corps en allant de proche en proche.

Si nous comptons le nombre des conditions d'équilibre, nous en trouvons d'abord six pour l'équilibre de toutes les forces extérieures du système, puis trois pour chaque centre d'articulation, nécessaires pour exprimer la nullité des moments des forces appliquées aux corps compris entre ce centre et une des extrémités. En désignant par  $n$  le nombre de corps, il y aura donc  $6 + 3(n - 1)$ , c'est-à-dire  $3n + 3$  conditions. Dans le cas, assez ordinaire, où il y aurait vers les extrémités A et G deux articulations dont les centres seraient fixes, les trois composantes des réactions de ces points, parallèlement à trois axes coordonnés, deviendraient des inconnues auxiliaires, et le nombre des conditions ne serait plus que de  $3n - 3$ .

Quant aux réactions des différents corps les uns sur les autres, il est clair que ce sont les forces désignées tout à l'heure par  $N_1, N_2, N_3, \dots$ , c'est-à-dire que *la partie formée d'un certain nombre de corps consécutifs, à partir d'une extrémité, exerce sur l'autre partie une action égale à la résultante de translation des forces qui lui sont appliquées.*

Dans tous les raisonnements qui précèdent, on peut placer l'extrémité du système à tel centre d'articulation qu'on veut, pourvu qu'on tienne compte des forces exercées en ce point sur la partie conservée par celle qu'on laisse de côté. De même, s'il y a des appuis fixes, les réactions inconnues de ces appuis doivent être comptées dans les groupes des forces tels que  $(P)$ . Ces réactions se détermineraient, comme on l'a dit tout à l'heure, au moyen des conditions d'équilibre; ainsi, par exemple, A et G étant des points fixes, l'équilibre du corps AB,

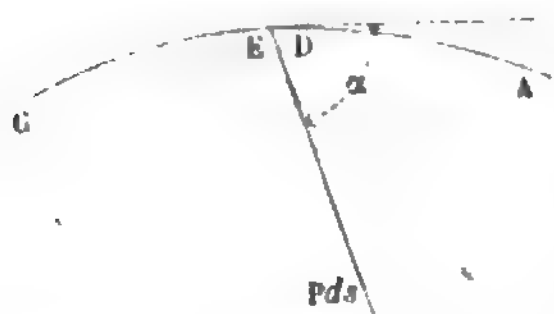


considéré comme articulé en A et B, fera connaître les composantes de la réaction N du point A perpendiculaire à AB; la troisième s'obtiendra en faisant usage d'une équation de moments du groupe N, (P), (P<sub>1</sub>) relativement à un axe mené par le point C.

La recherche des réactions des points A et G, supposés fixes, est d'ailleurs beaucoup simplifiée lorsque les centres d'articulation sont tous dans un même plan contenant aussi les forces extérieures, et que le système est symétrique, pour les forces et les dimensions, relativement à la perpendiculaire au milieu de AG. Les réactions en A et en G sont alors égales et symétriques; leurs composantes parallèles à l'axe de symétrie s'obtiennent par une simple projection des forces extérieures sur cet axe; les composantes parallèles à AG sont alors connues au moyen d'une des équations de moments nécessaires à l'équilibre.

166. *Équilibre d'un système dont les articulations sont infiniment rapprochées.* — Supposons que les centres d'articulation B, C, D, . . . , du système que nous venons d'étudier se rapprochent indéfiniment, de manière

Fig. 63.



à former une courbe continue AG (fig. 63). À l'élément quelconque DE, dont la longueur sera représentée par  $ds$ , sont appliquées des forces ayant une résultante  $P ds$ . Appelons  $T$  l'action mu-

tuelle des deux parties du système qui se réunissent en E.

En premier lieu, l'élément DE est en équilibre, et, par suite, la somme des moments des forces extérieures qui le sollicitent, relativement à un arc quelconque, est nulle. Ces forces sont l'action  $T$  exercée en E, l'action analogue en D et la résultante  $P ds$ ; si l'axe des moments passe en D, le moment de la seconde est nul, et celui de la troisième est infiniment petit du second ordre. Donc le moment de  $T$  est de même ordre, ainsi que sa distance à D; donc la force  $T$  est tangente à la courbe. Ainsi l'action mutuelle qui s'exerce en un des points de la courbe, de la part d'une portion du système sur une autre

portion, est dirigée suivant la tangente à l'élément qu'elle sollicite : on la nomme *pression* ou *tension*, suivant le sens dans lequel elle agit.

D'un autre côté, on remarquera que pour l'équilibre de la partie AE du système, la pression ou tension en E doit être égale à la résultante des forces extérieures appliquées de A en E ; donc la condition d'équilibre du système considéré s'exprime en disant que : *Si l'on compose toutes les forces appliquées depuis une extrémité A jusqu'à un point quelconque E, la résultante unique doit passer en E et se confondre avec la tangente à la courbe en ce point.* A cette condition, il faut encore ajouter, bien entendu, que les forces extérieures se feraient équilibre sur le système total considéré comme solide. On démontrerait, comme au n° 165, que ces conditions sont suffisantes.

167. *Forme d'équilibre d'un système articulé.* — La question à résoudre est celle-ci : *Étant données les diverses forces qui doivent agir sur les côtés d'un système polygonal articulé et les longueurs de ces côtés, trouver la forme du polygone.* Ainsi, dans la fig. 62, on donne les groupes de forces  $(P)$ ,  $(P_1)$ ,  $(P_2), \dots$ , et, par suite, les résultantes partielles  $N_1, N_2, N_3, \dots$  ; on donne aussi les longueurs  $\overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}, \dots$ , et l'on demande les sommets B, C, D,  $\dots$ .

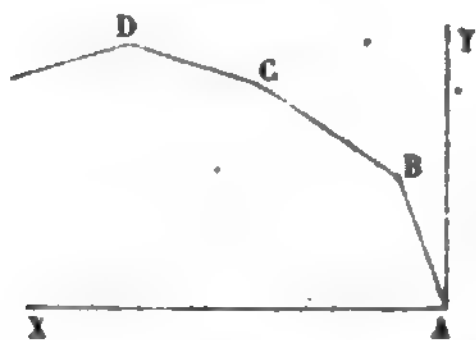
Le problème, ainsi posé, se résout sans peine par la construction graphique suivante. On place arbitrairement le sommet B sur la première résultante  $N_1$  ; puis, avec la longueur donnée  $\overline{BC}$  pour rayon, on décrit un cercle (ou une sphère plus généralement) qui coupe  $N_1$  au point cherché C, et ainsi de suite pour les autres. On voit qu'il y a une infinité de solutions.

Mais il est rare qu'en pratique la question soit tout à fait présentée comme nous venons de le faire, et ordinairement la solution n'est pas aussi facile. Ainsi les forces extérieures peuvent dépendre de la situation des côtés du polygone, au lieu d'être absolument déterminées, comme nous l'avons supposé ; elles pourraient aussi comprendre les réactions de points fixes, dont la recherche se lierait avec celle de la forme du polygone lui-même. Les hypothèses et données étant suscepti

bles de varier à l'infini, nous nous contenterons de traiter quelques exemples.

168. *Exemples particuliers du problème précédent.* — Soit le système ABCD... (fig. 64), dont les centres d'articulation

Fig. 64.



sont B, C, D, ...; chaque corps supporte un poids uniformément réparti suivant la ligne qui joint les deux articulations de ce corps et proportionnel à la longueur de cette ligne projetée sur l'horizontale.

En premier lieu, il est nécessaire pour l'équilibre que tout le polygone ABCD soit dans un même plan vertical, car si deux côtés consécutifs, tels que BC et CD, n'étaient pas dans un même plan vertical, la somme des moments des forces appliquées à BCD, y compris les réactions exercées en B et D, ne serait pas nulle relativement à l'axe BD. Donc deux côtés consécutifs sont contenus dans un plan vertical; donc BC est dans le plan vertical de AB; par suite, ce plan contient aussi CD, et en allant de proche en proche on verrait ainsi qu'il contient le polygone tout entier.

Soient maintenant AX, AY deux axes coordonnés tracés dans ce plan; X, Y les composantes de la force appliquées en A au système;  $x, y$  les coordonnées d'un sommet quelconque C;  $p$  le poids qui charge l'unité de longueur en projection horizontale. En égalant à zéro la somme des moments, relativement au point C, de toutes les forces qui agissent depuis ce point jusqu'à l'extrémité, on aura

$$Yx - Xy - \frac{1}{2}px^2 = 0;$$

ce qui prouve que tous les sommets A, B, C, D, ..., sont sur une même parabole représentée par l'équation précédente. La détermination des constantes X, Y, nécessaire pour la connaissance complète de cette parabole, dépendrait d'autres données particulières de la question.

Si le polygone ABCD... représentait la section droite d'une

enveloppe cylindrique soumise à la pression normale uniforme d'un gaz dont l'intensité serait de  $p$  kilogrammes par mètre de longueur mesurée suivant le contour ABCD, l'équation des moments deviendrait

$$Yx - Xy \pm \frac{1}{2} p (x^2 + y^2) = 0,$$

et tous les sommets se trouveraient sur un même cercle. La quantité  $\frac{1}{2} p (x^2 + y^2)$  est la somme des moments, relativement à un sommet C, de toutes les pressions exercées par le gaz depuis ce sommet jusqu'à l'extrémité A; le signe + convient au cas d'une pression intérieure, le signe — au cas d'une pression extérieure. Ici, comme dans le premier problème, il y aurait deux constantes Y, X à déterminer.

A cet effet on pourrait, dans les deux cas, donner par exemple la position de deux sommets relativement aux axes AX, AY; les coordonnées de ces sommets introduites dans l'équation au lieu de  $x, y$ , donneraient deux relations d'où l'on tirerait X et Y. Si le système était assujéti à être symétrique relativement à une certaine ligne passant par un sommet, les axes de coordonnées étant menés par ce point, celui des  $y$  suivant la ligne de symétrie et l'autre perpendiculairement, on aurait  $Y = 0$ ; l'équation de la courbe ne contiendrait plus qu'une constante, et une seule condition serait suffisante pour la déterminer.

Enfin, on remarquera que soit pour la parabole, soit pour le cercle, à l'origine A on a  $\frac{dy}{dx} = \frac{Y}{X}$ , ce qui montre que la force exercée en A sur le polygone articulé est tangente à la courbe des sommets. L'origine pouvant d'ailleurs être placée en un sommet quelconque, sans changer la forme de l'équation d'équilibre, la même propriété est vraie pour les deux actions mutuelles exercées en chaque centre d'articulation.

**169. Forme d'équilibre dans le cas d'articulations infiniment rapprochées.** — Replaçons-nous dans les conditions du n° 166, et exprimons par des équations l'équilibre de l'élément DE,

dont la longueur est  $ds$  (*fig. 63*). Indépendamment de la force  $Pds$ , l'élément est sollicité en E par la force T provenant de l'action de la partie EG du système, et en D par une force analogue due à l'action de la partie DA. La première force T, à laquelle nous attribuons comme sens positif celui d'une pression sur DE, est dirigée suivant la tangente en D (n° 166); elle aura donc pour composantes suivant trois axes coordonnés rectangulaires

$$T \frac{dx}{ds}, \quad T \frac{dy}{ds}, \quad T \frac{dz}{ds}.$$

Si l'on adopte pour sens des  $s$  positifs celui de E vers D, la pression en ce dernier point donnera pareillement trois composantes

$$T \frac{dx}{ds} + d.T \frac{dx}{ds}, \quad T \frac{dy}{ds} + d.T \frac{dy}{ds}, \quad T \frac{dz}{ds} + d.T \frac{dz}{ds};$$

et comme elles sont en sens contraire de celles de la force T, il restera en définitive

$$- d.T \frac{dx}{ds}, \quad - d.T \frac{dy}{ds}, \quad - d.T \frac{dz}{ds}.$$

Donc en appelant X, Y, Z les composantes de P, on aura

$$(1) \quad \begin{cases} X ds - d.T \frac{dx}{ds} = 0, \\ Y ds - d.T \frac{dy}{ds} = 0, \\ Z ds - d.T \frac{dz}{ds} = 0. \end{cases}$$

L'élimination de l'inconnue auxiliaire T entre les trois équations (1) donnera deux équations entre les quantités connues X, Y, Z et les coordonnées  $x, y, z$ . Ce seront les équations différentielles de la courbe d'équilibre.

En multipliant la première des équations (1) par  $dx$ , la seconde par  $dy$ , la troisième par  $dz$ , faisant la somme et divisant

par  $ds$ , on trouvera, tout calcul effectué,

$$\left. \begin{aligned} X dx + Y dy + Z dz - dT \left[ \left( \frac{dx}{ds} \right)^2 + \left( \frac{dy}{ds} \right)^2 + \left( \frac{dz}{ds} \right)^2 \right] \\ - T \left( \frac{dx d^2 x}{ds^2} + \frac{dy d^2 y}{ds^2} + \frac{dz d^2 z}{ds^2} \right) \end{aligned} \right\} = 0.$$

Or, de la relation

$$\left( \frac{dx}{ds} \right)^2 + \left( \frac{dy}{ds} \right)^2 + \left( \frac{dz}{ds} \right)^2 = 1,$$

on déduit, en différentiant par rapport à  $s$ ,

$$\frac{dx d^2 x}{ds^2} + \frac{dy d^2 y}{ds^2} + \frac{dz d^2 z}{ds^2} = 0;$$

donc on aura

$$(2) \quad dT = X dx + Y dy + Z dz,$$

équation qui montre comment la pression varie d'un point à l'autre de la courbe des centres d'articulation.

L'équation (2) aurait pu se démontrer plus simplement en projetant sur la direction même de l'élément  $DE$  les trois forces  $T$ ,  $T + dT$ ,  $P ds$ ; car  $\alpha$  étant l'angle de  $P$  avec  $ds$ , on aurait eu

$$dT = P \cos \alpha \cdot ds,$$

et comme on a d'ailleurs

$$\cos \alpha = \frac{X dx + Y dy + Z dz}{P ds},$$

on retrouverait l'équation (2) par une multiplication membre à membre des deux dernières équations. Pareillement on peut encore remarquer que pour l'équilibre de  $P ds$  avec les deux forces  $T$  et  $T + dT$ ,  $P$  doit être dans le plan des deux tangentes avec lesquelles coïncident  $T$  et  $T + dT$ , c'est-à-dire dans le plan osculateur de la courbe, que l'angle de contingence est ex-

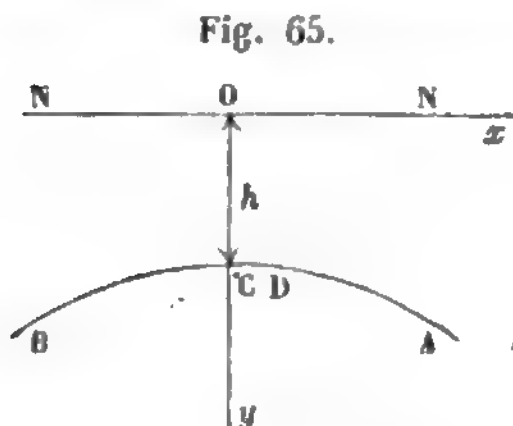
primé par  $\frac{ds}{\rho}$ ,  $\rho$  étant le rayon de la première courbure; et, par suite, en projetant sur la direction de  $\rho$ , on posera la relation

$$(3) \quad \frac{T}{\rho} = P \sin \alpha,$$



dont la démonstration analytique serait notablement plus difficile.

170. *Exemple particulier d'un système dont les articulations sont infiniment rapprochées; système supportant une charge d'eau.* — Soit ACB (fig. 65) la courbe des centres d'articulation, que nous considérerons



simplement comme la section droite d'un cylindre ayant des génératrices de longueur égale à 1. On néglige le poids propre des corps articulés et on suppose que les forces extérieures consistent, indépendamment de celles que produisent les appuis, en pressions dues à une charge d'eau dont le niveau est NN. La ligne NN est prise

pour axe des  $x$ ; l'axe des  $y$  est une verticale  $Oy$ , relativement à laquelle on admet que le système est symétrique.

Il étant le poids de 1 mètre cube d'eau, nous devons faire, dans les équations du n° 169,

$$R = \pi y, \quad \alpha = 90^\circ.$$

Donc on a d'abord

$$dT = 0, \quad \text{ou} \quad T = \text{constante},$$

$$\frac{T}{\rho} = \pi y,$$

c'est-à-dire que la pression  $T$  est constante, et que le rayon de courbure de la courbe ACB est, dans chaque point, en raison inverse de l'ordonnée  $y$ . Cette considération donnerait un premier moyen de tracer approximativement la courbe, au moyen d'une série d'arcs de cercle se raccordant entre eux. On tracerait un premier arc CD partant du point C avec un centre placé arbitrairement sur  $Cy$ ; puis, appelant  $\rho_0$  et  $\rho_1$  les rayons de la courbe en C et D,  $h$  et  $h_1$  les cotes de ces mêmes points au-dessous du niveau NN, on poserait la proportion

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{h}{h_1},$$

d'où l'on tirerait le rayon  $\rho_1$  avec lequel on décrirait le second arc à partir du point D. On irait de même de proche en proche, et on aurait toujours soin de ne faire correspondre les arcs successifs qu'à de faibles accroissements d'ordonnées  $y$ . Le premier rayon ayant été pris arbitrairement, pour déterminer complètement la courbe, on pourrait imposer les conditions d'avoir son point le plus haut C et son extrémité A dans

des situations données. Le problème se résoudrait alors par tâtonnement, en essayant diverses valeurs du rayon initial.

Si l'on veut employer le calcul, on remplacera  $\rho$  par sa valeur en fonction de  $\frac{dy}{dx}$  et de  $\frac{d^2y}{dx^2}$ , ce qui donnera l'équation différentielle de la courbe CA

$$\frac{d^2y}{dx^2} \left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{-\frac{3}{2}} = \frac{\Pi y}{T}.$$

On peut faire une première intégration, après avoir multiplié les deux membres par  $2 dy$ , et on trouvera

$$-2 \left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{\Pi y^2}{T} + \text{constante},$$

ou bien, attendu que  $\frac{dy}{dx} = 0$  pour  $y = h$ ,

$$-2 \left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} + 2 = \frac{\Pi}{T} (y^2 - h^2).$$

Cette équation, résolue par rapport à  $\frac{dy}{dx}$ , devient

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{1}{\left[ 1 - \frac{\Pi}{2T} (y^2 - h^2) \right]^2} - 1} = \frac{\sqrt{1 - \left[ 1 - \frac{\Pi}{2T} (y^2 - h^2) \right]^2}}{1 - \frac{\Pi}{2T} (y^2 - h^2)},$$

soit en remplaçant la différence de deux carrés par le produit de la somme et de la différence, et effectuant la séparation des variables :

$$\frac{dy \left[ 1 - \frac{\Pi}{2T} (y^2 - h^2) \right]}{\sqrt{(y^2 - h^2) \left[ 1 - \frac{\Pi}{4T} (y^2 - h^2) \right]}} = dx \sqrt{\frac{\Pi}{T}}.$$

On doit avoir nécessairement  $\frac{\Pi}{4T} (y^2 - h^2) < 1$ , sans quoi l'expression de  $\frac{dy}{dx}$  ne serait pas réelle; par suite, on pourra développer

$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\Pi}{4T} (y^2 - h^2)}}$  en série, au moyen de la formule du binôme; de

cette manière la dernière équation devient

$$dx \sqrt{\frac{\Pi}{T}} = \frac{dy}{\sqrt{y^2 - h^2}} \left[ 1 - \frac{\Pi}{2T} (y^2 - h^2) \right] \\ \times \left[ 1 + \frac{\Pi}{8T} (y^2 - h^2) + \frac{3\Pi^2}{128T^2} (y^2 - h^2)^2 + \dots \right].$$

L'intégration est maintenant facile, car elle se ramène à la recherche d'intégrales de la forme  $\int \frac{y^n dy}{\sqrt{y^2 - h^2}}$ ,  $n$  étant un nombre entier positif.

Or, on sait que

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y^2 - h^2}} = \log \text{hyp} \left( \frac{y + \sqrt{y^2 - h^2}}{h} \right), \\ \int \frac{y dy}{\sqrt{y^2 - h^2}} = \sqrt{y^2 - h^2};$$

et d'un autre côté l'intégration par parties donne

$$\int \frac{y^n dy}{\sqrt{y^2 - h^2}} = \frac{y^{n-1}}{n} \sqrt{y^2 - h^2} + \left( \frac{n-1}{n} \right) h^2 \int \frac{y^{n-2} dy}{\sqrt{y^2 - h^2}}.$$

Ainsi, par cette dernière formule, connaissant les valeurs de l'intégrale pour  $n = 0$  et  $n = 1$ , on les aura pour  $n = 2$  et  $n = 3$ ; au moyen de ces dernières, on les aura dans les cas de  $n = 4$  et  $n = 5$ ; et ainsi de suite.

Nous ne pousserons pas plus loin le calcul sans introduire une hypothèse restrictive. D'après une équation établie tout à l'heure,  $1 - \frac{\Pi}{2T} (y^2 - h^2)$  est égal à  $\left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}$ , c'est-à-dire au cosinus de l'angle que la tangente à la courbe fait avec l'horizontale. Si la courbe est assez surbaissée, le cosinus différera de très-peu de 1, et  $\frac{\Pi}{2T} (y^2 - h^2)$  sera une petite quantité dont il suffira de conserver la première puissance dans les calculs. Dans l'hypothèse d'un faible rapport entre la flèche et l'ouverture de la courbe ABC, on posera donc

$$dx \sqrt{\frac{\Pi}{T}} = \frac{dy}{\sqrt{y^2 - h^2}} \left[ 1 - \frac{\Pi}{2T} (y^2 - h^2) \right] \left[ 1 + \frac{\Pi}{8T} (y^2 - h^2) + \dots \right] \\ = \frac{dy}{\sqrt{y^2 - h^2}} \left[ 1 - \frac{3\Pi}{8T} (y^2 - h^2) + \dots \right],$$

équation dont l'intégrale, calculée comme il est dit ci-dessus, est la sui-

vante :

$$x \sqrt{\frac{11}{T}} = \left(1 + \frac{30h^2}{16T}\right) \log \text{hyp} \left( \frac{y + \sqrt{y^2 - h^2}}{h} \right) - \frac{3}{16} \frac{11y}{T} \sqrt{y^2 - h^2}.$$

La constante  $T$  pourrait être déterminée par la condition de faire passer la courbe au point donné  $A$ .

**171. Application des formes d'équilibre de systèmes articulés à la construction de pièces rigides.** — Quand on connaît toutes les charges qui doivent agir sur une pièce, y compris son poids propre et les réactions des appuis, on peut construire, en s'appuyant sur les considérations du n° 169, une courbe telle, que si celle-ci était considérée comme le lieu des articulations, infiniment rapprochées entre elles, d'un système articulé, l'équilibre existerait. Or cette courbe peut aussi être prise pour fibre moyenne de la pièce, et alors on aura cet avantage que, dans toutes les sections transversales, la résultante des actions moléculaires passera au centre d'élasticité. De là il résulte que les efforts se répartissent uniformément sur la section, c'est-à-dire de la manière la plus favorable à la résistance, ce qui permet d'employer moins de matière dans la construction de la pièce.

Pour faire usage de cette propriété, il faut cependant remarquer que l'action des forces produit des allongements, raccourcissements ou glissements par suite desquels la forme d'équilibre que la pièce doit finalement conserver ne sera pas tout à fait identique avec celle sous laquelle on doit la construire. Il serait donc toujours utile, et quelquefois nécessaire, de prévoir et de calculer par avance les déformations et d'établir la pièce avec une forme provisoire, de manière que, par l'effet même des charges, elle prit la forme d'équilibre qu'on aurait en vue. On y parviendrait approximativement au moyen d'une règle de fausse position : on supposerait la pièce construite avec la forme d'équilibre; les déplacements produits par les forces seraient ensuite calculés dans cette hypothèse pour les différents points de la force moyenne, et portés en sens contraire de leur direction à partir de ces points. Le lieu des extrémités de ces déplacements inverses pourrait être adopté pour fibre moyenne provisoire. Cette solution

serait rigoureuse pour le cas de déplacements infiniment petits : pratiquement elle sera donc, en général, d'une exactitude suffisante, car la petitesse des déformations est une conséquence de la stabilité.

Dans sa théorie de la stabilité des voûtes (\*), M. Yvon Villarceau a cherché à déterminer les courbes d'intrados et d'extrados de telle sorte, que la résultante des pressions sur un joint passât au centre de gravité de ce joint : la fibre moyenne de la voûte ainsi construite satisferait à la condition d'être identique avec le lieu des centres d'articulation d'un système articulé en équilibre sous les forces appliquées à la voûte, et par conséquent on obtiendrait une certaine économie dans le cube des maçonneries. C'est une des applications les plus intéressantes qu'on ait faites des considérations que nous venons de présenter.

## § II. — Systèmes articulés complexes.

172. *Des systèmes articulés complexes.* — Dans tous les systèmes précédemment étudiés, chaque corps présentait seulement deux points d'articulation, l'un avec un corps précédent, l'autre avec un corps suivant, et l'ensemble, réduit aux lignes droites joignant les deux centres d'articulation de chaque corps, formait un polygone convexe ayant deux extrémités bien définies. Nous avons alors ce que nous conviendrons d'appeler un *système articulé simple*. Mais il peut arriver qu'après avoir établi un tel système, on réunisse certains corps de ce système entre eux ou à d'autres corps au moyen de tiges ou corps de forme quelconque, articulés eux-mêmes à leurs points d'assemblage. On aura formé de cette manière ce que nous appellerons un *système articulé complexe*. Le caractère général auquel on les reconnaît, c'est qu'il y a au moins un des corps du système qui présente plus de deux centres d'articulation ou points considérés comme tels.

Ainsi une charpente qui ne serait composée que de deux

---

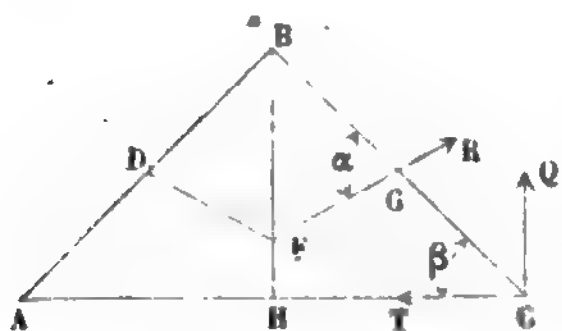
(\*) Voir l'ouvrage intitulé : *Sur l'établissement des arches de pont, envisagé au point de vue de la plus grande stabilité* ; Paris, 1854.

arbalétriers et un tirant se classerait cependant parmi les systèmes complexes, parce que chaque arbalétrier serait articulé avec l'autre arbalétrier et le tirant, et aurait en outre un appui fixe assimilé à un centre d'articulation.

Nous ne pouvons pas donner de théorie générale des systèmes articulés complexes. Nous nous bornerons à traiter quelques exemples.

**173. Charpente composée de deux arbalétriers simples, deux contre-fiches, tirant et poinçon.** — Soit donnée la charpente ABCDFGH (fig. 66), dont nous représentons les diverses pièces

Fig. 66.



par de simples lignes droites; AB, BC sont les arbalétriers, soutenus vers le milieu de leur longueur, en D et G, par les contre-fiches DF, GF; un tirant AC reçoit les extrémités des arbalétriers; enfin les points B, F, H sont réunis par un

poinçon principalement destiné à empêcher la flexion que subirait le tirant sous l'action de son poids et des pressions transmises par les contre-fiches dans le cas où l'absence de poinçon obligerait le constructeur à les assembler avec le tirant. Les pièces AB, BC supportent un poids uniformément réparti, à raison de  $p$  kilogrammes par mètre courant de projection horizontale, y compris leur poids propre. Le système est supposé symétrique par rapport à la verticale, et il repose sur deux appuis fixes en A et C; enfin tous les assemblages sont censés constituer des articulations sans frottement. Il s'agit de déterminer les forces extérieures inconnues qui sollicitent les différentes pièces, afin de vérifier si les dimensions sont suffisantes, conformément aux méthodes qu'enseigne la Résistance des Matériaux.

Soient  $\alpha$  et  $\beta$  les angles FGB, HCB;  $2\alpha$  l'ouverture  $\overline{AC}$ ; T la tension du tirant; R la compression de la contre-fiche; S la tension du poinçon en dessus du point F; P le poids du tirant. On négligera, pour plus de simplicité, les poids des trois pièces FG, FD, BH, comme faibles comparativement à P et à la charge  $2pa$  des arbalétriers.



Si l'on considère d'abord un arbalétrier BC, on voit qu'il supporte, en dehors des points d'appui B, G, C, une force  $pa$  uniformément répartie, dont chaque élément  $pdx$ , répondant à une longueur infiniment petite  $dx$  prise sur la longueur  $\overline{HC}$ , pourrait être décomposé en deux forces  $pdx \sin \beta$ ,  $pdx \cos \beta$ , suivant la direction de BC et la direction perpendiculaire. Les premières composantes tendraient seulement à comprimer la fibre moyenne de l'arbalétrier; les secondes seules produiraient une flexion. Or nous admettrons que le constructeur a déterminé le serrage de la contre-fiche de manière à rendre nulle la flèche que toutes les forces  $pdx \cos \beta$ , dont la somme est  $pa \cos \beta$ , feraient prendre en C à l'arbalétrier s'il n'était pas soutenu par la contre-fiche. Alors, au point de vue de la flexion et des pressions normales exercées sur les appuis, la pièce BC pourra être considérée comme supportant une charge  $pa \cos \beta$ , uniformément répartie et comme soutenue en trois points équidistants B, G, C. On trouve alors immédiatement les réactions normales des points d'appui, savoir  $\frac{3}{16} pa \cos \beta$  pour B et C,  $\frac{5}{8} pa \cos \beta$  pour G. En effet, on a vu (n° 70) que, sous le rapport de la flèche produite, la charge transversale unique  $\frac{5}{8} pa \cos \beta$ , concentrée en G, serait équivalente à la charge transversale  $pa \cos \beta$ , uniformément répartie; donc  $\frac{5}{8} pa \cos \beta$  est bien la pression que la contre-fiche doit exercer en G, afin d'annuler la flèche que l'arbalétrier tend à prendre en ce point, sous l'action des poids qu'il supporte. Par suite, les deux autres appuis doivent fournir une pression totale égale à  $pa \cos \beta - \frac{5}{8} pa \cos \beta$ , ou à  $\frac{3}{8} pa \cos \beta$ ; et comme il y a symétrie, chacun d'eux fournira la moitié de cette force, soit  $\frac{3}{16} pa \cos \beta$ .

Cela posé, comme il n'y a de forces appliquées à la contre-fiche qu'aux extrémités F, G, et que par conséquent ces forces doivent être dirigées suivant la droite FG, on voit que la réac-

tion totale  $R$  supportée en  $G$  par l'arbalétrier aura cette même direction ; donc on pourra d'abord poser l'égalité

$$R \sin \alpha = \frac{5}{8} pa \cos \beta,$$

qui détermine l'inconnue  $R$ . Secondement, la réaction totale appliquée au point  $C$  de l'arbalétrier se compose de la tension horizontale  $T$  du tirant et d'une force verticale  $Q$  ; la composante normale de cette réaction sera  $Q \cos \beta - T \sin \beta$  ; donc on aura

$$Q \cos \beta - T \sin \beta = \frac{3}{16} pa \cos \beta.$$

On voit que la tension  $T$  serait connue si l'on avait la valeur de  $Q$  : pour la déterminer, il faudrait auparavant trouver la tension du poinçon dans la partie  $FH$ . Cette tension, devant simplement empêcher la flexion du tirant, aurait pour valeur normale  $\frac{5}{8} P$  ; donc si l'on pose l'équation d'équilibre en projection verticale des forces extérieures au système composé des deux arbalétriers, des contre-fiches et du poinçon, cette équation sera

$$2Q - 2pa - \frac{5}{8} P = 0.$$

Quant à la tension  $S$  du poinçon dans la partie  $FB$ , il est clair que ce sera celle de la portion  $FH$ , plus la somme des deux composantes verticales des forces  $R$  transmises par les contre-fiches ; et l'on aura, par suite,

$$S = \frac{5}{8} P + 2R \sin(\alpha - \beta).$$

Il est aisé maintenant d'écrire les valeurs de toutes les forces cherchées. On trouvera successivement

$$R = \frac{5}{8} pa \frac{\cos \beta}{\sin \alpha},$$

$$Q = pa + \frac{5}{16} P,$$

$$T = \frac{13}{16} \frac{pa}{\tan \beta} + \frac{5}{16} \frac{P}{\tan \beta},$$

$$S = \frac{5}{8} P + \frac{5}{4} pa \frac{\cos \beta \sin(\alpha - \beta)}{\sin \alpha}.$$



rendre compte des forces auxquelles doivent résister les diverses pièces.

D'abord les appuis doivent exercer en C et A, sur cette ferme, des réactions égales pour cause de symétrie, dont la composante verticale aura nécessairement pour valeur le poids de la demi-ferme avec la charge correspondante. Nous admettrons que cette charge, en y comprenant le poids propre des pièces, est un poids uniformément réparti suivant l'horizontale, et nous la désignerons par  $pa$ ,  $p$  étant le poids par mètre courant mesuré horizontalement, et  $2a$  la distance  $\overline{AC}$ ;  $pa$  sera donc la composante verticale de la réaction en A ou C.

Les forces verticales appliquées à une moitié de la ferme se réduisent à un couple  $(pa, -pa)$  dont la force est  $pa$  et le bras de levier à très-peu près  $\frac{1}{2}a$ ; ce serait rigoureusement  $\frac{1}{2}a$  en négligeant le poids des bielles et tirants, simplification qui n'entraînera pas d'erreur sensible. Donc les forces horizontales doivent se réduire à un couple dont  $\frac{1}{2}pa^2$  sera le moment. Or, ces forces horizontales sont : 1° la réaction mutuelle des deux moitiés de ferme en B; 2° la tension  $T$  du tirant; 3° la composante suivant AC de la réaction de l'appui soutenant la moitié considérée. Si l'on suppose que le tirant DE a été suffisamment tendu, cette dernière composante pourra être nulle, la réaction mutuelle en B sera égale et contraire à  $T$ , et en désignant par  $b$  la distance de DE au sommet B de la ferme, on aura

$$Tb = \frac{1}{2}pa^2,$$

d'où l'on tire

$$T = \frac{pa^2}{2b}.$$

Telle est la tension qu'il conviendra de donner au tirant; elle se produirait d'elle-même par le seul fait de l'équilibre, si un des appuis A ou C était disposé de manière à ne pouvoir exercer de réaction horizontale, ce qui entraînerait la nullité de la réaction horizontale exercée par l'autre appui. Ordinairement cette condition n'est pas remplie, en sorte que la tension  $T$  est

réalisée par un serrage convenable que l'on effectue au moyen des procédés connus, par exemple avec un écrou portant deux surfaces de vis filetées en sens contraires; cet écrou, placé vers le milieu du tirant, assemble ses deux moitiés et les fait marcher l'une vers l'autre, de manière à produire une tension si les points D et E sont fixes. On emploie aussi des vis de rappel placées à une extrémité du tirant qu'il s'agit de tendre, ou bien des clefs et contre-clefs analogues à celles des têtes de bielle, usitées dans les machines à vapeur.

Les tensions S et Q des tirants BE, CE et de leurs symétriques BD, AD, sont produites artificiellement par des moyens analogues. En opérant le serrage, le constructeur doit remplir cette condition que les bielles FD, GE soient assez pressées contre leurs arbalétriers pour annuler les flèches que ces pièces tendraient à prendre aux points F et G. Dès lors par des considérations semblables à celles dont on a fait usage au n° 173, en appelant R la pression totale de l'une des bielles, et  $\beta$  l'angle des arbalétriers avec l'horizontale AC, on est conduit à l'égalité

$$R = \frac{5}{8} pa \cos \beta.$$

De même on voit que la réaction appliquée en C, normalement à l'arbalétrier, est exprimée par  $\frac{3}{16} pa \cos \beta$  et par  $pa \cos \beta - Q \cos \alpha$ ,  $\alpha$  étant l'angle de l'arbalétrier avec un des tirants qui soutiennent la bielle. Donc on a

$$\frac{3}{16} pa \cos \beta = pa \cos \beta - Q \sin \alpha,$$

et par suite

$$Q = \frac{13}{16} \frac{pa \cos \beta}{\sin \alpha}.$$

Enfin on trouve la tension du tirant BE par un procédé analogue, en exprimant que la somme algébrique des projections des forces S et T, sur la perpendiculaire à l'arbalétrier, doit être égale à  $\frac{3}{16} pa \cos \beta$ , ce qui donne

$$T \sin \beta - S \sin \alpha = \frac{3}{16} pa \cos \beta,$$

ou bien

$$S = T \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} - \frac{3}{16} \frac{pa \cos \beta}{\sin \alpha} = \frac{pa}{2 \sin \alpha} \left( \frac{a \sin \beta}{b} - \frac{3}{8} \cos \beta \right).$$

Connaissant les forces Q, R, S, T, qui s'exercent symétriquement sur les deux moitiés de la ferme, la vérification de la résistance devient facile, comme dans l'exemple du n° 173.

Quelquefois, quand la portée devient un peu considérable, on ajoute à la ferme un poinçon pour soutenir le tirant DE en son milieu, et rendre insensible sa flexion, qui produirait un effet désagréable à l'œil. La tension de ce poinçon doit être alors les cinq huitièmes du poids du tirant. L'introduction d'une aussi faible force dans le système ne modifie pas sensiblement les résultats auxquels nous sommes arrivés.

Dans certaines circonstances, afin d'éviter la poussée horizontale que doit produire la ferme quand elle se dilate par suite d'un accroissement de température, les deux extrémités inférieures des arbalétriers ont été reçues dans deux sabots de fonte, dont l'un a été fait mobile sur des roulettes. La course du sabot mobile s'effectue suivant une horizontale, elle est d'ailleurs limitée par la fixité de l'autre sabot, ou par des arrêts qui ne lui permettent qu'une amplitude convenable. On peut éviter aussi que les variations de température ne soient accompagnées de changements plus ou moins nuisibles dans le serrage des tirants; il suffit pour cela de constituer toute la ferme avec des matériaux ayant le même coefficient de dilatation, parce qu'alors le système en se dilatant resterait semblable à sa figure première. Cependant il ne paraît pas, d'après l'expérience acquise des constructeurs, que ces précautions aient une grande importance pratique, et le plus souvent on ne s'assujettit pas à les observer.

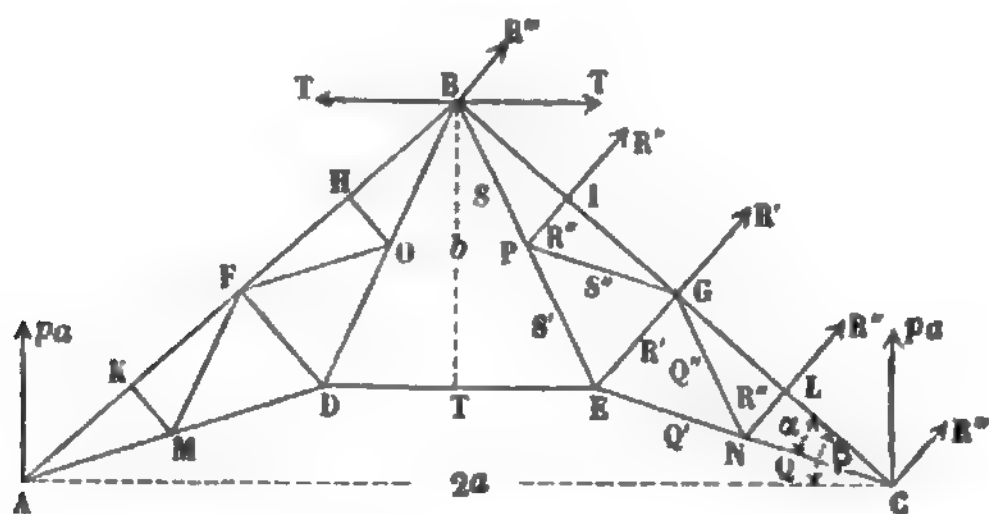
Enfin, nous remarquerons qu'il paraît assez difficile de réaliser exactement pour les cinq tirants le degré de serrage convenable, correspondant à la tension indiquée par les calculs précédents. Peut-être serait-il bon de chercher un procédé d'un emploi facile pour connaître la tension qui existe dans un tirant, quand il est posé et serré; car, faute de ce procédé, il reste nécessairement beaucoup d'incertitude sur les actions



moléculaires effectives auxquelles sont soumises les diverses pièces.

175. *Autre système de charpente en fer.* — Quand la portée devient considérable, on est quelquefois obligé d'avoir recours à un système un peu plus compliqué que le précédent, afin d'éviter l'emploi d'arbalétriers de trop forte section. A cet effet, comme l'indique le croquis ci-dessous (*fig. 68*), au lieu de

Fig. 68.



soutenir les arbalétriers en un point seulement, outre les extrémités, on lui donne trois points d'appui intermédiaires, de sorte qu'il est comme une poutre à quatre travées égales. Ainsi donc, après avoir tracé les deux arbalétriers AB, BC et les lignes AD, DB, DF, EC, EB, EG, DE, comme si l'on voulait reproduire la *fig. 67*, on ajoute à l'arbalétrier AB, deux bielles KM, HO, articulées à leurs deux extrémités, et deux tirants FO, FM; les tirants BD et AD sont remplacés chacun par deux autres BO et OD, AM et MD. Les cinq points A, K, F, H, B sont, comme on l'a dit, également espacés; les deux triangles AMF, FOB sont égaux et semblables au triangle ADB. Les mêmes additions et modifications sont faites pour le côté droit de la figure.

Le calcul des forces extérieures appliquées à chaque pièce est tout à fait analogue à celui qu'on a vu au n° 174. Les appuis en A et C doivent d'abord exercer chacun une réaction verticale exprimée par  $pa$ , en conservant les mêmes notations; la tension T du tirant principal DE, nécessaire pour anéantir la poussée horizontale, sera, en vertu des mêmes raisonnements, égale à  $\frac{pa^2}{2b}$ . Si l'on suppose, comme au n° 174, que le serrage

des tirants secondaires est opéré de manière à détruire la flèche de l'arbalétrier aux points où il est soutenu par les bielles, les forces normales exercées sur l'arbalétrier en B, I, G, L, C auront les valeurs suivantes (\*), savoir :

$$R' = \frac{13}{56} pa \cos \beta \quad \text{au milieu G;} \\$$

$$R'' = \frac{2}{7} pa \cos \beta \quad \text{en I et L;} \\$$

$$R''' = \frac{11}{112} pa \cos \beta \quad \text{en B et C.}$$

(\*) En effet, au point de vue de la flexion subie par l'arbalétrier, on peut (n° 173) assimiler cette pièce à une poutre ayant quatre travées égales et supportant la charge totale  $pa \cos \beta$ , perpendiculairement à sa fibre moyenne.

Posons, pour abréger l'écriture,  $l = \frac{1}{4} \overline{BC}$ ,  $p' = \frac{pa \cos \beta}{4l}$ , et désignons par  $X'$ ,  $X''$  les moments fléchissants en L et G; l'équation (7) du n° 75, appliquée successivement aux groupes de travées LC et GL, GL et IG, donnera

$$4X' + X'' + \frac{1}{2} p' l^2 = 0, \quad X' + 2X'' + \frac{1}{4} p' l^2 = 0;$$

d'où l'on tire facilement

$$X' = -\frac{3}{28} p' l^2, \quad X'' = -\frac{1}{14} p' l^2.$$

Cela posé, on remarquera que  $X'$  est la somme des moments, par rapport au point L, de toutes les forces qui agissent sur LC; donc

$$-\frac{3}{28} p' l^2 = -\frac{1}{2} p' l^2 + R''' l,$$

et, par suite,

$$R''' = \left( \frac{1}{2} - \frac{3}{28} \right) p' l = \frac{11}{28} p' l = \frac{11}{112} pa \cos \beta.$$

De même, en prenant les moments, relativement à G, des forces appliquées à la moitié GC de l'arbalétrier, on aura

$$X'' = -\frac{1}{14} p' l^2 = -2 p' l^2 + 2 R''' l + R'' l,$$

d'où résulte

$$R'' = p' l \left( 2 - \frac{1}{14} - \frac{2 R'''}{p' l} \right) = \frac{8}{7} p' l = \frac{2}{7} pa \cos \beta.$$

Enfin, connaissant  $R''$  et  $R'''$ , on tire  $R'$  de l'équation

$$R' + 2 R'' + 2 R''' = pa \cos \beta,$$

qui donne

$$R' = \frac{13}{56} pa \cos \beta.$$

Les deux forces  $R''$  ne sont autre chose que les compressions des bielles PI et NL; les autres nous serviront à établir des relations entre les inconnues qui restent à trouver.

Ainsi la réaction  $R''$  en C est produite par les composantes, suivant la normale à BC, de la force  $pa$  due à l'appui et de la tension  $Q$  du tirant NC : donc on a

$$\frac{11}{112} pa \cos \beta = pa \cos \beta - Q \sin \alpha,$$

$$Q = \frac{101}{112} pa \frac{\cos \beta}{\sin \alpha}.$$

En procédant de même pour le point B, avec la force  $T$  action mutuelle des deux moitiés de la ferme et la tension  $Q$  du tirant BP, on aura

$$\frac{11}{112} pa \cos \beta = T \sin \beta - S \sin \alpha,$$

ou bien

$$S = \frac{T \sin \beta}{\sin \alpha} - \frac{11}{112} pa \frac{\cos \beta}{\sin \alpha},$$

ce qui donne  $S$ , puisque  $T$  est connu.

Pour avoir les tensions  $Q'$ ,  $Q''$ ,  $S'$ ,  $S''$  des tirants NE, NG, PE, PG, on pourra poser les équations d'équilibre des points P et N. Si l'on choisit pour axes de projection la parallèle et la perpendiculaire à l'arbalétrier, on obtiendra les équations

$$\begin{aligned} Q' + Q'' - Q &= 0, \\ (Q' - Q'' - Q) \sin \alpha + R'' &= 0, \\ S' + S'' - S &= 0, \\ (S' - S'' - S) \sin \alpha + R'' &= 0, \end{aligned}$$

relations d'où l'on déduira très-facilement  $Q'$ ,  $Q''$ ,  $S'$ ,  $S''$ , les quantités  $Q$ ,  $S$ ,  $R''$ , étant déjà déterminées. On trouvera

$$\begin{aligned} Q'' = S'' &= \frac{R''}{2 \sin \alpha} = \frac{1}{7} pa \frac{\cos \beta}{\sin \alpha}, \\ Q' &= \frac{85}{112} pa \frac{\cos \beta}{\sin \alpha}, \\ S' &= \frac{1}{\sin \alpha} \left( T \sin \beta - \frac{27}{112} pa \cos \beta \right). \end{aligned}$$

Enfin, on détermine la pression  $R$  de la bielle  $GE$ , en exprimant que la somme des projections sur la ligne  $GE$  des forces  $R$ ,  $Q''$ ,  $S''$  est égale à la réaction  $R'$  que l'arbalétrier doit recevoir en  $G$ ; donc on a

$$\frac{13}{56} pa \cos \beta = R - (Q'' + S'') \sin \alpha$$

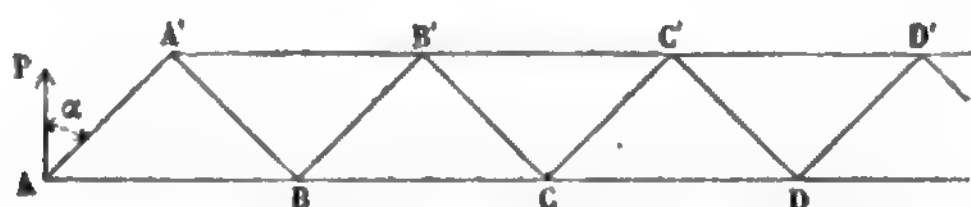
et finalement

$$R = \frac{29}{56} pa \cos \beta.$$

Toutes les forces extérieures qui sont appliquées à chaque pièce étant maintenant connues, la vérification de la résistance ou le calcul des dimensions transversales s'effectueront sans difficulté.

176. *Poutres en treillis.* — Nous considérerons d'abord le système simplifié que représente la fig. 69. La poutre est for-

Fig. 69.



mée de deux cours de tiges horizontales placées dans le même plan vertical, suivant les lignes  $ABCD\dots$ ,  $A'B'C'D'\dots$ ; ces tiges sont censées articulées entre elles aux points  $B, C, \dots$ , et aux points  $B', C', \dots$ . En ces mêmes points, ainsi qu'en  $A$  et  $A'$ , sont articulées d'autres tiges inclinées  $AA'$ ,  $A'B$ ,  $BB'$ ,  $\dots$ , ayant toutes la même longueur, et faisant par conséquent le même angle  $\alpha$  avec la verticale. La poutre ainsi définie peut être chargée d'un poids unique  $2P$  en son milieu, ou d'une série de poids égaux  $2p$  sur les articulations intermédiaires  $B, C, D, \dots$  du cours de tiges placé en dessous.

Dans le premier cas, si le système repose sur deux appuis fixes, l'un placé en  $A$  et le second à l'autre extrémité, il n'y aura que trois forces extérieures, savoir : le poids  $2P$  et deux forces verticales ascendantes, toutes deux égales à  $P$ , qui sont produites par la fixité des points d'appui. La force  $P$  exercée

en A doit être tenue en équilibre par deux forces dirigées suivant AA' et AB, lesquelles sont les pressions ou tensions de ces deux côtés; ces deux forces sont donc déterminées puisqu'on connaît leur direction et leur résultante. En appliquant le théorème du parallélogramme des forces, on voit que AA'

supporte une pression  $\frac{P}{\cos \alpha}$ , et AB une tension  $P \tan \alpha$ . De

même, l'équilibre du point A' exige que la force  $\frac{P}{\cos \alpha}$  soit contre-balancée par la résultante de deux forces dirigées l'une

suisant A'B, l'autre suivant A'B'. Donc la pression  $\frac{P}{\cos \alpha}$  diri-

gée suivant le prolongement de AA' et l'action du côté A'B doivent donner une résultante horizontale; donc ces deux forces, également inclinées, sont égales et symétriquement placées relativement à A'B', c'est-à-dire que A'B éprouve une

tension représentée par  $\frac{P}{\cos \alpha}$ . En continuant d'appliquer le

même raisonnement aux points B, B', C, C', ..., jusqu'au milieu de la pièce où se trouve le poids  $2P$ , on verrait que tous les côtés inclinés sont alternativement pressés et tendus par

la même force  $\frac{P}{\cos \alpha}$ ; que tous les côtés parallèles à AA' sont

pressés et que les côtés parallèles à A'B sont tendus. Quant aux tensions ou pressions des côtés horizontaux, on sait déjà que AB supporte une tension  $P \tan \alpha$ ; dès lors par une projection horizontale de toutes les forces appliquées au sommet B, on voit que la tension de BC est  $3P \tan \alpha$ ; une opération analogue faite sur le sommet C donnera  $5P \tan \alpha$  pour tension de CD, et de même  $7P \tan \alpha$ ,  $9P \tan \alpha$ , ..., seraient les tensions des côtés suivants. La loi est évidente et se continuerait jusqu'au milieu de la poutre. A partir du milieu, les mêmes nombres se reproduiraient en ordre inverse jusqu'à la seconde extrémité analogue au point A. Le même procédé donne tout aussi facilement les actions supportées par les côtés horizontaux supérieurs; ces côtés sont comprimés par des forces dont les intensités sont successivement  $2P \tan \alpha$ ,  $4P \tan \alpha$ ,  $6P \tan \alpha$ , ... pour A'B', B'C', C'D', ... La progres-

sion se maintiendrait encore jusqu'au milieu. D'ailleurs, les forces exercées dans l'autre moitié sont immédiatement connues, à cause de la symétrie.

Prenons le second cas, celui où l'on suppose une série de poids tous égaux à  $2p$  attachés aux articulations intermédiaires B, C, D, ... de la ligne inférieure. Alors les deux appuis doivent fournir des réactions verticales ascendantes P, dont l'intensité sera  $np$ , si  $n$  représente le nombre des poids  $2p$ . Par suite, on voit, comme dans le cas précédent, que la pression de AA' a pour valeur  $\frac{np}{\cos \alpha}$  et que la tension de AB est  $np \tan \alpha$ . En considérant l'équilibre du point A', soumis à trois forces dont une est maintenant connue, on en conclut la tension de A'B exprimée par  $\frac{np}{\cos \alpha}$ , et la pression de A'B' égale à  $2np \tan \alpha$ . On passera au point B, et l'on trouvera la compression de BB' ainsi que la tension de BC, puisque l'on connaît les deux forces exercées sur ce point par AB et A'B; ensuite on se servira de l'équilibre du point B', de celui du point C, etc.; et ainsi de proche en proche, toutes les tensions ou pressions seront déterminées. Voici les résultats :

1°. Les côtés parallèles à AA' supportent des pressions ayant successivement pour intensités  $\frac{np}{\cos \alpha}$ ,  $\frac{(n-2)p}{\cos \alpha}$ ,  $\frac{(n-4)p}{\cos \alpha}$ ,  $\frac{(n-6)p}{\cos \alpha}$ , ... à partir de AA'.

2°. Deux côtés inclinés aboutissant au même point de la ligne horizontale supérieure sont, l'un comprimé, l'autre tendu, par deux forces de même intensité.

3°. Les pressions des côtés horizontaux supérieurs A'B', B'C', C'D', ... ont pour valeurs  $2np \tan \alpha$ ,  $4(n-1)p \tan \alpha$ ,  $6(n-2)p \tan \alpha$ ,  $8(n-3)p \tan \alpha$ , ...

4°. Les tensions des côtés horizontaux inférieurs AB, BC, CD, ... sont exprimées par  $np \tan \alpha$ ,  $p \tan \alpha [n + 2(n-1)]$ ,  $p \tan \alpha [n + 4(n-2)]$ ,  $p \tan \alpha [n + 6(n-3)]$ , ..., et ainsi de suite.

Si l'on veut exprimer par des formules algébriques ces deux séries de nombres,  $i$  représentant le numéro d'ordre de l'un



d'eux dans sa série, on aura pour les pressions des côtés supérieurs

$$2i(n-i+1)p \tan \alpha,$$

et pour les tensions des côtés inférieurs

$$[n+2(i-1)(n-i+1)]p \tan \alpha.$$

Le maximum de la première expression répondrait à  $i = \frac{n+1}{2}$ ,

celui de la seconde à  $i = \frac{n+2}{2}$ ; ils ne peuvent pas se pro-

duire rigoureusement tous les deux, puisque  $i$  ne doit recevoir que des valeurs entières, mais ils se produiront, l'un rigoureusement et l'autre à très-peu près, pour peu que  $n$  soit un nombre notable. Ils ont pour valeurs

$$\frac{1}{2} p \tan \alpha \cdot (n+1)^2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} p \tan \alpha \cdot [(n+1)^2 - 1];$$

c'est-à-dire que si  $N$  désigne le nombre de fois que  $\overline{AB}$  est contenu dans la distance des deux appuis, la plus grande pression ou tension dans les côtés horizontaux sera sensiblement

$$\frac{1}{2} p N^2 \tan \alpha.$$

Lorsqu'on examine comment varient les forces exercées sur les divers corps du système, on voit sans peine, au moyen des résultats ci-dessus donnés, que les pressions et tensions des tiges inclinées diminuent en allant de l'extrémité au milieu de la poutre, tandis que le contraire a lieu pour les tiges horizontales.

Pour passer du système abstrait que nous venons d'étudier aux poutres en treillis, telles qu'on les emploie dans les ponts américains, on fera usage des aperçus approximatifs suivants. D'abord les tiges horizontales articulées à leurs extrémités pourront être remplacées par des poutres dont  $ABCD \dots$ ,  $A'B'C'D' \dots$  seraient les fibres moyennes; car ces poutres n'ayant que de petites dimensions transversales, eu égard à leur ouverture, jouiront d'une flexibilité considérable qui permettra de les assimiler théoriquement à des corps formés d'une série d'éléments joints entre eux par des articulations. En second lieu, on imaginera que la tige inclinée  $AA'$  est sub-

divisée en plusieurs autres tiges de même direction, également espacées et réparties entre AA' et BB', et qu'une transformation tout à fait pareille a été opérée sur les autres tiges inclinées. On conçoit que si  $\overline{AB}$  est une fraction suffisamment petite de la distance totale des appuis, ce second changement n'aura pas encore notablement troublé les tensions et pressions des côtés horizontaux; et quant aux côtés inclinés, les groupes compris entre deux côtés parallèles et consécutifs du premier système travailleront, en somme, à peu près comme les côtés qu'ils ont respectivement remplacés. Ils devront donc aussi avoir, en somme, la même section.

En vertu d'une remarque faite tout à l'heure, il conviendrait que le treillis eût une force plus grande vers les extrémités que vers le milieu, tandis que les longrines ou moises horizontales seraient dans une condition contraire. Des expériences faites en Allemagne sur la rupture des poutres en treillis ont confirmé ce résultat, car la rupture du treillis a eu lieu dans le voisinage des extrémités.

Il est bien entendu que pour autoriser le dédoublement des tiges inclinées, au moyen duquel nous avons passé du système de la *fig.* 68 à la poutre en treillis, il est nécessaire de supposer que les tiges dédoublées ne sont pas liées à celles qu'elles traversent, en d'autres points qu'à leurs extrémités. Cette liaison existe cependant en général dans la pratique; mais comme il serait difficile d'en tenir compte, on devra en faire abstraction, ce qui aura pour effet de donner un surcroît de sécurité.



---

## CHAPITRE NEUVIÈME.

DE LA POUSSÉE DES TERRES ET DE LA STABILITÉ DES MAÇONNERIES.

---

### § I. — De la poussée des terres (\*).

177. *Hypothèse sur le frottement et la cohésion des terres.*  
— Un massif de terre étant soutenu par un mur, la théorie de la poussée des terres a pour objet de déterminer la pression totale que supporte la face postérieure du mur, et la loi de la répartition des forces élémentaires dont cette pression totale est la résultante.

La solution dépend des hypothèses qu'on peut faire sur la nature des forces mutuelles qui agissent entre les molécules de terre lorsqu'elles glissent ou sont sur le point de glisser les unes sur les autres. Supposons d'abord des terres fraîchement remuées et à peu près réduites en poussière : on observe alors qu'elles prennent naturellement un certain talus ou inclinaison relativement au plan horizontal, et que sous cette forme elles restent en équilibre. Les molécules situées à la surface libre du talus se trouvent sollicitées à glisser par la composante tangentielle de la pesanteur ; si donc elles n'obéissent pas à cette action malgré leur mobilité, c'est parce qu'elles éprouvent une résistance égale et contraire ou un frottement de la part des molécules voisines. Mais l'existence du frottement ne suffit pas pour expliquer tous les faits : on ne saurait, par exemple, expliquer ainsi comment certaines terres peuvent se maintenir suivant des talus à pic, car il faudrait supposer au coefficient de frottement une valeur infinie. On lève cette difficulté en considérant les terres comme

---

(\*) Tout ce paragraphe est extrait, à peu près textuellement, du Cours lithographié de M. Belanger, professé à l'École des Ponts et Chaussées, pendant la session 1848-1849.

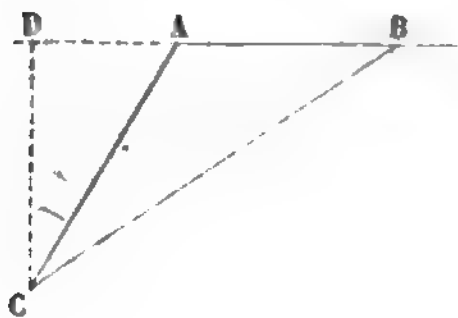
possédant à un certain degré la cohésion qui appartient aux corps solides, et notamment la résistance au glissement transversal simple.

D'après ces considérations, il semble qu'on peut admettre l'hypothèse énoncée par Coulomb, savoir que la force opposée au glissement mutuel de deux portions d'un massif de terre sur un plan commun, se compose de deux termes : 1° le frottement, proportionnel à la pression normale, comme dans le glissement de deux solides l'un sur l'autre; 2° la cohésion, indépendante de la pression normale, mais ayant une valeur déterminée par unité de surface, ce qui veut dire qu'elle est proportionnelle à la surface de séparation.

Cette loi peut être vérifiée et les coefficients de frottement ou de cohésion déterminés pour chaque espèce de terre, par l'expérience, au moyen des formules fournies par la théorie dans les questions ci-après.

**178. PREMIER PROBLÈME.** — Un massif, dont la surface supérieure est dans un plan horizontal AB (*fig. 70*), est terminé latéralement par un plan AC. Il s'agit de déterminer l'angle le plus petit que le talus AC puisse faire avec la verticale, sans qu'il se fasse aucune disjonction dans le massif.

Fig. 70.



Soient

$h$  la hauteur donnée  $\overline{CD}$ ;

$\alpha$  l'angle cherché de AC avec la verticale CD;

$\Pi$  le poids de l'unité de volume du massif;

$f$  le coefficient de frottement des terres composant le massif;

$\gamma$  la cohésion par unité de surface, entre les mêmes terres.

Imaginons par l'horizontale C un plan CB, faisant avec la verticale l'angle  $BCD = \beta$ , et séparant du massif un prisme dont le poids par unité de longueur est représenté par  $P = \frac{1}{2} \Pi h^2 (\tan \beta - \tan \alpha)$ . Ce prisme est en équilibre sous l'action de la pesanteur et des réactions qu'exerce sur lui la partie du massif inférieure au plan CB. Soit  $N$  la somme des composantes normales de ces réactions, et soit  $F$  la somme de leurs composantes parallèles au plan dans le sens CD. On a, en vertu de l'équilibre,

$$N = P \sin \beta \quad \text{et} \quad F = P \cos \beta.$$

Cette force  $F$  ne peut pas dépasser une certaine intensité qui a lieu

seulement lorsque le glissement est sur le point de naître. Dans tout autre cas de repos ou d'équilibre, la force  $F$  est inférieure à cette intensité, laquelle est composée de deux parties, l'une  $fN$  constituant le frottement, l'autre  $\gamma \cdot \overline{CB}$  exprimant la cohésion. On a ainsi la condition

$$F \leq fN + \gamma \cdot \overline{CB}$$

ou bien

$$P \cos \beta \leq fP \sin \beta + \gamma \frac{h}{\cos \beta},$$

ou encore

$$P(1 - f \tan \beta) \leq \gamma h (1 + \tan^2 \beta);$$

en y substituant la valeur ci-dessus de  $P$ , on trouve

$$\tan \alpha \leq \tan \beta - \frac{2\gamma}{\Pi h} \cdot \frac{1 + \tan^2 \beta}{1 - f \tan \beta}.$$

L'inégalité doit être vérifiée, si l'équilibre existe, quelque valeur qu'on attribue à l'angle  $\beta$  : donc la plus petite valeur admissible pour  $\tan \alpha$  est égale au maximum du second nombre relativement à la variable  $\tan \beta$ . Si

l'on pose, pour abréger l'écriture,  $\tan \beta = x$  et  $\frac{\Pi h}{2\gamma} = a$ , on a

$$d \tan \alpha = d \left[ x - \frac{1+x^2}{a(1-fx)} \right] = \frac{1+fa}{fa(1-fx)^2} \left[ (1-fx)^2 - \frac{1+f^2}{1+fa} \right] dx;$$

la dérivée de  $\tan \alpha$  égale à zéro donne, pour la condition du maximum,

$$fx = 1 - \sqrt{\frac{1+f^2}{1+fa}},$$

et la limite inférieure de  $\tan \alpha$  est

$$(1) \quad \begin{cases} \tan \alpha = \frac{1}{f} + \frac{2}{af^2} [1 - \sqrt{(1+f^2)(1+fa)}] \\ = \frac{1}{f} + \frac{2}{f^2} \left[ \frac{2\gamma}{\Pi h} - \sqrt{\frac{2\gamma}{\Pi h} \left( \frac{2\gamma}{\Pi h} + f \right) (1+f^2)} \right]. \end{cases}$$

Telle est la valeur cherchée de  $\tan \alpha$ ; elle dépend, comme on le voit, de la hauteur  $h$ .

La dernière équation résolue par rapport à  $h$  donnera la plus grande hauteur  $h$  sur laquelle le massif puisse se soutenir avec l'inclinaison  $\alpha$ .

Pour une certaine valeur  $h'$  de  $h$ ,  $\tan \alpha$  est nulle : on a alors, en appelant  $a'$  la valeur correspondante de  $a$ ,

$$(a'f + 2)^2 = 4(1+f^2)(1+a'f),$$

d'où résulte

$$a'^2 - 4a'f = 4,$$

$$a' = 2(f + \sqrt{1+f^2}),$$

et par suite

$$(2) \quad h' = \frac{4\gamma}{11}(f + \sqrt{1+f^2}).$$

Pour des valeurs de  $h$  plus petites que  $h'$ ,  $\tan \alpha$  devient négative. En effet, en posant dans l'équation (1)

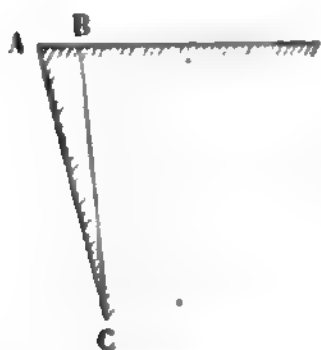
$$b = \frac{1}{a} = \frac{2\gamma}{11h},$$

et différentiant par rapport à cette quantité, on aurait

$$\frac{d \tan \alpha}{db} \cdot \frac{f^2}{2} = 1 - \sqrt{1+f^2} \frac{2b+f}{2\sqrt{b^2+fb}} = 1 - \sqrt{1+f^2} \frac{2b+f}{\sqrt{(2b+f)^2 - f^2}};$$

comme le second membre de cette équation est forcément négatif, il en résulte que  $\tan \alpha$  est une fonction décroissante de  $b$ , c'est-à-dire une

Fig. 71.



fonction croissante de  $h$ . Donc  $\tan \alpha$ , nulle pour  $h = h'$ , doit être négative pour  $h < h'$ . Mais la théorie précédente ne s'applique pas au cas où  $\tan \alpha$  est négative. Si le massif était profilé comme dans la *fig. 71*, un prisme ACB tendrait à se détacher sans frottement et ne serait retenu que par une cohésion soumise à une loi différente de celle qui est exprimée dans l'analyse ci-dessus.

Les formules (1) et (2) peuvent servir à déterminer les constantes  $f$  et  $\gamma$  qui conviennent à un certain terrain, au moyen de deux expériences dans lesquelles, en faisant croître  $h$ , on observerait les valeurs correspondantes de  $\tan \alpha$ . Un plus grand nombre d'expériences permettrait de vérifier les hypothèses qui servent de base à la théorie.

A mesure que  $h$  augmente,  $\tan \alpha$  approche de la limite  $\frac{1}{f}$ , qui conviendrait à une hauteur quelconque si la cohésion disparaissait comme dans le cas des terres fraîchement remuées. Ce résultat est conforme à la théorie connue du frottement. Si l'on remplace  $f$  par  $\frac{1}{\tan T}$  ou  $\frac{\cos T}{\sin T}$ , en appelant  $T$  le complément de l'angle de frottement, on trouve

$$f + \sqrt{1+f^2} = \frac{\cos T}{\sin T} + \frac{1}{\sin T} = \frac{2 \cos^2 \frac{1}{2} T}{2 \sin \frac{1}{2} T \cos \frac{1}{2} T} = \frac{1}{\tan \frac{1}{2} T}$$

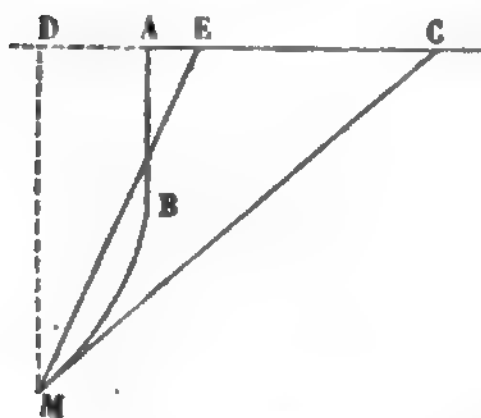
et

$$h' = \frac{4\gamma}{11 \tan \frac{1}{2} T}.$$



179. DEUXIÈME PROBLÈME. — *Un massif d'une nature déterminée pouvant se tenir à pic de A en B (fig. 72), sur une hauteur  $h'$ , on demande*

Fig. 72.



*quelle est la courbe BM du profil inférieur que ce terrain doit avoir pour être à la limite de stabilité en tout point compris entre B et M.*

Soit MC un plan incliné quelconque faisant avec la verticale l'angle  $CMD = \beta$ ; soit la hauteur  $\overline{MD} = y$ ; soit enfin P le poids du prisme mixtiligne ABMC.

L'équilibre de ce prisme exige, comme dans le cas précédent, qu'on ait

$$(3) \quad P(1 - f \tan \beta) \leq \gamma y (1 + \tan^2 \beta).$$

Pour exprimer simplement le poids P, menons par M une droite tellement inclinée, que l'aire du triangle MEC soit égale à celle de ABMC, ou que l'aire DME soit égale à DMBA. Nommant  $\alpha$  l'angle EMD, nous aurons

$$P = \frac{\Pi y^2}{2} (\tan \beta - \tan \alpha),$$

et, en substituant dans (3),

$$\tan \alpha \leq \tan \beta - \frac{2\gamma}{\Pi y} \cdot \frac{1 + \tan^2 \beta}{1 - f \tan \beta}.$$

$\tan \alpha$  doit encore ici égaler le maximum du second membre; d'où l'on conclut, en faisant, pour abréger,  $\frac{\Pi y}{2\gamma} = a$ ,

$$(4) \quad \tan \alpha = \frac{1}{f} + \frac{2}{af^2} [1 - \sqrt{(1 + f^2)(1 + fa)}].$$

Maintenant pour trouver l'équation de la courbe BM, soit  $\overline{AD} = x$  et  $\overline{DE} = z$ ; on a  $\tan \alpha = \frac{z}{y}$  et

$$(5) \quad \frac{yz}{2} = \int_0^x y dx;$$

posons encore  $a = by$  en désignant par  $b$  la constante  $\frac{\Pi}{2\gamma}$ , l'équation (4) deviendra

$$(6) \quad z = \frac{y}{f} + \frac{2}{bf^2} [1 - \sqrt{(1 + f^2)(1 + fby)}].$$

Des équations (5) et (6), par l'élimination de  $z$ , on conclut l'équation

différentielle de la courbe BM,

$$(7) \quad dx = \frac{dy}{f} + \frac{dy}{f^2 by} - \sqrt{1+f^2} \left( \frac{1}{2f\sqrt{1+f^2}by} + \frac{\sqrt{1+f^2}by}{f^2 by} \right) dy.$$

Cette équation s'intègre facilement en remarquant que le dernier terme, égal à  $\frac{\sqrt{1+f^2}}{y} dy$  (sauf un facteur constant) peut, en faisant  $1+fby = u^2$ , être remplacé par

$$\frac{2u^2 du}{u^2 - 1}, \quad \text{ou} \quad 2 du + \frac{du}{u-1} - \frac{du}{u+1},$$

quantité dont l'intégrale est

$$2u + \log \text{hyp} \frac{u-1}{u+1}.$$

La plus petite valeur qu'on puisse assigner à  $y$  est  $h'$  qui répond à  $\tan \alpha = 0$ , et dont l'expression est

$$h' = \frac{4\gamma}{11} (f + \sqrt{1+f^2}), \quad \text{ou} \quad h' = \frac{2}{b} (f + \sqrt{1+f^2}).$$

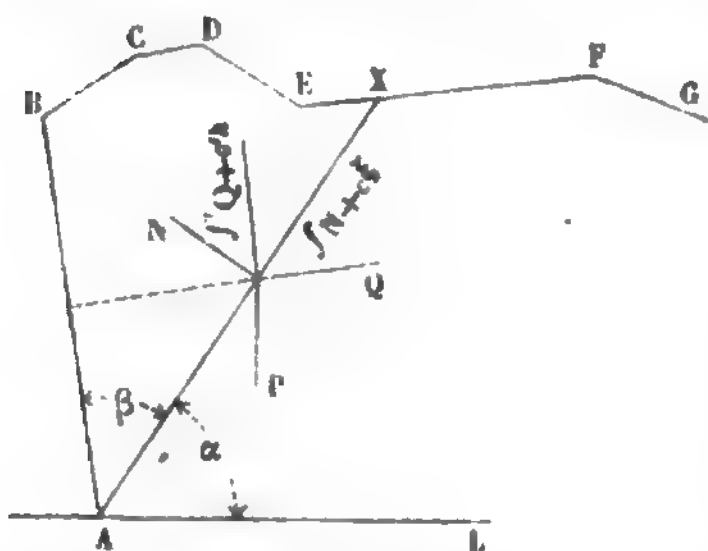
Si l'on substitue cette valeur pour  $y$  dans l'équation (7), on trouve la valeur correspondante de  $\frac{dy}{dx}$ , ou la tangente de l'angle à l'horizon de la courbe BE au point B, qui est

$$2(f + \sqrt{1+f^2}),$$

résultat remarquable en ce qu'il ne dépend plus de  $h'$ , ni par conséquent du coefficient de la cohésion.

**180. Détermination de la poussée totale d'un massif de terre dans un cas particulier.** — Un massif de terre s'appuyant sur la

Fig. 73.



face postérieure AB d'un mur (fig. 73), et ayant sur une longueur indéfinie le profil quelconque, mais constant BCDEFG, on imagine le plan AX, et l'on demande quelle serait par unité de longueur la résultante des forces qu'exercerait sur le massif la paroi AB du mur

à l'instant où le prisme serait sur le point de glisser en des-

cendant le long du plan AX qui resterait fixe, et le long du plan AB qui reculerait sans descendre.

La réaction de la partie du massif inférieure au plan AX, sur le prisme, résulte d'une multitude de forces élémentaires qui peuvent se réduire à trois équivalentes, savoir : une pression normale N, une force tangentielle analogue au simple frottement, proportionnelle à N et représentée par  $fN$ , enfin une force également parallèle au plan, appelée *cohésion*, proportionnelle à la surface AX, et que nous représenterons en conséquence par  $c\xi$ , en faisant  $\overline{AX} = \xi$ , et désignant par  $c$  la cohésion rapportée à l'unité de surface.

La réaction totale du mur sur le prisme peut également se réduire à trois forces ; une pression normale Q, un frottement  $f'Q$  et une cohésion ou adhérence  $c'h$ . Nous désignons par  $f'$  le coefficient de frottement du mur contre les terres, par  $c'$  l'adhérence rapportée à l'unité de surface le long du mur dont la hauteur  $\overline{AB}$  est représentée par  $h$ .

Enfin le prisme est sollicité par la pesanteur. Représentons son poids par P.

Les forces que nous venons d'indiquer satisfont aux conditions d'équilibre, dont l'une est que leur résultante de translation est nulle. Transportons ces forces en un point quelconque, par exemple en un point de la droite AX, et écrivons que les sommes de leurs projections parallèlement et perpendiculairement à AX sont nulles ; nous aurons, en faisant l'angle à l'horizon  $XAL = \alpha$  et  $BAX = \beta$ ,

$$fN - P \sin \alpha + Q \sin \beta + f'Q \cos \beta + c'h \cos \beta + c\xi = 0,$$

$$N - P \cos \alpha - Q \cos \beta + f'Q \sin \beta + c'h \sin \beta = 0;$$

d'où, en éliminant N,

$$Q = \frac{P (\sin \alpha - f \cos \alpha) - c'h (\cos \beta - f \sin \beta) - c\xi}{\sin \beta + f \cos \beta + f' (\cos \beta - f \sin \beta)}.$$

Cette formule se simplifie en remplaçant  $f$  par  $\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$  et  $f'$  par  $\frac{\sin \varphi'}{\cos \varphi'}$  ; c'est-à-dire en représentant par  $\varphi$  et  $\varphi'$  les angles de frot-

tement des terres sur elles-mêmes et contre le mur. On obtient successivement

$$Q = \frac{P \sin(\alpha - \varphi) - c' h \cos(\beta + \varphi) - c \xi \cos \varphi}{\sin(\beta + \varphi) + f' \cos(\beta + \varphi)},$$

$$(8) \quad \frac{Q}{\cos \varphi'} = \frac{P \sin(\alpha - \varphi) - c' h \cos(\beta + \varphi) - c \xi \cos \varphi}{\sin(\beta + \varphi + \varphi')}.$$

La force  $\frac{Q}{\cos \varphi'}$  résultante de  $Q$  et de  $fQ$  étant ainsi connue, en la composant avec  $c' h$ , on aurait l'intensité de la résultante totale demandée.

181. *Détermination du plan de rupture et de la poussée totale en négligeant la cohésion.* — Le plan AX indiqué dans l'énoncé précédent est considéré comme variable; il s'agit de déterminer la position de ce plan à laquelle correspond la plus grande valeur de la force  $\frac{Q}{\cos \varphi'}$ , en vertu des frottements, et en supposant qu'on néglige la cohésion des terres et leur adhérence au mur.

Le plan AX déterminé par la condition que la réaction du mur nécessaire pour l'équilibre soit un maximum, s'appelle ordinairement *plan de rupture*; comme l'a remarqué Coulomb, si la réaction du mur venait à être inférieure à l'intensité nécessaire, et que la rupture de massif dût s'effectuer suivant un plan, ce serait en effet suivant celui-là qu'elle aurait lieu.

D'après l'hypothèse, il faut, dans la formule (8), faire  $c = 0$ ,  $c' = 0$ ;  $\frac{Q}{\cos \varphi'}$  est alors la réaction totale du mur. Désignons-la par  $R$ ; la formule (8) se réduit à

$$(9) \quad R = P \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\sin(\beta - \varphi + \varphi')}.$$

On obtiendrait facilement et directement cette équation de la manière suivante. Représentons dans la *fig. 74* la force  $R$  faisant l'angle  $\varphi'$  avec la perpendiculaire à AB. Soit de même  $S$  la réaction du plan AX, résultante de  $N$  et de  $fN$ , et faisant



et la formule (9) devient

$$R = \frac{1}{2} \pi \cdot \overline{AT} \cdot \overline{KX} \frac{\sin(\alpha - \varphi')}{\sin(\beta + \varphi + \varphi')}.$$

Cela posé, voici comment M. Poncelet (\*) procède pour trouver le point X qui donne à la pression R sa plus grande valeur. Le rapport de  $\sin(\alpha - \varphi)$  à  $\sin(\beta + \varphi + \varphi')$  se remplace par celui de deux droites de la figure : pour cela on mène AO faisant avec AB l'angle  $\varphi + \varphi'$ , et, par conséquent, avec AX l'angle  $\beta + \varphi + \varphi'$ ; on mène AM faisant avec l'horizontale AL l'angle  $\varphi$ , et conséquemment avec AX l'angle  $\alpha - \varphi$ ; puis on mène XX' parallèle à AM, de sorte que, dans le triangle AXX', l'angle A =  $\beta + \varphi + \varphi'$  et l'angle X =  $\alpha - \varphi$ . On en conclut

$$\frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\sin(\beta + \varphi + \varphi')} = \frac{\overline{AX'}}{\overline{XX'}},$$

et, par conséquent,

$$R = \frac{1}{2} \pi \overline{AT} \cdot \overline{KX} \cdot \frac{\overline{AX'}}{\overline{XX'}}.$$

Il y a ici trois variables  $\overline{KX}$ ,  $\overline{XX'}$ ,  $\overline{AX'}$ , qui dépendent de la position du point X et qui sont dans trois directions différentes. On en remplace deux par d'autres qui soient dans la direction de la troisième : on mène KK' parallèle à AM et à XX' et l'on a

$$\overline{KX} = \overline{K'X'} \frac{\overline{OM}}{\overline{OA}}, \quad \overline{XX'} = \overline{OX'} \frac{\overline{AM}}{\overline{OA}},$$

d'où résulte

$$R = \frac{1}{2} \pi \frac{\overline{AT} \cdot \overline{OM}}{\overline{AM}} \cdot \frac{\overline{K'X'} \cdot \overline{AX'}}{\overline{OX'}}.$$

La quantité connue  $\frac{\overline{AT} \cdot \overline{OM}}{\overline{AM}}$  peut s'exprimer plus simplement en remarquant que  $\overline{AT} \cdot \overline{OM}$  est deux fois l'aire du triangle AOM, et qu'en la divisant par  $\overline{AM}$  considérée comme base,

(\*) *Mémoire sur la stabilité des revêtements et de leurs fondations*, inséré au n° 13 du *Mémorial de l'officier du Génie*, 1840.



on a la distance du sommet O à AM ou  $\overline{AO} \sin OAM$ . Donc

$$(10) \quad R = \pi \cdot \overline{AO} \cdot \frac{\overline{K'X'} \cdot \overline{AX'}}{\overline{OX'}} \cdot \sin OAM.$$

M. Poncelet détermine par des considérations géométriques le point X qui correspond au maximum de  $\frac{\overline{K'X'} \cdot \overline{AX'}}{\overline{OX'}}$ . Le calcul différentiel le donne aussi très-aisément. Soient, en effet,  $\overline{OA} = a$ ,  $\overline{OK'} = k$  et  $\overline{OX'} = x$ , on a

$$\frac{\overline{K'X'} \cdot \overline{AX'}}{\overline{OX'}} = \frac{(x - k)(a - x)}{x} = a + k - \frac{ak}{x} - x,$$

expression dont la première dérivée est  $\frac{ak}{x^2} - 1$  et la seconde  $-\frac{2ak}{x^3}$ ; d'où il suit qu'en faisant  $x = \sqrt{ak}$  la fonction dont il s'agit devient un maximum, et que sa valeur est  $a + k - 2\sqrt{ak}$ . La valeur de R devient alors, en remplaçant  $\overline{AO}$  par  $a$ ,

$$(11) \quad R = \frac{1}{2} \pi \sin OAM \cdot (a - \sqrt{ak})^2,$$

ce qu'on peut encore écrire de cette manière

$$(12) \quad R = \frac{1}{2} \pi \sin OAM \cdot \overline{AX'}^2,$$

en notant que le point X' est déterminé par la relation

$$(13) \quad \overline{OX'} = \sqrt{\overline{AO} \cdot \overline{OK'}}.$$

*Remarque I.* — L'angle OAM, égal à  $BAM + \varphi + \varphi'$ , est par conséquent égal à  $BAL + \varphi'$ ; d'où il suit que  $\sin OAM$  est égal au cosinus de l'angle que fait avec la verticale une droite faisant avec AB, du côté opposé au massif, un angle  $\varphi'$  égal à celui du frottement des terres sur le mur.

*Remarque II.* — Les lignes  $KK'$ ,  $XX'$  MA étant parallèles, il en résulte que les longueurs  $\overline{OX'}$ ,  $\overline{AO}$ ,  $\overline{OK'}$  sont respectivement proportionnelles à  $\overline{OX}$ ,  $\overline{OM}$ ,  $\overline{OK}$ ; la condition (13)

peut donc encore prendre la forme

$$\overline{OX}^2 = \overline{OM} \cdot \overline{OK},$$

ce qui permet de trouver  $\overline{OX}$  à priori par une construction ou par le calcul.

*Remarque III.* — L'équation (13) donne  $\frac{\overline{OX'}}{\overline{AO}} = \frac{\overline{OK'}}{\overline{OX}}$ . Les parallèles  $XX'$ ,  $KK'$  donnent  $\frac{\overline{OK'}}{\overline{OX'}} = \frac{\overline{OK}}{\overline{OX}}$ . Par conséquent  $\frac{\overline{OX'}}{\overline{AO}} = \frac{\overline{OK}}{\overline{OX}}$ ; d'où il suit que la droite  $KX'$  est parallèle à  $AX$ .

*Remarque IV.* — L'angle  $AOK$  peut être petit et le point  $O$  tellement éloigné de  $AK$ , qu'il soit incommode d'opérer graphiquement pour connaître  $\overline{OK'}$ ,  $\overline{OA}$ , et, par conséquent,  $\overline{OX'}$  et  $\overline{AX'}$ . On peut faire ces déterminations par le calcul.

Soient  $\theta$  l'angle donné  $OKA$  et  $\zeta$  l'angle  $OAK$ , dont la valeur, avec la disposition de la *fig. 75*, est  $\varphi + \varphi' - BAK$ . On a

$$\begin{aligned}\overline{OA} &= \overline{AK} \cdot \frac{\sin \theta}{\sin (\theta + \zeta)}, \\ \overline{OK} &= \overline{AK} \cdot \frac{\sin \zeta}{\sin (\theta + \zeta)}, \\ \overline{OK'} &= \overline{OK} \cdot \frac{\overline{OA}}{\overline{OK} + \overline{KM}}.\end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à calculer  $\overline{AX'} = \overline{OA} - \sqrt{\overline{OA} \cdot \overline{OK'}}$ .

*Remarque V.* — La droite  $AO$  peut être parallèle à  $KO$ . Alors  $\overline{OA}$  et  $\overline{OK'}$  sont infinis; mais  $\overline{AK'}$  est fini et égal à  $\overline{KM}$ , et  $\overline{AX'}$  a pour valeur  $\frac{1}{2} \overline{KM}$ . En effet, l'équation (13) peut s'écrire

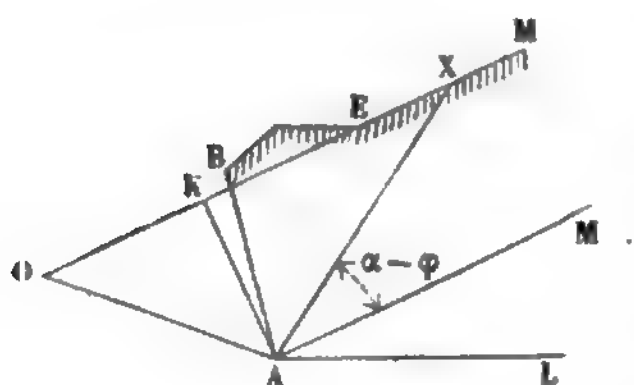
$$(\overline{OK'} + \overline{K'X'})^2 = \overline{OK'} (\overline{OK'} + \overline{AK'}), \text{ ou } 2\overline{K'X'} + \frac{\overline{K'X'}^2}{\overline{OK'}} = \overline{AK'},$$

équation qui, pour  $\overline{OK'} = \infty$ , devient

$$\overline{K'X'} = \frac{1}{2} \overline{AK'} = \frac{1}{2} \overline{KM}.$$

*Remarque VI.* — Les droites KM et AM peuvent être paral-

Fig. 76.



lèles (fig. 76). Dans ce cas, les points O, K', X' se confondent et l'on a pour le maximum, ou plutôt la limite de R, l'expression  $\frac{\Pi}{2} \sin OAM \cdot \overline{OA}^2$ ; on le trouverait directement en posant pour un prisme

quelconque AKX, les équations

$$R = P \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\sin(\beta + \varphi + \varphi')} = P \frac{\overline{OA}}{\overline{OX}},$$

$$P = \frac{\Pi}{2} \overline{KX} \cdot \overline{OA} \sin OAM,$$

d'où

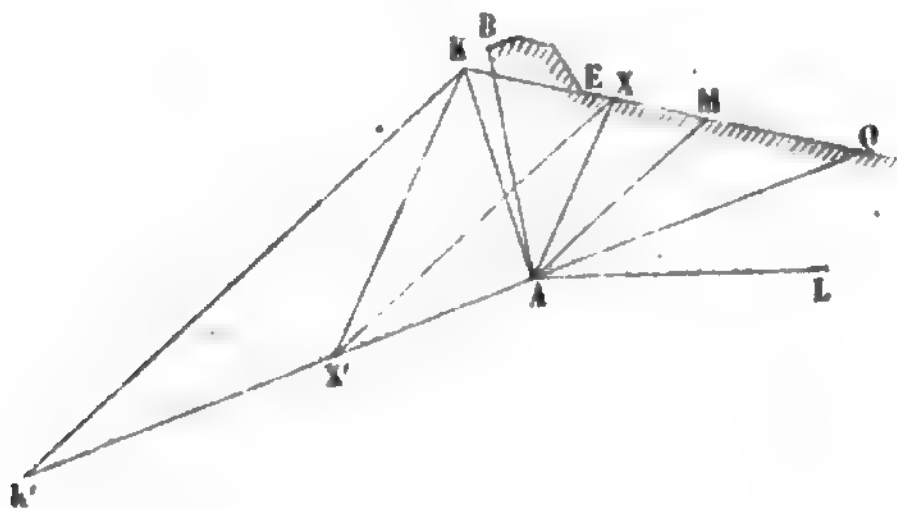
$$R = \frac{1}{2} \Pi \sin OAM \cdot \overline{OA}^2 \cdot \frac{\overline{KX}}{\overline{OX}},$$

quantité dont le maximum répondant à  $\overline{KX} = \infty = \overline{OX}$  est

$$R = \frac{1}{2} \Pi \sin OAM \cdot \overline{OA}^2.$$

*Remarque VII.* — La rencontre O des droites KM, AK' peut être du côté du massif au delà de M (fig. 77). En répétant pour

Fig. 77.



ce cas les raisonnements précédents, on reconnaît sans difficulté que l'expression de la pression totale sur AB est en-

core

$$R = \frac{1}{2} \pi \sin OAM \cdot \overline{AX'}^2,$$

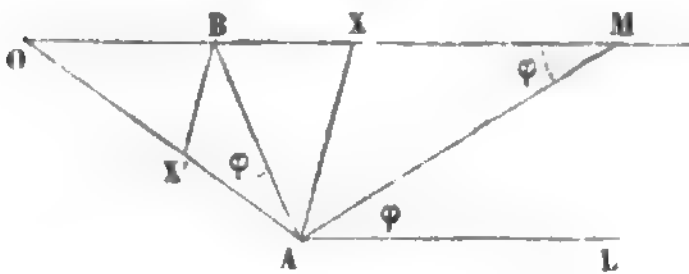
le point  $X'$  étant déterminé par la relation  $\overline{OX'}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OK'}$ .

Les remarques I, II, III ci-dessus subsistent également ; dans la quatrième, il faudra poser

$$\overline{OK'} = \overline{OK} \cdot \frac{\overline{OA}}{\overline{OK} - \overline{KM}} \quad \text{et} \quad \overline{AX'} = \sqrt{\overline{OA} \cdot \overline{OK'}} - \overline{OA}.$$

182. *Plan de rupture et poussée totale quand on néglige la cohésion et le frottement entre les terres et le mur qui les soutient.* — Les auteurs qui, avant M. Poncelet, se sont occupés de la poussée des terres, négligeaient le frottement des murs de soutènement. Si à cette simplification théorique on joint l'hypothèse que la surface supérieure du massif MB soit horizontale, on arrive à un résultat remarquable par sa simplicité.

Fig. 78.



L'angle  $\varphi'$  étant supposé nul, les trois angles MAL, BAO, AMB (*fig. 78*) sont égaux. Les deux triangles AOB, AOM sont semblables, comme ayant leurs

angles égaux, et donnent

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OM}}{\overline{OA}} \quad \text{ou} \quad \overline{OA}^2 = \overline{OB} \cdot \overline{OM}.$$

On a d'ailleurs, suivant la remarque II ci-dessus,

$$\overline{OX'}^2 = \overline{OB} \cdot \overline{OM};$$

par conséquent  $\overline{OA} = \overline{OX'}$ ; d'où il suit que l'angle OAX est égal à OXA, lequel est égal à XAL. Donc AX est bissectrice de l'angle OAL, et par conséquent de l'angle BAM. (Théorème donné par de Prony, en 1802, pour le cas particulier d'une paroi verticale, et par Français, en 1820, pour le cas d'une paroi inclinée.)

D'après la remarque III, BX' est parallèle à AX, et, par conséquent, dans les hypothèses ci-dessus énoncées, le triangle

$OBX'$  est isocèle. Donc  $\overline{AX'} = \overline{BX}$  ; d'où l'on conclut

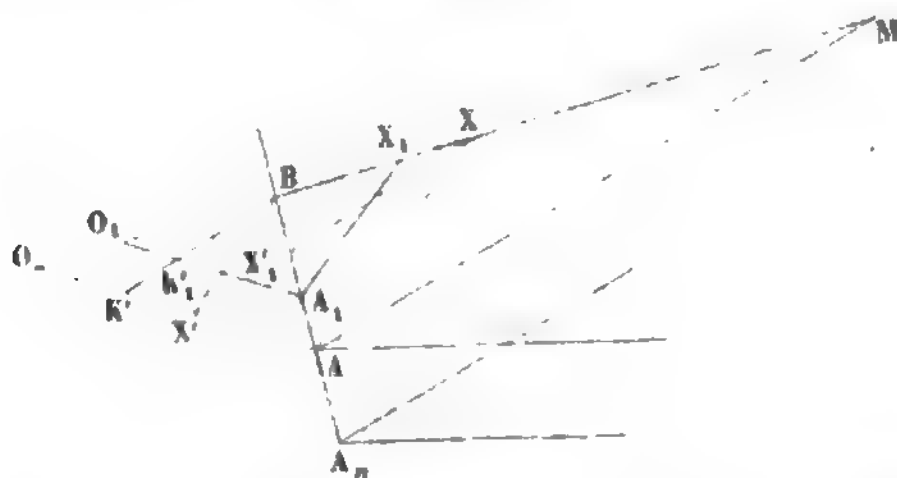
$$R = \frac{1}{2} \pi \sin B A L \cdot \overline{BX}^2.$$

L'état actuel de la science ne permet plus d'admettre ces résultats.

183. *Répartition de la poussée totale sur le mur dans l'hypothèse d'un terrain à profil rectiligne ; indications succinctes sur le cas général.* — En admettant que sur toute portion  $AB$  de la paroi  $A_n B$ , portion prise à partir du sommet  $B$ , la poussée du massif soit égale au maximum  $R$  ou  $\frac{1}{2} \pi \sin O A M \cdot \overline{AX'}^2$  trouvé précédemment, il s'agit de déterminer le centre de poussée sur  $A_n B$ , c'est-à-dire le point de passage de la résultante de toutes les pressions élémentaires réparties sur  $A_n B$  et faisant partout avec cette paroi l'angle complément de  $\varphi'$ .

La solution est très-simple dans le cas où la surface supérieure du massif est un plan  $MB$  (*fig. 79*), ayant d'ailleurs une

Fig. 79.



inclinaison quelconque. L'expression de la poussée sur  $BA$ , variable avec la longueur  $\overline{BA}$ , est alors proportionnelle au carré de cette longueur. En effet, pour deux points  $A, A_1$ , auxquels correspondent des points  $X, X_1$ , on a

$$\overline{OX'}^2 = \overline{OK'} \cdot \overline{OA} \quad \text{et} \quad \overline{O_1 X'_1}^2 = \overline{O_1 K'_1} \cdot \overline{O_1 A_1}.$$

Or

$$\frac{\overline{OK'}}{\overline{O_1 K'_1}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{O_1 A_1}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{BA_1}};$$

done

$$\frac{\overline{OX'}^2}{\overline{O_1 X'_1}^2} = \frac{\overline{BA}^2}{\overline{BA_1}^2}.$$

On voit ainsi que les lignes  $\overline{OA}$  et  $\overline{OX'}$  sont toutes deux dans un rapport constant avec  $BA$ , et, par suite, qu'il en est de même de la différence  $\overline{OA} - \overline{OX'}$  ou de  $\overline{AX'}$ . (Le lieu des points  $X'$  est une droite passant en  $B$ .)

En représentant par  $z$  la longueur  $\overline{BA}$  prise à partir de l'origine ou extrémité fixe  $B$ , et en désignant par  $C$  la constante  $\frac{1}{2} \pi \sin OAM \cdot \frac{\overline{AX'}^2}{\overline{BA}^2}$ , on peut donc poser pour la poussée sur  $AB$

$$R = Cz^2;$$

donc la poussée élémentaire, sur une longueur  $dz$  accroissement de  $z$ , serait

$$dR = 2Czdz.$$

Toutes les poussées élémentaires, depuis  $B$  jusqu'à  $A_n$ , sont des poussées parallèles dont la résultante passe en un point ou centre, dont la distance  $Z$  au point  $B$  est déterminée par la propriété des moments, savoir :

$$Z = \frac{\int_0^{z_n} 2Cz^2 dz}{Cz_n^2} = \frac{2}{3} z_n.$$

Donc le centre de la poussée sur  $BA_n$  est au tiers de cette longueur à partir de l'extrémité inférieure.

Lorsque le profil transversal du massif n'est pas très-accidenté, on peut admettre que le centre de pression est à peu près au tiers de la hauteur de la partie de mur considérée. Dans le cas le plus général, sachant trouver la poussée  $R$  sur la portion  $BA$  de la paroi, on construirait la courbe représentative de ces poussées en prenant  $\overline{BA}$  pour abscisse et  $R$  pour ordonnée correspondante. La poussée élémentaire en chaque point du mur serait proportionnelle au coefficient angulaire de la tangente à cette courbe; et comme toutes les poussées élémentaires sont parallèles, on trouverait le point d'application de la résultante par le théorème des moments.

184. *De la butée des terres.* — M. Poncelet, dans le Mémoire déjà cité, a étendu la théorie précédente à la butée des terres, c'est-à-dire à la résistance que les terres établies au pied d'un mur, du côté opposé au



massif soutenu, exercent sur le mur en sens contraire du mouvement que le massif principal tendrait à lui faire prendre. A cet effet, il considère dans les terres en avant du mur un prisme qu'il détermine par la condition que ce prisme exige le minimum de force de la part du mur pour être sur le point de glisser en remontant sur le plan de rupture. La marche à suivre dans cette théorie est semblable à celle qui convient au cas de la poussée, et les résultats ont une parfaite analogie, comme on va le voir.

D'abord, si, en conservant dans la *fig.* 73 le profil BCDEF et les lignes AB, AX, dont la première représente la face antérieure d'un mur et la seconde un plan de rupture hypothétique, on demande la résultante des forces qu'exercerait sur le massif la paroi AB à l'instant où le prisme BAX serait sur le point de glisser en montant le long du plan AX, qui resterait fixe, et le long du plan AB, qui avancerait sans monter, on trouve, les notations étant les mêmes qu'au n° 180,

$$fN + P \sin \alpha - Q \sin \beta + f'Q \cos \beta + c'h \cos \beta + c\xi = 0,$$

$$N - P \cos \alpha - Q \cos \beta - f'Q \sin \beta - c'h \sin \beta = 0;$$

d'où résultent les équations

$$Q = \frac{P(\sin \alpha + f \cos \alpha) + c'h(\cos \beta + f \sin \beta) + c\xi}{\sin \beta - f \cos \beta - f'(\cos \beta + f \sin \beta)},$$

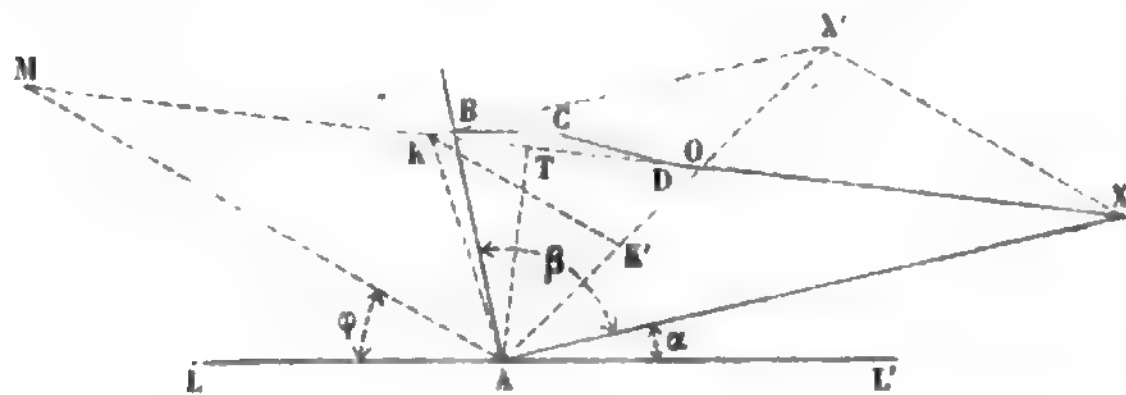
$$(14) \quad \frac{Q}{\cos \varphi'} = \frac{P \sin(\alpha + \varphi) + c'h \cos(\beta - \varphi) + c\xi \cos \varphi}{\sin(\beta - \varphi - \varphi')}.$$

Secundement, on fait  $c = 0$  et  $c' = 0$ , et l'on demande de trouver la direction du plan de rupture à laquelle répond le minimum de la force  $\frac{Q}{\cos \varphi'}$ , donnée par la formule (14). D'après ces hypothèses, si l'on pose  $B = \frac{Q}{\cos \varphi'}$ , on a

$$(15) \quad B = P \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\sin(\beta - \varphi - \varphi')}.$$

Le polygone ABCDXA se remplace d'abord par le triangle équivalent AKX

Fig. 80.



(*fig.* 80), et alors il en résulte  $P = \frac{1}{2} \Pi \cdot \overline{AT} \cdot \overline{KX}$ . On mène ensuite AM fai-

sant avec l'horizon l'angle  $MAL = \varphi$ , puis  $\overline{XX'}$  parallèle à  $\overline{AM}$  et faisant par conséquent avec la direction cherchée  $AX$  l'angle  $\alpha + \varphi$ ; enfin on trace  $AO$  faisant avec  $AB$  l'angle  $\varphi + \varphi'$  et par conséquent avec  $AX$  l'angle  $\beta - \varphi - \varphi'$ . De là on conclut

$$B = P \frac{\overline{AX'}}{\overline{XX'}} = \frac{1}{2} \pi \cdot \overline{AT} \cdot \overline{KX} \cdot \frac{\overline{AX'}}{\overline{XX'}}.$$

$KK'$  étant une parallèle à  $AM$ , cela donne

$$\overline{KX} = \overline{K'X'} \cdot \frac{\overline{MO}}{\overline{AO}}, \quad \overline{XX'} = \overline{OX'} \cdot \frac{\overline{AM}}{\overline{AO}},$$

et par suite

$$B = \frac{1}{2} \pi \cdot \overline{AO} \frac{\overline{K'X'} \cdot \overline{AX'}}{\overline{OX'}} \sin OAM.$$

Pour trouver la valeur de  $\overline{OX'}$  qui correspond au minimum de  $B$ , on fait  $\overline{OX'} = x$ ,  $\overline{OA} = a$ ,  $\overline{OK'} = k$ , d'où

$$\frac{\overline{K'X'} \cdot \overline{AX'}}{\overline{OX'}} = \frac{(x+k)(a+x)}{x} = a + k + \frac{ak}{x} + x,$$

dont le minimum répond à  $x = \sqrt{ak}$ .

On conclut le minimum de  $B$ , savoir

$$B = \frac{1}{2} \pi \sin OAM (a + \sqrt{ak})^2,$$

ou bien

$$B = \frac{1}{2} \pi \sin OAM \cdot \overline{AX'}^2,$$

en même temps que

$$\overline{OX'} = \sqrt{\overline{OA} \cdot \overline{OK'}},$$

résultats analogues aux formules (12) et (13) du n° 181.

On peut faire sur le cas de la butée des remarques analogues à celles du n° 181. Ainsi, par exemple, on a

$$\overline{OX'}^2 = \overline{OM} \cdot \overline{OK},$$

et  $KX'$  est parallèle à  $AX$ .

Dans le cas particulier où la surface supérieure du massif serait horizontale et où l'on négligerait le frottement du mur, on arriverait à conclure, par un raisonnement analogue à celui du n° 182, que la ligne  $AX$  est bissectrice de l'angle  $OAL'$ .

Quant à la répartition de la butée totale sur le mur, c'est un problème dont la solution est identique à celle qui est donnée au n° 183, pour le cas de la poussée.

## § II. — De la stabilité des maçonneries (\*).

185. *Généralités.* — Lorsque la forme d'un massif de maçonnerie est telle, qu'elle rentre dans la définition d'une pièce droite ou courbe (n° 33) ou que le massif peut être considéré comme formé de plusieurs de ces pièces, pour calculer les pressions et tensions intérieures dans les divers points, sous l'action de forces connues, on suivra les indications données au n° 35.

Il arrive souvent, surtout si la maçonnerie est construite en pierres taillées et appareillées régulièrement, qu'on fait abstraction de la cohésion des mortiers, et qu'on s'impose pour condition d'avoir une stabilité suffisante, même en supposant cette cohésion nulle. Comme en réalité elle ne l'est pas, on obtient ainsi un surcroît de sécurité; le mortier n'est alors regardé que comme un moyen de bien asseoir les pierres les unes sur les autres, malgré l'imperfection de la taille. Dans ce cas, toute la portion du massif située d'un même côté d'un des plans d'assise devra être considérée comme un corps posé sur une base, sans adhérence. Maintenant, si les forces appliquées à cette portion peuvent être réduites à une seule, l'équilibre exigera d'abord, comme on le sait, qu'elle fasse avec la normale au plan d'assise un angle plus petit que l'angle de frottement, et qu'elle passe à l'intérieur de la base. Il faudra en outre qu'elle tende à produire une pression sur cette base, mais que la pression par unité de surface en un point quelconque n'atteigne pas la limite indiquée par l'expérience, comme le plus grand effort dont on peut charger la matière sans avoir d'altération à craindre. C'est ce qu'on vérifiera en calculant la pression maximum au moyen des considérations exposées dans le § V du chapitre I<sup>er</sup>. Une vérification analogue sera faite pour tous les plans d'assise, ou tout au moins pour un certain nombre de plans dont deux consécutifs comprendraient entre

---

(\*) Dans les cours de construction sont traitées diverses questions qui pourraient être comprises sous ce titre, comme la stabilité des voûtes, des bajoyers d'écluse, d'une fondation en béton, soumise à la sous-pression de l'eau, etc. C'est pourquoi nous nous contenterons ici de quelques explications succinctes.

eux plusieurs assises. Nous laisserons de côté, comme peu pratique, le cas où les forces ne seraient pas réductibles à une seule.

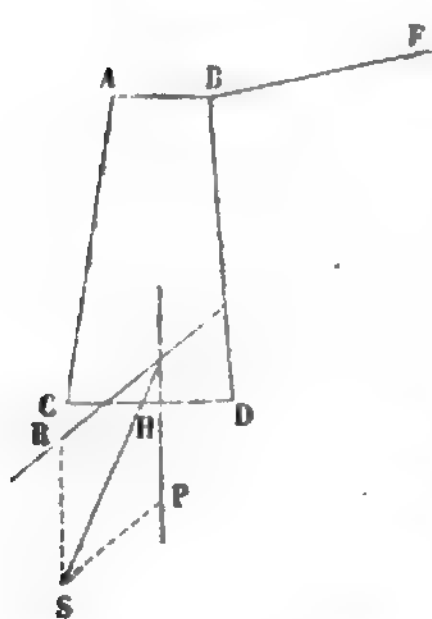
Dans certains cas, il peut y avoir diverses manières d'assimiler un massif de maçonnerie à un prisme, et l'on serait ainsi conduit à considérer plusieurs fibres moyennes. Prenons, par exemple, un mur de réservoir, auquel nous attribuerons, pour plus de simplicité, la forme d'un parallélépipède rectangle, ayant deux faces horizontales et quatre faces verticales. Ce mur, envisagé d'abord comme un prisme dont les sections normales seraient le profil même du mur (c'est-à-dire des plans verticaux perpendiculaires à la face mouillée), sera un solide chargé transversalement et exposé à la flexion. Au contraire, si les plans horizontaux étaient pris pour sections normales, chaque section supporterait une force inclinée, résultante des actions exercées par l'eau et la pesanteur sur la portion du mur située au-dessus du plan dont il s'agit. On pourrait imaginer une foule d'exemples semblables. Quel est alors l'axe qui devra être pris pour fibre moyenne, quand on voudra s'assurer de la stabilité? C'est ce qu'il serait peut-être difficile d'indiquer clairement d'une manière générale, et le sentiment de l'ingénieur devra souvent lui servir de guide. Ainsi, dans l'exemple ci-dessus, si le mur est établi sur des fondations très-solides, on peut admettre qu'elles annulent complètement par leur résistance la flexion transversale qui tend à se produire, et il suffirait alors de vérifier la stabilité au second point de vue. Si le terrain de fondation offrait peu de résistance aux actions horizontales, le premier point de vue ne devrait pas être négligé, et la prudence commanderait alors de faire deux vérifications au lieu d'une.

La stabilité des massifs de maçonnerie est toujours naturellement subordonnée à celle des fondations, mais l'appréciation de cette dernière est bien plus dans le domaine de la pratique et de l'expérience acquise que dans celui de la théorie. Nous nous bornerons à rappeler que lorsqu'un ouvrage est soumis à des forces dont la résultante ne passe pas au centre de la base d'appui, la pression n'est point uniformément répartie ; quoiqu'il soit à peu près impossible d'indiquer

la répartition véritable qui se ferait sur un terrain plus ou moins compressible, ce fait ne doit pas être perdu de vue, quand on fixe l'étendue de la base. •

186. *Stabilité d'un mur de soutènement.* — Cette question est une des applications les plus simples des généralités qu'on a vues au n° 185. Soient ABCD (fig. 81) le profil transversal du

Fig. 81.



mur, et BE celui du terrain. Admettons d'abord que les fondations sont très-résistantes. On déterminera, comme il est dit au n° 182, la poussée totale R sur la face BD du mur et on la composera avec le poids P de ce mur, ce qui donnera la résultante S. Pour l'équilibre, il faudra : 1° que S passe entre les points C et D ; 2° que cette force fasse avec la verticale un angle plus petit que l'angle du frottement du mur sur sa base ; 3° que la pression par unité de sur-

face, en un point quelconque de CD, ne dépasse pas une certaine limite dépendant de la nature de la maçonnerie, ce qu'on pourra vérifier à l'aide des formules du n° 32, si la base CD est un rectangle. Il serait bon de faire un calcul analogue, en prenant pour base, au lieu de CD, d'autres sections horizontales du mur, en nombre plus ou moins grand, suivant la hauteur.

Si le mur s'appuie en CD sur un terrain compressible, le minimum au-dessous duquel ne devra pas descendre la distance  $\overline{CH}$  croîtra en même temps que la compressibilité.

S'il y avait de la terre du côté de AC sur une certaine hauteur, il serait facile de tenir compte de la butée (n° 184) ; mais cette force pourra être négligée dans les cas les plus ordinaires.

Ici, comme dans l'exemple du mur de réservoir, donné au n° 185, la flexion peut se produire avec des circonstances locales favorables ; il faudrait s'assurer alors (n° 19) que les dimensions sont suffisantes pour résister à cet effet.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE.

**RECUEIL**  
**DE**  
**TABLES NUMÉRIQUES**  
**POUR FACILITER DIVERS CALCULS**  
**sur**  
**LA RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX.**



**TABLE I. — Coefficient  $\frac{A}{B}$  de la partie principale de la poussée due à un poids isolé, placé en un point quelconque de l'arc. (Voir les nos 103 et 111.)**

N. B. Le nombre donné par la table s'annule pour  $m = 1,00$ .

RAPPORT $\frac{2\gamma}{\pi}$	RAPPORT $m = \frac{\theta}{\pi}$									
	0,00	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45
0,12	4,125	4,112	4,075	4,012	3,926	3,816	3,682	3,526	3,348	3,149
0,13	3,804	3,793	3,758	3,700	3,621	3,519	3,396	3,251	3,087	2,903
0,14	3,529	3,518	3,486	3,432	3,359	3,264	3,150	3,016	2,863	2,692
0,15	3,291	3,281	3,251	3,200	3,132	3,043	2,936	2,811	2,669	2,509
0,16	3,082	3,072	3,044	2,997	2,933	2,862	2,749	2,632	2,498	2,349
0,17	2,897	2,888	2,862	2,817	2,757	2,679	2,584	2,474	2,348	2,207
0,18	2,733	2,725	2,700	2,657	2,600	2,526	2,437	2,333	2,214	2,081
0,19	2,586	2,578	2,554	2,514	2,460	2,390	2,305	2,206	2,094	1,968
0,20	2,453	2,446	2,423	2,385	2,334	2,267	2,187	2,093	1,985	1,866
0,21	2,333	2,326	2,304	2,268	2,219	2,156	2,079	1,989	1,887	1,774
0,22	2,224	2,217	2,196	2,162	2,115	2,054	1,981	1,895	1,798	1,689
0,23	2,124	2,117	2,098	2,064	2,019	1,961	1,891	1,809	1,716	1,612
0,24	2,032	2,026	2,007	1,975	1,932	1,876	1,809	1,730	1,641	1,541
0,25	1,947	1,941	1,923	1,893	1,851	1,798	1,733	1,658	1,572	1,476
0,26	1,869	1,863	1,846	1,817	1,777	1,725	1,663	1,590	1,508	1,416
0,27	1,797	1,791	1,774	1,746	1,707	1,658	1,598	1,528	1,448	1,360
0,28	1,729	1,724	1,708	1,680	1,643	1,595	1,537	1,470	1,393	1,308
0,29	1,666	1,661	1,645	1,619	1,583	1,537	1,481	1,415	1,341	1,259
0,30	1,607	1,602	1,587	1,561	1,527	1,482	1,428	1,365	1,293	1,213
0,31	1,552	1,547	1,533	1,508	1,474	1,431	1,378	1,317	1,248	1,170
0,32	1,500	1,496	1,481	1,457	1,424	1,389	1,332	1,272	1,205	1,130
0,33	1,452	1,447	1,433	1,410	1,378	1,337	1,288	1,230	1,165	1,092
0,34	1,406	1,401	1,388	1,365	1,334	1,294	1,246	1,190	1,127	1,057
0,35	1,362	1,358	1,344	1,322	1,292	1,254	1,207	1,153	1,091	1,023
0,36	1,321	1,317	1,304	1,282	1,253	1,215	1,170	1,117	1,057	0,991

TABLE I. (Suite.)

RAPPORT $\frac{2.7}{\pi}$	RAPPORT $m = \frac{\theta}{\varphi}$									
	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95
0,12	2,931	2,694	2,441	2,171	1,888	1,593	1,286	0,972	0,651	0,327
0,13	2,702	2,484	2,250	2,001	1,740	1,467	1,185	0,895	0,600	0,301
0,14	2,506	2,303	2,086	1,855	1,612	1,360	1,098	0,836	0,556	0,279
0,15	2,335	2,146	1,943	1,728	1,502	1,266	1,023	0,772	0,517	0,259
0,16	2,186	2,008	1,818	1,617	1,405	1,184	0,956	0,722	0,484	0,242
0,17	2,054	1,887	1,708	1,518	1,319	1,112	0,898	0,678	0,454	0,227
0,18	1,936	1,778	1,610	1,431	1,243	1,048	0,845	0,638	0,427	0,214
0,19	1,830	1,681	1,521	1,352	1,175	0,990	0,799	0,603	0,403	0,202
0,20	1,735	1,594	1,442	1,281	1,112	0,937	0,756	0,571	0,382	0,191
0,21	1,649	1,514	1,370	1,217	1,057	0,890	0,718	0,542	0,362	0,181
0,22	1,571	1,442	1,304	1,159	1,006	0,847	0,683	0,515	0,344	0,172
0,23	1,499	1,376	1,244	1,105	0,959	0,807	0,651	0,491	0,328	0,164
0,24	1,433	1,315	1,189	1,056	0,916	0,771	0,621	0,468	0,313	0,157
0,25	1,372	1,259	1,138	1,010	0,876	0,737	0,594	0,448	0,299	0,149
0,26	1,315	1,207	1,091	0,968	0,839	0,706	0,569	0,428	0,286	0,143
0,27	1,263	1,158	1,047	0,929	0,805	0,677	0,545	0,411	0,274	0,137
0,28	1,214	1,114	1,006	0,892	0,773	0,650	0,523	0,394	0,263	0,131
0,29	1,169	1,072	0,968	0,858	0,744	0,625	0,503	0,379	0,253	0,126
0,30	1,126	1,032	0,932	0,826	0,716	0,601	0,484	0,364	0,243	0,121
0,31	1,086	0,995	0,899	0,796	0,690	0,579	0,466	0,350	0,234	0,116
0,32	1,049	0,961	0,867	0,768	0,665	0,558	0,449	0,337	0,225	0,112
0,33	1,013	0,928	0,837	0,742	0,642	0,539	0,433	0,325	0,217	0,108
0,34	0,980	0,897	0,809	0,716	0,620	0,520	0,418	0,314	0,209	0,104
0,35	0,948	0,868	0,782	0,693	0,599	0,502	0,403	0,303	0,202	0,100
0,36	0,918	0,840	0,757	0,670	0,579	0,486	0,390	0,292	0,195	0,097

TABLE I. (Suite.)

RAPPORT $\frac{2\varphi}{\pi}$	RAPPORT $m = \frac{\theta}{\varphi} =$									
	0,00	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45
0,37	1,282	1,278	1,265	1,244	1,216	1,179	1,135	1,083	1,025	0,960
0,38	1,245	1,241	1,228	1,208	1,180	1,144	1,101	1,051	0,994	0,931
0,39	1,209	1,205	1,194	1,174	1,146	1,111	1,069	1,021	0,965	0,904
0,40	1,176	1,172	1,160	1,142	1,114	1,080	1,039	0,991	0,937	0,877
0,42	1,113	1,109	1,098	1,080	1,054	1,022	0,983	0,937	0,885	0,828
0,44	1,056	1,052	1,042	1,024	0,999	0,968	0,931	0,887	0,838	0,783
0,46	1,003	1,000	0,990	0,972	0,949	0,919	0,883	0,841	0,794	0,742
0,48	0,955	0,951	0,942	0,925	0,903	0,874	0,839	0,799	0,754	0,704
0,50	0,910	0,907	0,897	0,881	0,859	0,832	0,798	0,760	0,716	0,668
0,52	0,868	0,865	0,856	0,840	0,819	0,793	0,760	0,723	0,681	0,635
0,54	0,829	0,826	0,817	0,802	0,782	0,756	0,725	0,689	0,648	0,604
0,56	0,793	0,790	0,781	0,767	0,747	0,722	0,692	0,657	0,618	0,575
0,58	0,758	0,756	0,747	0,733	0,714	0,690	0,661	0,627	0,589	0,548
0,60	0,726	0,723	0,715	0,702	0,683	0,659	0,631	0,599	0,562	0,522
0,62	0,696	0,693	0,685	0,672	0,654	0,631	0,603	0,572	0,536	0,497
0,64	0,667	0,665	0,657	0,644	0,626	0,607	0,577	0,546	0,512	0,474
0,68	0,614	0,612	0,604	0,592	0,575	0,554	0,528	0,499	0,467	0,431
0,72	0,566	0,564	0,557	0,545	0,529	0,508	0,484	0,456	0,426	0,392
0,76	0,522	0,520	0,516	0,502	0,486	0,467	0,444	0,417	0,388	0,356
0,80	0,482	0,480	0,473	0,462	0,447	0,429	0,406	0,381	0,353	0,323
0,84	0,445	0,443	0,436	0,426	0,411	0,393	0,372	0,347	0,320	0,292
0,88	0,410	0,408	0,402	0,391	0,378	0,360	0,339	0,316	0,290	0,262
0,92	0,378	0,376	0,370	0,360	0,346	0,329	0,309	0,286	0,261	0,235
0,96	0,347	0,345	0,349	0,329	0,316	0,300	0,280	0,258	0,234	0,209
1,00	0,318	0,316	0,311	0,301	0,288	0,272	0,253	0,231	0,208	0,184

TABLE I. (Suite.)

RAPPORT $\frac{2\gamma}{\pi}$	RAPPORT $m = \frac{\theta}{\gamma}$									
	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95
0,37	0,890	0,814	0,733	0,649	0,560	0,470	0,377	0,283	0,188	0,093
0,38	0,863	0,789	0,711	0,628	0,543	0,454	0,364	0,273	0,181	0,090
0,39	0,837	0,765	0,689	0,609	0,526	0,440	0,353	0,264	0,175	0,087
0,40	0,812	0,742	0,668	0,590	0,509	0,426	0,341	0,256	0,170	0,084
0,42	0,766	0,700	0,629	0,555	0,479	0,400	0,320	0,240	0,159	0,079
0,44	0,724	0,661	0,594	0,524	0,451	0,377	0,301	0,225	0,149	0,074
0,46	0,685	0,625	0,561	0,494	0,425	0,345	0,283	0,211	0,140	0,069
0,48	0,650	0,592	0,531	0,467	0,401	0,334	0,266	0,198	0,131	0,065
0,50	0,616	0,559	0,502	0,442	0,379	0,315	0,251	0,187	0,123	0,061
0,52	0,585	0,532	0,476	0,418	0,358	0,297	0,236	0,176	0,115	0,057
0,54	0,556	0,505	0,451	0,396	0,339	0,281	0,223	0,165	0,108	0,053
0,56	0,529	0,480	0,428	0,375	0,320	0,265	0,210	0,155	0,102	0,050
0,58	0,503	0,456	0,406	0,355	0,303	0,250	0,198	0,146	0,096	0,047
0,60	0,479	0,433	0,385	0,336	0,285	0,236	0,186	0,137	0,090	0,044
0,62	0,456	0,412	0,366	0,319	0,271	0,223	0,175	0,129	0,084	0,041
0,64	0,434	0,391	0,347	0,302	0,256	0,210	0,165	0,121	0,078	0,038
0,68	0,393	0,354	0,313	0,271	0,228	0,187	0,146	0,106	0,068	0,033
0,72	0,356	0,319	0,281	0,242	0,203	0,165	0,128	0,092	0,059	0,028
0,76	0,322	0,287	0,251	0,215	0,180	0,145	0,111	0,080	0,050	0,024
0,80	0,291	0,258	0,224	0,191	0,158	0,126	0,096	0,068	0,042	0,019
0,84	0,261	0,230	0,199	0,168	0,137	0,108	0,081	0,057	0,035	0,016
0,88	0,234	0,204	0,175	0,146	0,118	0,092	0,068	0,046	0,027	0,012
0,92	0,208	0,180	0,152	0,125	0,100	0,076	0,055	0,036	0,021	0,008
0,96	0,183	0,157	0,131	0,106	0,082	0,061	0,042	0,027	0,014	0,005
1,00	0,159	0,134	0,110	0,087	0,066	0,047	0,030	0,017	0,008	0,002

**TABLE II.** — Coefficient de la partie principale de la poussée produite par un poids uniformément réparti sur l'arc entier, suivant la longueur de la fibre moyenne ou suivant l'horizontale, et par une dilatation linéaire indépendante des charges.

( Voir les nos 107, 108 et 111.)

RAPPORT $\frac{2\varphi}{\pi}$	COEFFICIENT pour la dilatation.  F.	COEFFICIENT pour le poids uniformément réparti		RAPPORT $\frac{2\varphi}{\pi}$	COEFFICIENT pour la dilatation.  F.	COEFFICIENT pour le poids uniformément réparti	
		suivant l'arc.  F'.	suivant l'horizontale  F''.			suivant l'arc.  F'.	suivant l'horizontale  F''.
0,12	208,8	2,635	2,641	0,37	20,0	0,804	0,825
0,13	177,6	2,429	2,436	0,38	18,8	0,780	0,802
0,14	152,8	2,253	2,261	0,39	17,8	0,757	0,779
0,15	132,8	2,100	2,108	0,40	16,8	0,735	0,758
0,16	116,4	1,965	1,974	0,42	15,0	0,694	0,718
0,17	102,9	1,847	1,856	0,44	13,5	0,657	0,681
0,18	91,5	1,741	1,751	0,46	12,2	0,622	0,648
0,19	81,9	1,647	1,657	0,48	11,0	0,590	0,617
0,20	73,7	1,562	1,573	0,50	10,0	0,561	0,589
0,21	66,6	1,484	1,496	0,52	9,1	0,533	0,562
0,22	60,5	1,414	1,426	0,54	8,3	0,507	0,537
0,23	55,2	1,349	1,362	0,56	7,6	0,483	0,514
0,24	50,5	1,290	1,304	0,58	6,9	0,460	0,492
0,25	46,3	1,236	1,250	0,60	6,3	0,439	0,472
0,26	42,7	1,185	1,200	0,62	5,8	0,418	0,453
0,27	39,4	1,138	1,153	0,64	5,3	0,399	0,435
0,28	36,5	1,095	1,110	0,68	4,5	0,364	0,401
0,29	33,9	1,054	1,070	0,72	3,8	0,331	0,371
0,30	31,5	1,016	1,033	0,76	3,3	0,301	0,343
0,31	29,4	0,980	0,998	0,80	2,8	0,273	0,317
0,32	27,4	0,947	0,964	0,84	2,4	0,248	0,293
0,33	25,7	0,915	0,933	0,88	2,0	0,224	0,271
0,34	24,0	0,885	0,904	0,92	1,7	0,201	0,251
0,35	22,6	0,857	0,876	0,96	1,5	0,180	0,231
0,36	21,2	0,830	0,850	1,00	1,3	0,155	0,212

**TABLE III. — Valeurs des coefficients  $\lambda$  et  $\lambda'$  pour la correction des poussées produites par des poids ou par une dilatation linéaire indépendante des charges.**

(Voir les nos 104 et 105.)

N. B. On donne seulement ici la valeur moyenne de  $\lambda$ , correspondante à chaque angle  $\varphi$ .

RAPPORT $\frac{2\varphi}{\pi}$	$\lambda$	$\lambda'$	RAPPORT $\frac{2\varphi}{\pi}$	$\lambda$	$\lambda'$
0,12	2,44	207,55	0,37	2,20	18,91
0,13	2,43	176,33	0,38	2,19	17,78
0,14	2,43	151,55	0,39	2,17	16,72
0,15	2,42	131,57	0,40	2,16	15,76
0,16	2,42	115,22	0,42	2,13	14,02
0,17	2,41	101,67	0,44	2,10	12,52
0,18	2,40	90,32	0,46	2,07	11,22
0,19	2,40	80,71	0,48	2,03	10,08
0,20	2,39	72,51	0,50	2,00	9,09
0,21	2,38	65,44	0,52	1,97	8,20
0,22	2,37	59,33	0,54	1,93	7,42
0,23	2,36	54,00	0,56	1,89	6,73
0,24	2,35	49,32	0,58	1,86	6,12
0,25	2,34	45,19	0,60	1,82	5,56
0,26	2,33	41,53	0,62	1,78	5,07
0,27	2,32	38,29	0,64	1,74	4,63
0,28	2,31	35,37	0,68	1,66	3,86
0,29	2,30	32,75	0,72	1,58	3,24
0,30	2,29	30,39	0,76	1,50	2,73
0,31	2,28	28,27	0,80	1,41	2,30
0,32	2,27	26,33	0,84	1,33	1,95
0,33	2,25	24,57	0,88	1,25	1,65
0,34	2,24	22,96	0,92	1,16	1,40
0,35	2,23	21,49	0,96	1,08	1,20
0,36	2,22	20,15	1,00	1,00	1,00



**TABLE IV. — Coefficients de correction qui doivent affecter la partie principale de la poussée produite par des poids quelconques.**

(Voir le n° 106.)

Ce coefficient est l'unité quand l'argument  $\frac{r^2}{a^2}$  devient nul.

RAPPORT $\frac{2\psi}{\pi}$	RAPPORT $\frac{r^2}{a^2}$ exprimé en dix-millièmes.					RAPPORT $\frac{2\psi}{\pi}$	RAPPORT $\frac{r^2}{a^2}$ exprimé en dix-millièmes.				
	5	10	15	20	25		5	10	15	20	25
0,12	0,905	0,826	0,760	0,703	0,654	0,37	0,989	0,979	0,969	0,959	0,950
0,13	0,918	0,848	0,788	0,736	0,690	0,38	0,990	0,980	0,971	0,961	0,952
0,14	0,928	0,866	0,812	0,764	0,721	0,39	0,991	0,981	0,972	0,963	0,955
0,15	0,937	0,882	0,832	0,788	0,748	0,40	0,991	0,982	0,974	0,965	0,957
0,16	0,944	0,895	0,850	0,809	0,772	0,42	0,992	0,984	0,976	0,969	0,961
0,17	0,951	0,906	0,865	0,827	0,793	0,44	0,993	0,986	0,978	0,972	0,965
0,18	0,956	0,915	0,877	0,843	0,811	0,46	0,993	0,987	0,980	0,974	0,968
0,19	0,960	0,923	0,889	0,857	0,827	0,48	0,994	0,988	0,982	0,976	0,970
0,20	0,964	0,930	0,899	0,869	0,841	0,50	0,995	0,989	0,984	0,978	0,973
0,21	0,967	0,936	0,907	0,880	0,854	0,52	0,995	0,990	0,985	0,980	0,975
0,22	0,970	0,942	0,915	0,890	0,866	0,54	0,995	0,991	0,986	0,982	0,977
0,23	0,973	0,947	0,922	0,898	0,876	0,56	0,996	0,991	0,987	0,983	0,979
0,24	0,975	0,951	0,928	0,906	0,885	0,58	0,996	0,992	0,988	0,984	0,980
0,25	0,977	0,955	0,933	0,913	0,893	0,60	0,996	0,993	0,989	0,985	0,982
0,26	0,978	0,958	0,938	0,919	0,901	0,62	0,997	0,993	0,990	0,986	0,983
0,27	0,980	0,961	0,942	0,925	0,907	0,64	0,997	0,994	0,991	0,987	0,984
0,28	0,981	0,964	0,946	0,930	0,913	0,68	0,997	0,994	0,992	0,989	0,986
0,29	0,983	0,966	0,950	0,934	0,919	0,72	0,998	0,995	0,993	0,990	0,988
0,30	0,984	0,968	0,953	0,938	0,924	0,76	0,998	0,996	0,994	0,992	0,990
0,31	0,985	0,970	0,956	0,942	0,929	0,80	0,998	0,996	0,995	0,993	0,991
0,32	0,986	0,972	0,959	0,946	0,933	0,84	0,998	0,997	0,995	0,993	0,992
0,33	0,987	0,974	0,961	0,949	0,937	0,88	0,999	0,997	0,996	0,994	0,993
0,34	0,988	0,975	0,963	0,952	0,940	0,92	0,999	0,997	0,996	0,995	0,994
0,35	0,988	0,977	0,966	0,955	0,944	0,96	0,999	0,998	0,997	0,995	0,994
0,36	0,989	0,978	0,967	0,957	0,947	1,00	0,999	0,998	0,997	0,996	0,995

**TABLE V**, destinée à faciliter le calcul de la pression maximum dans un arc circulaire à section constante, uniformément chargé suivant l'horizontale.

(Voir le § III du chapitre V.)

Coefficient 6.

$$\frac{r^2}{a^2} = 0,0001.$$

RAPPORT $\frac{2r}{\pi}$	RAPPORT $\frac{h}{a}$ ENTRE LA HAUTEUR DE LA SECTION ET LA DEMI-OUVERTURE DE L'ARC (exprimé en millièmes).													
	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	100
0,12	6,7	6,9	7,2	7,4	7,7	7,9	"	"	"	"	"	"	"	"
0,14	5,7	5,9	6,1	6,3	6,5	6,7	"	"	"	"	"	"	"	"
0,16	4,9	5,1	5,2	5,4	5,6	5,7	"	"	"	"	"	"	"	"
0,18	4,4	4,5	4,7	4,8	5,0	5,1	"	"	"	"	"	"	"	"
0,20	3,9	4,1	4,2	4,4	4,5	4,6	"	"	"	"	"	"	"	"
0,21	3,7	3,8	4,0	4,1	4,2	4,3	"	"	"	"	"	"	"	"
0,22	3,6	3,7	3,8	4,0	4,1	4,2	"	"	"	"	"	"	"	"
0,23	3,5	3,6	3,7	3,8	4,0	4,1	"	"	"	"	"	"	"	"
0,24	3,3	3,5	3,6	3,7	3,8	4,0	"	"	"	"	"	"	"	"
0,25	3,2	3,4	3,5	3,6	3,7	3,9	"	"	"	"	"	"	"	"
0,26	3,1	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	"	"	"	"	"	"	"	"
0,27	3,1	3,2	3,3	3,5	3,6	3,8	"	"	"	"	"	"	"	"
0,28	3,0	3,2	3,3	3,5	3,6	3,7	"	"	"	"	"	"	"	"
0,29	3,0	3,1	3,2	3,4	3,5	3,7	"	"	"	"	"	"	"	"
0,30	2,9	3,0	3,2	3,3	3,4	3,6	"	"	"	"	"	"	"	"
0,31	2,9	3,0	3,2	3,3	3,4	3,6	"	"	"	"	"	"	"	"
0,32	2,9	3,1	3,2	3,3	3,5	3,6	"	"	"	"	"	"	"	"
0,34	2,9	3,1	3,3	3,4	3,6	3,7	"	"	"	"	"	"	"	"
0,36	2,9	3,1	3,3	3,5	3,7	3,8	"	"	"	"	"	"	"	"
0,38	3,0	3,2	3,4	3,6	3,8	4,0	"	"	"	"	"	"	"	"
0,40	3,1	3,4	3,6	3,9	4,1	4,3	"	"	"	"	"	"	"	"
0,44	3,3	3,6	3,9	4,2	4,5	4,8	"	"	"	"	"	"	"	"
0,48	3,6	3,9	4,3	4,7	5,0	5,4	"	"	"	"	"	"	"	"
0,52	3,9	4,3	4,7	5,1	5,5	6,0	"	"	"	"	"	"	"	"
0,56	4,3	4,8	5,3	5,8	6,3	6,8	"	"	"	"	"	"	"	"
0,60	4,8	5,4	6,0	6,6	7,2	7,8	"	"	"	"	"	"	"	"
0,68	5,9	6,7	7,5	8,3	9,1	9,9	"	"	"	"	"	"	"	"
0,76	7,4	8,4	9,5	10,5	11,6	12,6	"	"	"	"	"	"	"	"
0,84	9,2	10,6	11,9	13,3	14,6	16,0	"	"	"	"	"	"	"	"
0,92	11,6	13,4	15,1	16,9	18,7	20,4	"	"	"	"	"	"	"	"
1,00	14,5	16,7	19,0	21,2	23,5	25,7	"	"	"	"	"	"	"	"

TABLE V. (Suite.)

Coefficient  $\zeta$ .

$\frac{r^2}{a^2} = 0.0002.$

RAPPORT $\frac{2\psi}{\pi}$	RAPPORT $\frac{h}{a}$ ENTRE LA HAUTEUR DE LA SECTION ET LA DEMI-OUVERTURE DE L'ARC (exprimé en millièmes).														
	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100
0,12	6,6	6,8	7,1	7,3	7,6	7,8	8,1	8,3	8,6	"	"	"	"	"	"
0,14	5,6	5,7	5,9	6,1	6,3	6,5	6,7	6,9	7,1	"	"	"	"	"	"
0,16	4,8	5,0	5,1	5,3	5,4	5,6	5,7	5,9	6,0	"	"	"	"	"	"
0,18	4,2	4,3	4,4	4,6	4,7	4,8	4,9	5,1	5,2	"	"	"	"	"	"
0,20	3,8	3,9	4,0	4,1	4,2	4,3	4,5	4,6	4,7	"	"	"	"	"	"
0,21	3,6	3,7	3,8	3,9	4,0	4,1	4,2	4,3	4,4	"	"	"	"	"	"
0,22	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4,0	4,1	4,2	"	"	"	"	"	"
0,23	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4,0	4,1	"	"	"	"	"	"
0,24	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	"	"	"	"	"	"
0,25	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,4	3,5	3,6	3,7	"	"	"	"	"	"
0,26	2,9	3,0	3,1	3,2	3,3	3,3	3,4	3,5	3,6	"	"	"	"	"	"
0,27	2,9	3,0	3,1	3,2	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	"	"	"	"	"	"
0,28	2,8	2,9	3,0	3,1	3,2	3,2	3,3	3,4	3,5	"	"	"	"	"	"
0,29	2,7	2,8	2,9	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	"	"	"	"	"	"
0,30	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	"	"	"	"	"	"
0,31	2,6	2,7	2,8	2,9	2,9	3,0	3,1	3,2	3,3	"	"	"	"	"	"
0,32	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0	3,0	3,1	3,2	"	"	"	"	"	"
0,34	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0	3,1	3,2	"	"	"	"	"	"
0,36	2,4	2,5	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0	3,1	"	"	"	"	"	"
0,38	2,4	2,5	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0	3,1	"	"	"	"	"	"
0,40	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0	3,1	3,2	"	"	"	"	"	"
0,44	2,4	2,6	2,7	2,8	3,0	3,1	3,2	3,4	3,5	"	"	"	"	"	"
0,48	2,5	2,7	2,8	3,0	3,2	3,4	3,5	3,7	3,9	"	"	"	"	"	"
0,52	2,6	2,8	3,0	3,2	3,5	3,7	3,9	4,1	4,3	"	"	"	"	"	"
0,56	2,8	3,0	3,3	3,5	3,7	4,0	4,3	4,5	4,7	"	"	"	"	"	"
0,60	3,0	3,3	3,6	3,9	4,2	4,4	4,7	5,0	5,3	"	"	"	"	"	"
0,68	3,5	3,9	4,3	4,7	5,1	5,5	5,9	6,3	6,7	"	"	"	"	"	"
0,76	4,2	4,8	5,3	5,8	6,3	6,9	7,4	7,9	8,4	"	"	"	"	"	"
0,84	5,1	5,8	6,5	7,2	7,8	8,5	9,2	9,9	10,6	"	"	"	"	"	"
0,92	6,3	7,2	8,1	9,0	9,8	10,7	11,6	12,5	13,4	"	"	"	"	"	"
1,00	7,7	8,9	10,0	11,1	12,1	13,3	14,5	15,6	16,7	"	"	"	"	"	"

TABLE V. (Suite.)

Coefficient  $\epsilon$ .

$\frac{r^2}{a^2} = 0,0003.$

RAPPORT $\frac{r^2}{a^2}$	RAPPORT $\frac{h}{a}$ ENTRE LA HAUTEUR DE LA SECTION ET LA DEMI-OUVERTURE DE L'ARC (exprimé en millièmes).														
	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100
0,12	6,5	6,7	6,9	7,2	7,4	7,7	7,9	8,2	8,4	8,7	8,9	"	"	"	"
0,14	5,5	5,6	5,8	6,0	6,2	6,4	6,6	6,8	7,0	7,1	7,3	"	"	"	"
0,16	4,7	4,9	5,0	5,2	5,3	5,5	5,6	5,8	5,9	6,1	6,2	"	"	"	"
0,18	4,1	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,9	5,0	5,1	5,2	5,3	"	"	"	"
0,20	3,7	3,8	3,9	4,0	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	"	"	"	"
0,21	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4,0	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	"	"	"	"
0,22	3,4	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4,0	4,1	4,2	4,3	"	"	"	"
0,23	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,6	3,7	3,8	3,9	4,0	4,1	"	"	"	"
0,24	3,1	3,2	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,7	3,8	3,9	"	"	"	"
0,25	2,9	3,0	3,1	3,2	3,3	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,7	"	"	"	"
0,26	2,8	2,9	3,0	3,1	3,2	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,6	"	"	"	"
0,27	2,8	2,8	2,9	3,0	3,1	3,2	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	"	"	"	"
0,28	2,7	2,7	2,8	2,9	3,0	3,1	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	"	"	"	"
0,29	2,6	2,6	2,7	2,8	2,9	2,9	3,0	3,1	3,2	3,3	3,3	"	"	"	"
0,30	2,5	2,6	2,6	2,7	2,8	2,8	2,9	3,0	3,1	3,2	3,2	"	"	"	"
0,31	2,4	2,5	2,6	2,6	2,7	2,8	2,8	2,9	3,0	3,1	3,1	"	"	"	"
0,32	2,3	2,4	2,5	2,6	2,6	2,7	2,8	2,9	2,9	3,0	3,1	"	"	"	"
0,34	2,2	2,3	2,4	2,5	2,5	2,6	2,7	2,8	2,8	2,9	3,0	"	"	"	"
0,36	2,2	2,2	2,3	2,4	2,4	2,5	2,6	2,7	2,7	2,8	2,9	"	"	"	"
0,38	2,2	2,2	2,3	2,3	2,4	2,5	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	"	"	"	"
0,40	2,2	2,2	2,3	2,4	2,5	2,5	2,6	2,7	2,8	2,8	2,9	"	"	"	"
0,44	2,2	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	2,9	3,0	"	"	"	"
0,48	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	3,0	3,1	3,2	3,3	"	"	"	"
0,52	2,2	2,3	2,5	2,6	2,7	2,9	3,0	3,1	3,3	3,4	3,5	"	"	"	"
0,56	2,3	2,4	2,6	2,8	2,9	3,1	3,3	3,4	3,6	3,7	3,9	"	"	"	"
0,60	2,4	2,6	2,8	3,0	3,2	3,4	3,6	3,8	4,0	4,2	4,4	"	"	"	"
0,68	2,7	3,0	3,2	3,5	3,7	4,0	4,3	4,5	4,8	5,0	5,3	"	"	"	"
0,76	3,2	3,5	3,9	4,2	4,6	4,9	5,3	5,6	6,0	6,3	6,7	"	"	"	"
0,84	3,8	4,2	4,7	5,1	5,6	6,0	6,5	6,9	7,4	7,8	8,3	"	"	"	"
0,92	4,5	5,1	5,7	6,3	6,9	7,5	8,1	8,7	9,2	9,8	10,4	"	"	"	"
1,00	5,5	6,2	7,0	7,7	8,5	9,2	10,0	10,7	11,5	12,2	13,0	"	"	"	"

TABLE V. (Suite.)

Coefficient  $\varepsilon$ .

$$\frac{r^2}{a^2} = 0,0004.$$

RAPPORT $\frac{2\varepsilon}{\pi}$	RAPPORT $\frac{h}{a}$ ENTRE LA HAUTEUR DE LA SECTION ET LA DEMI-OUVERTURE DE L'ARC (exprimé en millièmes).															
	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100	
0,12	"	6,6	6,8	7,1	7,3	7,6	7,8	8,0	8,3	8,5	8,8	9,0	9,3	"	"	
0,14	"	5,6	5,7	5,9	6,1	6,3	6,5	6,7	6,8	7,0	7,2	7,4	7,6	"	"	
0,16	"	4,8	4,9	5,1	5,2	5,4	5,5	5,7	5,8	6,0	6,1	6,3	6,4	"	"	
0,18	"	4,2	4,3	4,4	4,6	4,7	4,8	4,9	5,0	5,2	5,3	5,4	5,5	"	"	
0,20	"	3,8	3,9	4,0	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9	"	"	
0,21	"	3,6	3,7	3,8	3,9	3,9	4,0	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	"	"	
0,22	"	3,4	3,5	3,6	3,7	3,7	3,8	3,9	4,0	4,1	4,2	4,3	4,4	"	"	
0,23	"	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,6	3,7	3,8	3,9	4,0	4,1	4,2	"	"	
0,24	"	3,1	3,2	3,3	3,3	3,4	3,5	3,6	3,6	3,7	3,8	3,9	4,0	"	"	
0,25	"	3,0	3,1	3,1	3,2	3,3	3,4	3,4	3,5	3,6	3,7	3,7	3,8	"	"	
0,26	"	2,9	2,9	3,0	3,1	3,2	3,2	3,3	3,4	3,5	3,5	3,6	3,7	"	"	
0,27	"	2,8	2,9	2,9	3,0	3,1	3,1	3,2	3,3	3,4	3,4	3,5	3,6	"	"	
0,28	"	2,7	2,8	2,8	2,9	3,0	3,0	3,1	3,2	3,3	3,3	3,4	3,5	"	"	
0,29	"	2,6	2,7	2,7	2,8	2,9	2,9	3,0	3,1	3,1	3,2	3,3	3,3	"	"	
0,30	"	2,5	2,5	2,6	2,7	2,7	2,8	2,9	3,0	3,0	3,1	3,1	3,2	"	"	
0,31	"	2,4	2,5	2,5	2,6	2,7	2,7	2,8	2,9	2,9	3,0	3,0	3,1	"	"	
0,32	"	2,3	2,4	2,5	2,5	2,6	2,7	2,7	2,8	2,8	2,9	3,0	3,0	"	"	
0,34	"	2,3	2,3	2,4	2,4	2,5	2,6	2,6	2,7	2,8	2,8	2,9	3,0	"	"	
0,36	"	2,2	2,2	2,3	2,3	2,4	2,5	2,5	2,6	2,7	2,7	2,8	2,9	"	"	
0,38	"	2,1	2,1	2,2	2,2	2,3	2,4	2,4	2,5	2,6	2,6	2,7	2,8	"	"	
0,40	"	2,1	2,1	2,2	2,2	2,3	2,3	2,4	2,5	2,5	2,6	2,7	2,7	"	"	
0,44	"	2,0	2,1	2,2	2,2	2,3	2,4	2,4	2,5	2,6	2,6	2,7	2,8	"	"	
0,48	"	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0	"	"	
0,52	"	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0	3,1	3,2	"	"	
0,56	"	2,1	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,9	3,0	3,1	3,2	3,3	3,5	"	"	
0,60	"	2,2	2,4	2,5	2,6	2,7	2,9	3,0	3,1	3,3	3,4	3,5	3,7	"	"	
0,68	"	2,5	2,7	2,9	3,1	3,3	3,5	3,7	3,9	4,1	4,3	4,5	4,7	"	"	
0,76	"	2,9	3,2	3,4	3,7	3,9	4,2	4,5	4,7	5,0	5,2	5,5	5,8	"	"	
0,84	"	3,4	3,8	4,1	4,4	4,8	5,1	5,5	5,8	6,1	6,5	6,8	7,2	"	"	
0,92	"	4,1	4,5	5,0	5,4	5,9	6,3	6,7	7,2	7,6	8,1	8,5	9,0	"	"	
1,00	"	4,9	5,5	6,0	6,6	7,2	7,7	8,3	8,8	9,4	10,0	10,5	11,1	"	"	

TABLE V. (Suite.)

Coefficient 6.

$$\frac{r^2}{a^2} = 0,0005.$$

RAPPORT	RAPPORT $\frac{h}{a}$ ENTRE LA HAUTEUR DE LA SECTION ET LA DEMI-OUVERTURE DE L'ARC (exprimé en millièmes).														
	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100
0,12	"	"	6,7	6,9	7,2	7,4	7,7	7,9	8,1	8,4	8,6	8,9	9,1	9,3	9,6
0,14	"	"	5,6	5,8	6,0	6,2	6,4	6,5	6,7	6,9	7,1	7,3	7,4	7,6	7,8
0,16	"	"	4,9	5,0	5,2	5,3	5,4	5,6	5,7	5,9	6,0	6,1	6,3	6,4	6,6
0,18	"	"	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	5,0	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
0,20	"	"	3,8	3,9	4,0	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9	5,0
0,21	"	"	3,6	3,7	3,8	3,9	4,0	4,1	4,2	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7
0,22	"	"	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4,0	4,0	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5
0,23	"	"	3,3	3,4	3,5	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	3,9	4,0	4,1	4,2	4,3
0,24	"	"	3,1	3,2	3,3	3,4	3,4	3,5	3,6	3,7	3,7	3,8	3,9	4,0	4,0
0,25	"	"	3,0	3,1	3,1	3,2	3,3	3,4	3,4	3,5	3,6	3,6	3,7	3,8	3,8
0,26	"	"	2,9	3,0	3,0	3,1	3,2	3,2	3,3	3,4	3,4	3,5	3,6	3,6	3,7
0,27	"	"	2,8	2,8	2,9	3,0	3,1	3,1	3,2	3,2	3,3	3,4	3,4	3,5	3,6
0,28	"	"	2,7	2,8	2,8	2,9	3,0	3,0	3,1	3,2	3,2	3,3	3,3	3,4	3,5
0,29	"	"	2,6	2,7	2,7	2,8	2,9	2,9	3,0	3,0	3,1	3,2	3,2	3,3	3,4
0,30	"	"	2,5	2,6	2,6	2,7	2,8	2,8	2,9	2,9	3,0	3,0	3,1	3,2	3,2
0,31	"	"	2,4	2,5	2,5	2,6	2,7	2,7	2,8	2,8	2,9	3,0	3,0	3,1	3,1
0,32	"	"	2,4	2,4	2,5	2,5	2,6	2,6	2,7	2,8	2,8	2,9	2,9	3,0	3,0
0,34	"	"	2,3	2,3	2,4	2,4	2,5	2,5	2,6	2,7	2,7	2,8	2,8	2,9	2,9
0,36	"	"	2,2	2,2	2,3	2,3	2,4	2,4	2,5	2,6	2,6	2,7	2,7	2,8	2,8
0,38	"	"	2,1	2,1	2,2	2,2	2,3	2,3	2,4	2,5	2,5	2,6	2,6	2,7	2,7
0,40	"	"	2,0	2,1	2,1	2,2	2,2	2,3	2,3	2,4	2,5	2,5	2,6	2,6	2,7
0,44	"	"	2,0	2,0	2,1	2,1	2,2	2,2	2,3	2,4	2,4	2,5	2,6	2,6	2,7
0,48	"	"	2,0	2,1	2,1	2,2	2,3	2,3	2,4	2,5	2,5	2,6	2,6	2,7	2,8
0,52	"	"	2,0	2,1	2,2	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0
0,56	"	"	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0	3,1	3,2
0,60	"	"	2,1	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5
0,68	"	"	2,4	2,5	2,7	2,9	3,0	3,2	3,3	3,5	3,6	3,8	4,0	4,1	4,3
0,76	"	"	2,7	2,9	3,1	3,4	3,6	3,8	4,0	4,2	4,4	4,6	4,8	5,0	5,1
0,84	"	"	3,2	3,5	3,7	4,0	4,3	4,5	4,8	5,1	5,3	5,6	5,9	6,1	6,4
0,92	"	"	3,8	4,2	4,5	4,8	5,2	5,6	6,0	6,3	6,7	7,0	7,4	7,7	8,1
1,00	"	"	4,6	5,0	5,5	5,9	6,4	6,8	7,3	7,7	8,2	8,6	9,1	9,5	10,0



TABLE V. (Suite.)

Coefficient  $\epsilon$ .

$$\frac{r^2}{a^2} = 0,0006.$$

RAPPORT $\frac{2r}{\pi}$	RAPPORT $\frac{h}{a}$ ENTRE LA HAUTEUR DE LA SECTION ET LA DEMI-OUVERTURE DE L'ARC (exprimé en millièmes).															
	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100	
0,12	"	"	"	6,8	7,0	7,3	7,5	7,7	8,0	8,2	8,4	8,7	8,9	9,1	9,4	
0,14	"	"	"	5,8	5,9	6,1	6,3	6,5	6,6	6,8	7,0	7,2	7,4	7,5	7,7	
0,16	"	"	"	5,0	5,1	5,2	5,4	5,5	5,7	5,8	6,0	6,1	6,2	6,4	6,5	
0,18	"	"	"	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9	5,0	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6	
0,20	"	"	"	3,9	4,0	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9	5,0	
0,21	"	"	"	3,7	3,8	3,9	4,0	4,0	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	
0,22	"	"	"	3,5	3,6	3,7	3,8	3,8	3,9	4,0	4,1	4,2	4,3	4,3	4,4	
0,23	"	"	"	3,3	3,4	3,5	3,6	3,6	3,7	3,8	3,9	3,9	4,0	4,1	4,2	
0,24	"	"	"	3,2	3,3	3,3	3,4	3,5	3,6	3,6	3,7	3,8	3,8	3,9	4,0	
0,25	"	"	"	3,1	3,1	3,2	3,3	3,3	3,4	3,5	3,5	3,6	3,7	3,7	3,8	
0,26	"	"	"	2,9	3,0	3,1	3,1	3,2	3,3	3,3	3,4	3,5	3,5	3,6	3,7	
0,27	"	"	"	2,8	2,9	2,9	3,0	3,1	3,1	3,2	3,3	3,3	3,4	3,4	3,5	
0,28	"	"	"	2,7	2,8	2,8	2,9	3,0	3,0	3,1	3,1	3,2	3,3	3,3	3,4	
0,29	"	"	"	2,6	2,7	2,7	2,8	2,9	2,9	3,0	3,0	3,1	3,1	3,2	3,3	
0,30	"	"	"	2,5	2,6	2,6	2,7	2,8	2,8	2,9	2,9	3,0	3,0	3,1	3,2	
0,31	"	"	"	2,5	2,5	2,6	2,6	2,7	2,7	2,8	2,8	2,9	2,9	3,0	3,1	
0,32	"	"	"	2,4	2,4	2,5	2,5	2,6	2,7	2,7	2,8	2,8	2,9	2,9	3,0	
0,34	"	"	"	2,3	2,3	2,4	2,4	2,5	2,6	2,6	2,7	2,7	2,8	2,8	2,9	
0,36	"	"	"	2,2	2,2	2,3	2,3	2,4	2,4	2,5	2,5	2,6	2,6	2,7	2,7	
0,38	"	"	"	2,1	2,1	2,2	2,2	2,3	2,3	2,4	2,4	2,5	2,5	2,6	2,6	
0,40	"	"	"	2,0	2,0	2,1	2,2	2,2	2,3	2,3	2,4	2,4	2,5	2,5	2,6	
0,44	"	"	"	1,9	2,0	2,0	2,1	2,1	2,2	2,2	2,3	2,3	2,4	2,4	2,5	
0,48	"	"	"	1,9	2,0	2,0	2,1	2,2	2,2	2,3	2,3	2,4	2,4	2,5	2,6	
0,52	"	"	"	1,9	2,0	2,1	2,1	2,2	2,3	2,3	2,4	2,4	2,5	2,6	2,7	
0,56	"	"	"	2,0	2,1	2,2	2,2	2,3	2,4	2,5	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	
0,60	"	"	"	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	2,9	3,0	3,1	
0,68	"	"	"	2,3	2,4	2,6	2,7	2,8	3,0	3,1	3,2	3,4	3,5	3,6	3,7	
0,76	"	"	"	2,6	2,8	3,0	3,1	3,3	3,5	3,7	3,8	4,0	4,2	4,4	4,5	
0,84	"	"	"	3,0	3,3	3,5	3,7	3,9	4,2	4,4	4,6	4,8	5,1	5,3	5,5	
0,92	"	"	"	3,7	3,9	4,2	4,5	4,8	5,1	5,4	5,7	6,0	6,3	6,6	6,9	
1,00	"	"	"	4,4	4,7	5,1	5,5	5,9	6,2	6,6	7,0	7,4	7,7	8,1	8,5	

TABLE V. (Suite.)

Coefficient 5.

$$\frac{r}{a} = 0,0008.$$

RAPPORT $\frac{2\gamma}{\pi}$	RAPPORT $\frac{h}{a}$ ENTRE LA HAUTEUR DE LA SECTION ET LA DEMI-OUVERTURE DE L'ARC (exprimé en millièmes)															
	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100	
0,12	"	"	"	"	6,8	7,0	7,2	7,4	7,7	7,9	8,1	8,3	8,6	8,8	9,0	
0,14	"	"	"	"	5,7	5,9	6,1	6,3	6,4	6,6	6,8	7,0	7,1	7,3	7,5	
0,16	"	"	"	"	5,0	5,1	5,3	5,4	5,5	5,7	5,8	5,9	6,1	6,2	6,4	
0,18	"	"	"	"	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9	5,0	5,1	5,3	5,4	5,5	
0,20	"	"	"	"	3,9	4,0	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,8	
0,21	"	"	"	"	3,7	3,8	3,9	3,9	4,0	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	
0,22	"	"	"	"	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	3,9	4,0	4,1	4,2	4,3	4,3	
0,23	"	"	"	"	3,3	3,4	3,5	3,6	3,6	3,7	3,8	3,8	3,9	4,0	4,1	
0,24	"	"	"	"	3,2	3,3	3,3	3,4	3,5	3,5	3,6	3,7	3,7	3,8	3,9	
0,25	"	"	"	"	3,1	3,1	3,2	3,2	3,3	3,4	3,4	3,5	3,6	3,6	3,7	
0,26	"	"	"	"	2,9	3,0	3,1	3,1	3,2	3,3	3,3	3,4	3,4	3,5	3,6	
0,27	"	"	"	"	2,8	2,9	2,9	3,0	3,1	3,1	3,2	3,2	3,3	3,4	3,4	
0,28	"	"	"	"	2,7	2,8	2,8	2,9	2,9	3,0	3,1	3,1	3,2	3,2	3,3	
0,29	"	"	"	"	2,6	2,7	2,7	2,8	2,8	2,9	3,0	3,0	3,1	3,1	3,2	
0,30	"	"	"	"	2,5	2,6	2,6	2,7	2,7	2,8	2,8	2,9	2,9	3,0	3,1	
0,31	"	"	"	"	2,4	2,5	2,5	2,6	2,6	2,7	2,7	2,8	2,8	2,9	3,0	
0,32	"	"	"	"	2,3	2,4	2,5	2,5	2,6	2,6	2,7	2,7	2,8	2,8	2,9	
0,34	"	"	"	"	2,2	2,3	2,4	2,4	2,5	2,5	2,6	2,6	2,7	2,7	2,8	
0,36	"	"	"	"	2,1	2,2	2,2	2,3	2,3	2,4	2,4	2,5	2,5	2,6	2,6	
0,38	"	"	"	"	2,0	2,1	2,1	2,2	2,2	2,3	2,3	2,4	2,4	2,5	2,5	
0,40	"	"	"	"	2,0	2,0	2,0	2,1	2,1	2,2	2,2	2,3	2,3	2,4	2,4	
0,44	"	"	"	"	1,9	1,9	1,9	2,0	2,0	2,1	2,1	2,2	2,2	2,3	2,3	
0,48	"	"	"	"	1,8	1,9	1,9	2,0	2,0	2,1	2,1	2,2	2,2	2,3	2,3	
0,52	"	"	"	"	1,8	1,9	1,9	2,0	2,0	2,1	2,1	2,2	2,2	2,3	2,3	
0,56	"	"	"	"	1,9	1,9	2,0	2,0	2,1	2,2	2,2	2,3	2,3	2,4	2,4	
0,60	"	"	"	"	1,9	2,0	2,1	2,1	2,2	2,3	2,4	2,4	2,5	2,6	2,6	
0,68	"	"	"	"	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0	3,1	
0,76	"	"	"	"	2,4	2,5	2,6	2,8	2,9	3,0	3,1	3,3	3,4	3,5	3,7	
0,84	"	"	"	"	2,7	2,9	3,0	3,2	3,4	3,6	3,7	3,9	4,1	4,2	4,4	
0,92	"	"	"	"	3,2	3,4	3,6	3,9	4,1	4,3	4,5	4,7	4,9	5,2	5,4	
1,00	"	"	"	"	3,8	4,1	4,4	4,6	4,9	5,2	5,5	5,8	6,0	6,3	6,6	

I.

30

TABLE V. (Suite.)

Coefficient  $\epsilon$ .

$$\frac{r^2}{a^2} = 0,0010.$$

RAPPORT $\frac{2\gamma}{\pi}$	RAPPORT $\frac{h}{a}$ ENTRE LA HAUTEUR DE LA SECTION ET LA DEMI-OUVERTURE DE L'ARC (exprimé en millièmes).														
	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100
0,12	"	"	"	"	"	"	7,0	7,2	7,4	7,6	7,9	8,1	8,3	8,5	8,7
0,14	"	"	"	"	"	"	5,9	6,1	6,3	6,4	6,6	6,8	7,0	7,1	7,3
0,16	"	"	"	"	"	"	5,1	5,3	5,4	5,5	5,7	5,8	5,9	6,1	6,2
0,18	"	"	"	"	"	"	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9	5,1	5,2	5,3	5,4
0,20	"	"	"	"	"	"	4,0	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8
0,21	"	"	"	"	"	"	3,8	3,9	4,0	4,1	4,2	4,2	4,3	4,4	4,5
0,22	"	"	"	"	"	"	3,6	3,7	3,8	3,9	3,9	4,0	4,1	4,2	4,3
0,23	"	"	"	"	"	"	3,4	3,5	3,6	3,7	3,7	3,8	3,9	4,0	4,0
0,24	"	"	"	"	"	"	3,3	3,4	3,4	3,5	3,6	3,6	3,7	3,8	3,8
0,25	"	"	"	"	"	"	3,1	3,2	3,3	3,3	3,4	3,5	3,5	3,6	3,6
0,26	"	"	"	"	"	"	3,0	3,1	3,1	3,2	3,2	3,3	3,4	3,4	3,5
0,27	"	"	"	"	"	"	2,9	3,0	3,0	3,1	3,1	3,2	3,2	3,3	3,3
0,28	"	"	"	"	"	"	2,8	2,8	2,9	2,9	3,0	3,1	3,1	3,2	3,2
0,29	"	"	"	"	"	"	2,7	2,7	2,8	2,8	2,9	2,9	3,0	3,0	3,1
0,30	"	"	"	"	"	"	2,6	2,7	2,7	2,8	2,8	2,9	2,9	3,0	3,0
0,31	"	"	"	"	"	"	2,5	2,6	2,6	2,7	2,7	2,8	2,8	2,9	2,9
0,32	"	"	"	"	"	"	2,4	2,5	2,5	2,6	2,6	2,7	2,7	2,8	2,8
0,34	"	"	"	"	"	"	2,3	2,3	2,4	2,4	2,5	2,5	2,6	2,6	2,7
0,36	"	"	"	"	"	"	2,2	2,2	2,3	2,3	2,3	2,4	2,4	2,5	2,5
0,38	"	"	"	"	"	"	2,1	2,1	2,1	2,2	2,2	2,3	2,3	2,4	2,4
0,40	"	"	"	"	"	"	2,0	2,0	2,1	2,1	2,1	2,2	2,2	2,3	2,3
0,44	"	"	"	"	"	"	1,9	1,9	1,9	2,0	2,0	2,1	2,1	2,1	2,2
0,48	"	"	"	"	"	"	1,8	1,9	1,9	1,9	1,9	2,0	2,0	2,1	2,1
0,52	"	"	"	"	"	"	1,8	1,9	1,9	1,9	2,0	2,0	2,0	2,1	2,1
0,56	"	"	"	"	"	"	1,8	1,9	1,9	2,0	2,0	2,1	2,1	2,2	2,2
0,60	"	"	"	"	"	"	1,9	2,0	2,0	2,1	2,1	2,2	2,2	2,3	2,4
0,68	"	"	"	"	"	"	2,1	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,5	2,6	2,7
0,76	"	"	"	"	"	"	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0	3,1
0,84	"	"	"	"	"	"	2,6	2,8	2,9	3,0	3,2	3,3	3,5	3,6	3,7
0,92	"	"	"	"	"	"	3,1	3,3	3,5	3,6	3,8	4,0	4,2	4,3	4,5
1,00	"	"	"	"	"	"	3,7	3,9	4,1	4,4	4,6	4,8	5,0	5,3	5,5

TABLE V. (Suite.)

Coefficient  $\frac{1}{2}$ .

$\frac{r^2}{a^2} = 0,0012.$

RAPPORT $\frac{2\gamma}{\pi}$	RAPPORT $\frac{h}{a}$ ENTRE LA HAUTEUR DE LA SECTION ET LA DEMI-OUVERTURE DE L'ARC, exprimé en millièmes.														
	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100
0,12	"	"	"	"	"	"	"	6,9	7,2	7,4	7,6	7,8	8,0	8,2	8,4
0,14	"	"	"	"	"	"	"	5,9	6,1	6,3	6,4	6,6	6,8	6,9	7,1
0,16	"	"	"	"	"	"	"	5,0	5,1	5,2	5,4	5,5	5,6	5,8	5,9
0,18	"	"	"	"	"	"	"	4,5	4,7	4,8	4,9	5,0	5,1	5,2	5,3
0,20	"	"	"	"	"	"	"	4,0	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7
0,21	"	"	"	"	"	"	"	3,8	3,9	4,0	4,1	4,2	4,3	4,3	4,4
0,22	"	"	"	"	"	"	"	3,7	3,8	3,8	3,9	4,0	4,1	4,1	4,2
0,23	"	"	"	"	"	"	"	3,5	3,6	3,6	3,7	3,8	3,8	3,9	4,0
0,24	"	"	"	"	"	"	"	3,3	3,4	3,4	3,5	3,6	3,6	3,7	3,8
0,25	"	"	"	"	"	"	"	3,2	3,2	3,3	3,3	3,4	3,5	3,5	3,6
0,26	"	"	"	"	"	"	"	3,0	3,1	3,1	3,2	3,3	3,3	3,4	3,4
0,27	"	"	"	"	"	"	"	2,9	3,0	3,0	3,1	3,1	3,2	3,2	3,3
0,28	"	"	"	"	"	"	"	2,8	2,9	2,9	3,0	3,0	3,1	3,1	3,2
0,29	"	"	"	"	"	"	"	2,7	2,7	2,8	2,9	2,9	2,9	3,0	3,0
0,30	"	"	"	"	"	"	"	2,6	2,7	2,7	2,8	2,8	2,8	2,9	2,9
0,31	"	"	"	"	"	"	"	2,5	2,6	2,6	2,7	2,7	2,7	2,8	2,8
0,32	"	"	"	"	"	"	"	2,4	2,5	2,5	2,6	2,6	2,6	2,7	2,7
0,34	"	"	"	"	"	"	"	2,3	2,3	2,4	2,4	2,5	2,5	2,5	2,6
0,36	"	"	"	"	"	"	"	2,2	2,2	2,2	2,3	2,3	2,4	2,4	2,4
0,38	"	"	"	"	"	"	"	2,1	2,1	2,1	2,2	2,2	2,3	2,3	2,3
0,40	"	"	"	"	"	"	"	2,0	2,0	2,0	2,1	2,1	2,2	2,2	2,2
0,44	"	"	"	"	"	"	"	1,8	1,9	1,9	2,0	2,0	2,0	2,1	2,1
0,48	"	"	"	"	"	"	"	1,8	1,8	1,8	1,8	1,9	1,9	2,0	2,0
0,52	"	"	"	"	"	"	"	1,8	1,8	1,8	1,9	1,9	1,9	1,9	2,0
0,56	"	"	"	"	"	"	"	1,8	1,8	1,9	1,9	1,9	2,0	2,0	2,0
0,60	"	"	"	"	"	"	"	1,8	1,9	1,9	2,0	2,0	2,1	2,1	2,2
0,68	"	"	"	"	"	"	"	2,0	2,0	2,1	2,2	2,2	2,3	2,4	2,4
0,76	"	"	"	"	"	"	"	2,2	2,3	2,4	2,5	2,5	2,6	2,7	2,8
0,84	"	"	"	"	"	"	"	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0	3,2	3,3
0,92	"	"	"	"	"	"	"	2,8	3,0	3,1	3,3	3,4	3,6	3,8	3,9
1,00	"	"	"	"	"	"	"	3,1	3,4	3,6	3,8	4,0	4,2	4,4	4,5

TABLE V. (Suite.

Coefficient 6.

$\frac{r^2}{a^2} = 0,0015.$

RAPPORT $\frac{2\varphi}{\pi}$	RAPPORT $\frac{h}{a}$ ENTRE LA HAUTEUR DE LA SECTION ET LA DEMI-OUVERTURE DE L'ARC (exprimé en millièmes).														
	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100
0,12	"	"	"	"	"	"	"	"	6,9	7,1	7,3	7,6	7,8	8,0	8,2
0,14	"	"	"	"	"	"	"	"	5,9	6,0	6,2	6,3	6,5	6,7	6,8
0,16	"	"	"	"	"	"	"	"	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6	5,7	5,9
0,18	"	"	"	"	"	"	"	"	4,5	4,6	4,8	4,9	5,0	5,1	5,2
0,20	"	"	"	"	"	"	"	"	4,0	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
0,21	"	"	"	"	"	"	"	"	3,8	3,9	4,0	4,1	4,2	4,2	4,3
0,22	"	"	"	"	"	"	"	"	3,6	3,7	3,8	3,9	3,9	4,0	4,1
0,23	"	"	"	"	"	"	"	"	3,5	3,5	3,6	3,7	3,7	3,8	3,9
0,24	"	"	"	"	"	"	"	"	3,3	3,4	3,4	3,5	3,6	3,6	3,7
0,25	"	"	"	"	"	"	"	"	3,2	3,2	3,3	3,4	3,4	3,5	3,5
0,26	"	"	"	"	"	"	"	"	3,0	3,1	3,1	3,2	3,3	3,3	3,4
0,27	"	"	"	"	"	"	"	"	2,9	3,0	3,0	3,1	3,1	3,2	3,2
0,28	"	"	"	"	"	"	"	"	2,8	2,9	2,9	3,0	3,0	3,1	3,1
0,29	"	"	"	"	"	"	"	"	2,7	2,7	2,8	2,8	2,9	2,9	3,0
0,30	"	"	"	"	"	"	"	"	2,6	2,6	2,7	2,7	2,8	2,8	2,9
0,31	"	"	"	"	"	"	"	"	2,5	2,6	2,6	2,6	2,7	2,7	2,8
0,32	"	"	"	"	"	"	"	"	2,4	2,5	2,5	2,5	2,6	2,6	2,7
0,34	"	"	"	"	"	"	"	"	2,3	2,3	2,4	2,4	2,4	2,5	2,5
0,36	"	"	"	"	"	"	"	"	2,2	2,2	2,2	2,3	2,3	2,3	2,4
0,38	"	"	"	"	"	"	"	"	2,1	2,1	2,1	2,2	2,2	2,2	2,3
0,40	"	"	"	"	"	"	"	"	2,0	2,0	2,0	2,1	2,1	2,1	2,2
0,44	"	"	"	"	"	"	"	"	1,8	1,9	1,9	1,9	2,0	2,0	2,0
0,48	"	"	"	"	"	"	"	"	1,7	1,7	1,8	1,8	1,8	1,9	1,9
0,52	"	"	"	"	"	"	"	"	1,7	1,7	1,8	1,8	1,8	1,8	1,8
0,56	"	"	"	"	"	"	"	"	1,7	1,7	1,8	1,8	1,8	1,8	1,9
0,60	"	"	"	"	"	"	"	"	1,7	1,8	1,8	1,8	1,9	1,9	2,0
0,68	"	"	"	"	"	"	"	"	1,8	1,9	1,9	2,0	2,0	2,1	2,1
0,76	"	"	"	"	"	"	"	"	2,0	2,1	2,2	2,2	2,3	2,4	2,4
0,84	"	"	"	"	"	"	"	"	2,3	2,4	2,5	2,6	2,6	2,7	2,8
0,92	"	"	"	"	"	"	"	"	2,6	2,8	2,9	3,0	3,1	3,2	3,3
1,00	"	"	"	"	"	"	"	"	3,1	3,2	3,4	3,5	3,7	3,8	4,0

**TABLE VI. — Résultats d'expériences concernant les charges susceptibles de produire l'écrasement des pierres et mortiers.**

DÉSIGNATION DES SUBSTANCES.	CHARGE par centimètre carré capable de produire l'écrasement.	OBSERVATIONS.
<b>PIERRES VOLCANIQUES, GRANITIKUES ET SILICEUSES.</b>		
Basaltes de Suède et d'Auvergne.....	2000	Tous les nombres de ce tableau, non accompagnés d'une observation spéciale, sont empruntés à M. le général Poncelet. (INTRODUCTION A LA MÉCANIQUE INDUSTRIELLE.)
Lave dure du Vésuve, près Pouzzol.....	590	
Lave tendre de Naples.....	230	
Porphyre .....	2470	
Granite vert des Vosges.....	620	
Granite gris des Vosges.....	420	
Granite gris de Bretagne.....	650	
Granite de Normandie.....	700	
Grès très-dur.....	870	
Grès de divers échantillons.....	150	Moyenne d'essais faits pour le pont Britannia, en Anglet.
Grès bigarré des Vosges.....	400	Moyenne d'expériences faites au Conserv. des Arts et Mét.
<b>PIERRES CALCAIRES.</b>		
Marbre noir de Flandre.....	790	
Marbre blanc veiné, statuaire et turquin....	310	
Pierre noire de Saint-Fortunat, très-dure et coquilleuse.. . . . .	630	
Roche de Châtillon, près Paris, pure et peu coquilleuse.....	170	
Liais de Bagneux, près Paris, très-dur.....	440	
Roche douce de Bagneux.....	130	
Roche d'Arcueil, près Paris.....	250	
Pierre de Saillancourt, près } la plus forte. .	140	
Pontoise. .... } la plus faible..	90	
Pierre ferme de Conflans.....	90	
Pierre tendre (lambourde et vergelée) employée à Paris, résistant à l'eau.....	60	
Lambourde de qualité inférieure, résistant mal à l'eau.....	20	
Calcaire de Givry, près Paris { dur.....	310	
{ tendre.....	120	
Calcaire de Caumont (Eure). ....	120	Expériences du Conservatoire des Arts et Métiers.
Calcaire de l'île d'Anglesey.....	230	Expériences pour le pont Britannia.
Calcaire lithographique.....	280	Expériences de M. Vicat.
Calcaire oolithique ou sablonneux, en moyenne	100	Idem



**TABLE VI.** (Suite.)

DÉSIGNATION DES SUBSTANCES.	CHARGE par centi- mètre carré capable de produire l'écrasement.	OBSERVATIONS.
BRIQUES.		
Brique dure très-cuite.....	150	Essais faits pour le pont Bri- tannia. Expériences de M. Vicat.
Brique rouge.....	60	
Brique rouge pâle.....	40	
Maçonnerie de briques.....	36	
Brique crue, simplement séchée à l'air.....	33	
PLÂTRES ET MORTIERS.		
Plâtre gâché à l'eau.....	42	Idem.
Plâtre gâché à l'eau très-ferme.....	90	Idem.
Plâtre silicaté.....	48	Expériences du Conservatoire des Arts et Métiers.
Mortier ordinaire en chaux grasse et sable...	35	Expériences de M. Vicat.
Mortier ordinaire en chaux grasse et sable, âgé de 1/4 ans.....	19	Idem.
Mortier avec chaux hydraulique ordinaire...	74	Idem.
Mortier avec chaux éminemment hydraulique.	144	

---

## ERRATA.

---

Page 17, ligne 22, *au lieu de* distances du plan, *lisez* distances du plan AB.

Page 29, ligne 15, *au lieu de*  $-\frac{b^2 x'}{a^2 y'}$ , *lisez*  $-\frac{b^2 y'}{a^2 x'}$ .

Page 33, ligne 6 en remontant, *au lieu de* ajoutant algébriquement, *lisez* composant.

Page 49, ligne 6 en remontant, *au lieu de* section C'D' du prisme primitif, *lisez* section plane C'D'.

Page 57, ligne 16, *au lieu de*  $\frac{3\pi}{4}$ ,  $\frac{\pi}{4}$ ,  $\frac{\pi}{2}$ , *lisez*  $\frac{3\pi}{4}$ ,  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{\pi}{4}$ .

Page 61, ligne 2, *au lieu de*  $6m^2 - 8m + 1$ , *lisez*  $6m^2 - 8m + 3$ .

Page 120, ligne 20, *à la suite du mot* symétrique, *ajoutez* en conservant le système primitif de forces.

Page 133, ligne 3 en remontant, *après l'axe* AB, *intercalez* et *ds* la longueur d'un élément de courbe projeté sur l'élément d'abscisse  $dx$ .

Page 137, ligne 7 en remontant, *au lieu de*  $x$  et  $y$ , *lisez*  $x$ ,  $y$  et  $\frac{dy}{dx}$ .

Page 179, ligne 2, à la fin de la ligne, *au lieu de*  $x^2$ , *lisez*  $x_1^2$ .

Page 284, ligne 2 en remontant, *au lieu de* de  $q'_1$ , *lisez*  $q'_1$ .

Page 310, ligne 7 en remontant, *au lieu de* position, *lisez* pression.

Page 312, ligne 7 *au lieu de*  $-\frac{1}{2}pa^2z^2$ , *lisez*  $-\frac{1}{4}pa^2z^2$ .

---



005700232